Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería

David K. Cheng

PEARSON

Addison Wesley Longman

Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería

Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería

DAVID K. CHENG

CENTENNIAL PROFESSOR EMERITUS, SYRACUSE UNIVERSITY

Versión en español de
Ernesto Morales Peake
Equilibrio S.A. de C.V., México

Con la colaboración de
José Luis Sebastián Franco
Universidad Complutense de Madrid, España

PEARSON
Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Versión en español de la obra *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company, Inc., United States of America © 1993 por Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Esta edición en español es la única autorizada

Portada: Peter Blaiwas

Primera reimpresión, 1998

D.R. © 1998 por **Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V.**
Atlacomulco Núm. 500-5° Piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México

CNIEM 1031

ISBN 968 444 327 7

Impreso en México. *Printed in Mexico*

Prefacio

Esta obra ha sido diseñada como libro de texto para un curso de electromagnetismo para ingeniería a nivel de licenciatura. El electromagnetismo es uno de los temas fundamentales de cualquier plan de estudios de ingeniería electrónica. El conocimiento de las leyes que rigen los campos eléctricos y magnéticos es indispensable para comprender los principios de funcionamiento de las máquinas y los instrumentos eléctricos y magnéticos; y para explicar los fenómenos de acción a distancia y los sistemas electromagnéticos es indispensable dominar la teoría básica de las ondas electromagnéticas.

Puesto que las variables electromagnéticas son funciones de coordenadas espaciales tridimensionales y del tiempo, el tema es más complicado que la teoría de circuitos eléctricos, por lo cual el tratamiento adecuado requiere una secuencia de dos cursos semestrales o tres trimestrales. Sin embargo, algunos planes de estudio de ingeniería eléctrica no asignan tanto tiempo al electromagnetismo. El propósito de este libro es satisfacer la demanda de un libro de texto que no sólo presente los fundamentos del electromagnetismo en forma concisa y lógica, sino que también incluya importantes temas de aplicaciones en ingeniería, como motores eléctricos, líneas de transmisión, guías de onda, antenas, sistemas de antenas y sistemas de radar.

Considero que una de las dificultades básicas de los estudiantes en el aprendizaje del electromagnetismo es que no pueden comprender el concepto de un modelo electromagnético. El enfoque inductivo tradicional de comenzar con leyes experimentales y luego sintetizarlas gradualmente como las ecuaciones de Maxwell tiende a ser fragmentado y poco coherente; además parece que las operaciones de gradiente, divergencia y rotacional se introducen en forma arbitraria y en el momento que interesan. Por otra parte, la otra postura extrema de empezar usando como postulados fundamentales el conjunto de ecuaciones de Maxwell, cuya complejidad es considerable, tiende a ocasionar preocupación y rechazo en los estudiantes. No se contempla la necesidad y suficiencia de estas ecuaciones generales y el concepto del modelo electromagnético no queda bien definido.

En este libro se construye el modelo electromagnético usando un *enfoque axiomático por pasos*[†], primero para los campos eléctricos estáticos, luego para los campos magnéticos estáticos y finalmente para los campos variables en el tiempo que nos llevan a las ecuaciones de Maxwell. La base matemática para cada uno de los pasos es el teorema de Helmholtz, el cual establece que un campo vectorial está determinado aparte de una constante aditiva si tanto su divergencia como su rotación están especificados en todas partes. Una justificación física de este teorema puede basarse en el hecho de que la divergencia de un campo vectorial es una medida de la intensidad de su fuente de flujo y la rotación del campo es una medida de la intensidad de su fuente de vórtice. El campo vectorial estará entonces determinado si se especifican las intensidades de las fuentes de flujo y vórtice.

Para el desarrollo del modelo electrostático en el espacio libre sólo hay que definir un vector (la intensidad de campo eléctrico **E**) especificando como postulados su divergencia y su rotacional. Las demás relaciones electrostáticas en el espacio libre, incluyendo las leyes de Coulomb y de Gauss, pueden derivarse de estos dos postulados relativamente sencillos. Las relaciones en medios materiales pueden desarrollarse por medio del concepto de las distribuciones de cargas equivalentes de dieléctricos polarizados.

De forma similar, para el modelo magnetostático en el espacio libre sólo hay que definir un vector de densidad de flujo magnético **B**, especificando como postulados su divergencia y su rotacional; las demás fórmulas se derivan de estos dos postulados. Las relaciones en los medios materiales pueden desarrollarse a través del concepto de densidades de corriente equivalentes. Por supuesto, la validez de los postulados reside en su capacidad para producir resultados que concuerden con la evidencia experimental.

En el caso de campos variables con el tiempo se acoplan las intensidades de campos magnético y eléctrico. Es necesario modificar el postulado del rotacional de **E** del modelo electrostático para que esté de acuerdo con la ley de Faraday. Así mismo, hay que modificar el postulado del rotacional de **B** del modelo magnetostático para que sea consistente con la ecuación de continuidad. Tenemos así las cuatro ecuaciones de Maxwell que constituyen el modelo electromagnético. Creo que este desarrollo gradual del modelo electromagnético, basado en el teorema de Helmholtz, es novedoso, sistemático, pedagógicamente sólido y más fácil de aceptar por parte de los estudiantes.

En el breve capítulo 1 del libro se brinda un poco de motivación para el estudio del electromagnetismo. Allí también se presentan las funciones fuente, las cantidades fundamentales del campo y las tres constantes universales en el espacio libre para el modelo electromagnético. En el capítulo 2 se repasan los conceptos básicos del álgebra vectorial, el cálculo vectorial y las relaciones entre los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. En el capítulo 3 se desarrollan las leyes y los métodos de resolución de problemas electrostáticos. El capítulo 4 trata los campos debidos

[†] D. K. Cheng, "An alternative approach for developing introductory electromagnetics", *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, págs. 11-13, febrero de 1983.

a corriente eléctrica constante y los cálculos de resistencia. En el capítulo 5 se estudian los campos magnéticos estáticos. El capítulo 6, sobre los campos electromagnéticos variables con el tiempo, comienza con la ley de Faraday de la inducción electromagnética y continúa con las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de onda. Las características de las ondas electromagnéticas planas son el tema del capítulo 7. En el capítulo 8 se estudian la teoría y las aplicaciones de las líneas de transmisión. En los capítulos 9 (guías de ondas y cavidades resonantes) y 10 (antenas, sistemas de antenas y sistemas de radar) se presentan otras aplicaciones en ingeniería de los campos y ondas electromagnéticos. Gran parte de este material ha sido adaptado y abreviado de mi libro más extenso, *Field and Wave Electromagnetics*[†], pero en esta obra he incorporado varias características pedagógicas innovadoras.

Cada capítulo de este libro se inicia con una sección de descripción general que proporciona una guía cualitativa para los temas que se analizarán en el capítulo. En todo el libro se presentan ejemplos resueltos después de fórmulas importantes y relaciones cuantitativas con objeto de ilustrar métodos para resolver problemas genéricos. Donde resulta apropiado se incluyen ejercicios simples con respuestas para probar la habilidad de los estudiantes en el manejo de situaciones similares. Después de varias secciones relacionadas se insertan, a intervalos irregulares, grupos de preguntas de repaso, cuyo propósito es proporcionar una realimentación inmediata de los temas que se acaban de analizar y reforzar en los estudiantes el conocimiento cualitativo de la materia. Así mismo, después de las preguntas de repaso se incluyen varios comentarios pertinentes. Estos comentarios contienen puntos de importancia especial que quizá hayan pasado por alto los estudiantes. Al presentar definiciones, relaciones o conceptos nuevos se agregan breves comentarios al margen para destacar su importancia. Al final de cada capítulo aparece un resumen con una lista de puntos que condensan los temas principales del capitulo. Espero que estas ayudas pedagógicas sean útiles para que los estudiantes aprendan electromagnetismo y sus aplicaciones.

En la publicación de un libro como éste participan, además del autor, muchas personas dedicadas. Deseo agradecer el interés y el apoyo de la editora Eileen Bernadette Moran y el editor ejecutivo Don Fowley desde que se inició el proyecto. También quiero expresar mi agradecimiento a la supervisora de producción Helen Wythe por su amistosa ayuda para mantener la producción dentro de los tiempos establecidos, así como a Roberta Lewis, Amy Willcutt, Laura Michaels y Alena Konecny por sus contribuciones. Jim y Rosa Sullivan, de Tech-Graphics, se encargaron de las ilustraciones. Aprecio su excelente trabajo. Ante todo, quiero dar las gracias a mi esposa, Enid, por su paciencia, comprensión y aliento en todas las fases de la desafiante tarea de completar este libro.

D.K.C.

[†] D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, 2da. ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.

Nota introductoria para el estudiante

Este libro es su guía en un viaje hacia el aprendizaje del electromagnetismo para ingeniería. Es probable que surjan dos preguntas: ¿Qué es el electromagnetismo y por qué es importante? Una respuesta breve a la primera pregunta es que el electromagnetismo es el estudio de los efectos de las cargas eléctricas en reposo o en movimiento. Es importante porque la teoría electromagnética es indispensable para explicar los fenómenos electromagnéticos y comprender el principio de funcionamiento y las características de los dispositivos eléctricos, magnéticos y electromagnéticos usados en ingeniería. La sociedad contemporánea depende mucho de dispositivos y sistemas electromagnéticos. Piense, por ejemplo, en los hornos de microondas, los osciloscopios de rayos catódicos, la radio, la televisión, el radar, la comunicación vía satélite, los sistemas de aterrizaje automático por instrumentos y la conversión de energía electromagnética (motores y generadores).

Los principios básicos del electromagnetismo se conocen desde hace más de 150 años. Para estudiar de manera organizada y lógica un tema científico tan maduro es necesario establecer un modelo teórico válido, que normalmente consiste en unas cantidades básicas y en algunos postulados fundamentales (hipótesis o axiomas). Después se desarrollan otras relaciones y consecuencias a partir de estos postulados. Por ejemplo, el estudio de la mecánica clásica se basa en un modelo teórico que define las cantidades masa, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento y energía. Los postulados fundamentales del modelo son las leyes de movimiento de Newton, la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía. Estos postulados no pueden desarrollarse a partir de otros teoremas, pero a partir de estos postulados pueden desarrollarse las demás fórmulas y relaciones de la mecánica no relativista (situaciones donde la velocidad de movimiento es insignificante en comparación con la velocidad de la luz).

De forma similar, para nuestro estudio del electromagnetismo es necesario establecer primero un modelo electromagnético. En el capítulo 1 de este libro se definen las cantidades básicas de nuestro modelo electromagnético. Los postulados fundamentales se presentan en pasos graduales conforme se van necesitando cuando se tratan en distintos capítulos los campos eléctricos estáticos, los campos magnéticos estáticos y los campos variables con el tiempo. Después se obtienen varios teoremas y otros resultados a partir de estos postulados. Las aplicaciones en ingeniería de los principios y métodos desarrollados en el texto se exploran con mayor detalle en los capítulos finales.

Para que podamos expresar nuestros postulados y obtener resultados útiles en forma sucinta, es necesario contar con las herramientas matemáticas apropiadas. En el electromagnetismo aparecen con frecuencia los vectores –cantidades que tienen magnitud y dirección–, por lo que debemos poseer buenos conocimientos de álgebra y cálculo vectorial. Estos temas se tratan en el capítulo 2 sobre análisis vectorial. No sólo debemos adquirir un recurso para manipular vectores, sino además comprender el significado físico de las diversas operaciones que comprenden vectores. Una deficiencia en el análisis vectorial al estudiar electromagnetismo es similar a una deficiencia en el álgebra y cálculo al estudiar física. Para obtener resultados fructíferos es necesario dominar el uso de estas herramientas matemáticas.

Es muy probable que ya haya estudiado la teoría de circuitos, la cual tiene que ver con los sistemas de parámetros concentrados formados por componentes que se caracterizan por parámetros concentrados, como resistencias, inductancias y capacitancias. Los voltajes y las corrientes son las principales variables de sistema. En el caso de los circuitos de corriente continua, las variables del sistema son constantes y las ecuaciones que las rigen son ecuaciones algebraicas. Las variables de sistema en circuitos de corriente alterna dependen del tiempo; son cantidades escalares e independientes de las coordenadas espaciales. Las ecuaciones determinantes son ecuaciones diferenciales ordinarias. Por otra parte, la mayoría de las variables electromagnéticas son funciones del tiempo y de las coordenadas espaciales. Muchas son vectores. Incluso en los casos estáticos, las ecuaciones determinantes normalmente son ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, las ecuaciones diferenciales parciales pueden dividirse en ecuaciones diferenciales ordinarias, que ya ha visto en sus cursos de física y análisis de sistemas lineales. En aquellas situaciones simples donde existen simetrías, las ecuaciones diferenciales parciales se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias. La separación de la dependencia temporal y espacial se logra con el uso de fasores.

Dado que en el electromagnetismo es necesario definir más cantidades y usar más manipulaciones matemáticas, es probable que inicialmente tenga la impresión de que la teoría electromagnética es abstracta. De hecho, la teoría electromagnética no es más abstracta que la teoría de circuitos, en el sentido de que la validez de ambas puede verificarse con resultados medidos experimentalmente: simplemente hay que trabajar más para desarrollar una teoría completa y lógica que pueda explicar una variedad de

fenómenos más amplia. El reto de la teoría electromagnética no es lo abstracto del tema, sino el proceso de dominar el modelo electromagnético y las reglas de funcionamiento asociadas.

Usted encontrará que cada capítulo del libro comienza con una sección DESCRIPCIÓN GENERAL, donde se presentan los temas que serán analizados en el capítulo. Al ir presentando definiciones, relaciones y conceptos nuevos, se incluyen breves notas al margen para llamar su atención. Al final de algunas secciones relacionadas hay, a intervalos irregulares, PREGUNTAS DE REPASO que sirven para darle una realimentación inmediata sobre los temas que se acaban de analizar y para reforzar su comprensión cualitativa de la materia. Deberá ser capaz de responder a estas preguntas con confianza; de no ser así, regrese a las secciones y aclare sus dudas. Después de las preguntas de repaso normalmente aparece un recuadro de COMENTARIOS, que contiene puntos de importancia especial que quizá haya pasado por alto pero que deberá comprender y recordar. Al final de cada capítulo hay una sección de RESUMEN donde se listan los resultados más importantes del capítulo. Su función es destacar la importancia de estos resultados sin repetir las fórmulas matemáticas.

Los términos nuevos y los enunciados importantes que van surgiendo en el libro se presentan en ***negritas cursivas***; además, las fórmulas principales se presentan en recuadros. Se proporcionan ejemplos desarrollados para ilustrar los métodos de resolución de problemas típicos. Donde resulta apropiado se incluyen ejercicios sencillos con respuestas. Deberá realizar los ejercicios cuando aparezcan, para que pueda comprobar si domina las habilidades cuantitativas básicas que se acaban de presentar. Los problemas al final de los capítulos sirven para ampliar lo que ha aprendido en el capítulo y probar su habilidad en el manejo de situaciones nuevas. Las respuestas a los problemas con números impares, presentadas al final del libro, permiten que revise sus resultados y confirme su avance.

El aprendizaje del electromagnetismo es un viaje intelectual; este libro le servirá como guía, pero usted debe aportar su dedicación y su perseverancia. Esperamos que su exploración del territorio del electromagnetismo para ingeniería sea una experiencia estimulante y gratificante.

El autor.

El aprendizaje no se logra por casualidad;
debe buscarse con pasión y atenderse con esmero.

—Abigail Adams
(en una carta a John Quincy Adams, 1780)

Índice general

CAPÍTULO 3 CAMPOS ELÉCTRICOS ESTÁTICOS *72*

CAPÍTULO 4 CORRIENTES ELÉCTRICAS ESTACIONARIAS *150*

CAPÍTULO 5 CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS *170*

CAPÍTULO 6 CAMPOS VARIABLES CON EL TIEMPO Y ECUACIONES DE MAXWELL *228*

CAPÍTULO 7 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS 272

CAPÍTULO 8 LÍNEAS DE TRANSMISIÓN 336

CAPÍTULO 9 **GUÍAS DE ONDAS Y CAVIDADES RESONANTES** *386*

CAPÍTULO 10 **ANTENAS Y SISTEMAS DE ANTENAS** *426*

APÉNDICES **A SÍMBOLOS Y UNIDADES**

B ALGUNAS CONSTANTES MATERIALES ÚTILES

C

BIBLIOGRAFÍA

RESPUESTAS A PROBLEMAS CON NÚMERO IMPAR

ÍNDICE DE MATERIAS

CAPÍTULO 1

Definición del electromagnetismo

1-1 DESCRIPCIÓN GENERAL

El electromagnetismo es el estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos causados por cargas eléctricas en reposo o en movimiento. La existencia de cargas eléctricas fue descubierta hace más de 2500 años por el astrónomo y filósofo griego Tales de Mileto, quien observó que una vara de ámbar, después de ser frotada con seda o lana, atraía paja y pequeños pedazos de tela. Atribuyó esta propiedad misteriosa a la vara de ámbar. La palabra griega que significa ámbar es *elektron*, de la cual se derivaron las palabras *electrón, electrónica electricidad,* etcétera.

Dos tipos de cargas: positivas y negativas

A partir de la física elemental sabemos que hay dos tipos de cargas, positivas y negativas. Ambos tipos de carga son fuentes de un campo eléctrico. Las cargas en movimiento producen una corriente, la cual origina un campo magnético. Aquí hablamos provisionalmente de un campo eléctrico y un campo magnético de manera general; después presentaremos un significado más definitivo de ambos términos. Un ***campo*** es la distribución espacial de una cantidad, la cual puede o no ser función del tiempo. Un campo eléctrico variable con el tiempo está acompañado por un campo magnético, y viceversa. En otras palabras, los campos eléctricos y magnéticos variables con el tiempo están acoplados, produciendo un campo electromagnético. En determinadas condiciones, los campos electromagnéticos variables con el tiempo producen ondas que radian de la fuente.

Campo: distribución espacial de una [illegible]

El concepto de los campos y las ondas es esencial en la explicación de la acción a distancia. Por ejemplo, en la mecánica elemental aprendimos que las masas se atraen. Es por esto que los objetos caen a la superficie de la Tierra. Sin embargo, puesto que no hay hilos elásticos que conecten la Tierra con un objeto en caída libre, ¿cómo se explica este fenómeno? El fenómeno de acción a distancia se explica postulando

Los campos y las ondas ayudan a explicar la acción a distancia

El modelo electromagnético

la existencia de un campo gravitacional. De forma similar, la comunicación por satélite y la recepción de señales desde una sonda espacial a millones de kilometros de distancia sólo puede explicarse postulando la existencia de campos eléctricos y magnéticos y ondas electromagnéticas. En este libro, *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*, estudiaremos las leyes fundamentales del electromagnetismo y algunas de sus aplicaciones en ingeniería.

La teoría de circuitos no puede explicar la comunicación con teléfonos móviles.

La necesidad de los conceptos de los campos electromagnéticos puede ilustrarse con un sencillo ejemplo. En la figura 1-1 se muestra un teléfono móvil conectado a una antena. Al transmitir, una fuente en la base alimenta a la antena con una corriente portadora del mensaje, usando una frecuencia portadora apropiada. Desde la perspectiva de la teoría de circuitos, la fuente alimenta un circuito abierto, ya que la punta superior de la antena no está conectada a ningún objeto físico; por consiguiente, la corriente no podría circular y no sucedería nada. Por supuesto, esta perspectiva no puede explicar por qué se establece la conexión entre unidades telefónicas móviles. Para esto hay que usar los conceptos del electromagnetismo En el capítulo 10 veremos que cuando la longitud de la antena es una parte apreciable de la longitud de onda de la portadora, circulará una corriente no uniforme por la antena con extremo abierto. Esta corriente radia un campo electromagnético en el espacio, variable con el tiempo, que se propaga como onda electromagnética e induce corrientes en otras antenas a distancia. El mensaje se detecta después en la unidad receptora.

Construcción de un modelo

En este primer capítulo comenzaremos la tarea de construir un modelo electromagnético, a partir del cual desarrollaremos el tema del electromagnetismo para ingeniería.

FIGURA 1-1 Teléfono móvil.

1-2 EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO

Enfoques inductivo y deductivo

Hay dos enfoques para el desarrollo de un tema científico: el enfoque inductivo y el deductivo. En el enfoque inductivo se sigue el desarrollo histórico del tema, comenzando por la observación de experimentos sencillos y derivando de ellos leyes y teoremas. Es un proceso de razonamiento que parte de fenómenos particulares para llegar a principios generales. Por otra parte, en el enfoque deductivo se postulan algunas relaciones fundamentales para un modelo idealizado. Las relaciones postuladas son axiomas de los cuales se pueden derivar leyes y teoremas específicos. La validez del modelo y los axiomas se verifica con su capacidad para predecir consecuencias que puedan comprobarse con observaciones experimentales. En este libro hemos preferido usar el enfoque deductivo o axiomático porque es más conciso y permite desarrollar el tema del electromagnetismo de forma ordenada.

En la construcción de una teoría basada en un modelo idealizado hay tres pasos esenciales.

Pasos para desarrollar una teoría a partir de un modelo idealizado

PASO 1 Definir algunas cantidades básicas aplicables al tema de estudio.

PASO 2 Especificar las reglas de operación (las matemáticas) de estas cantidades.

PASO 3 Postular algunas relaciones fundamentales. (Estos postulados o leyes por lo general se basan en numerosas observaciones experimentales realizadas en condiciones controladas y sintetizadas por mentes muy brillantes.)

El modelo de circuito

Un ejemplo familiar es la teoría de circuitos, basada en un *modelo de circuito* formado por fuentes ideales y resistencias, inductancias y capacitancias puras. Las cantidades básicas en este caso son voltajes (V), corrientes (I), resistencias (R), inductancias (L) y capacitancias (C); las reglas de las operaciones son las del álgebra, las ecuaciones diferenciales ordinarias y la transformación de Laplace; y los postulados fundamentales son las leyes del voltaje y de la corriente de Kirchhoff. A partir de este modelo bastante sencillo podemos derivar varias relaciones y fórmulas y determinar las

respuestas de redes bastante complejas. La validez y el valor del modelo se han demostrado ampliamente.

Los tres pasos para desarrollar una teoría electromagnética a partir de un modelo electromagnético

Es posible construir una teoría electromagnética de forma similar, con base en un modelo electromagnético apropiado. En esta sección daremos el primer paso para definir las cantidades básicas del electromagnetismo. El segundo paso, las reglas de operación, abarca el álgebra vectorial, el cálculo vectorial y las ecuaciones diferenciales parciales. Los fundamentos del álgebra y el cálculo vectorial se analizarán en el capítulo 2 (Análisis vectorial), y las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales se presentarán cuando aparezcan estas ecuaciones en el libro. El tercer paso, los postulados fundamentales, se presentará en tres subetapas cuando veamos los campos eléctricos estáticos, los campos magnéticos estáticos y los campos electromagnéticos, respectivamente.

Cantidades [redacted] del modelo electromagnético: cantidades de fuente y cantidades de campo

Las cantidades de nuestro modelo electromagnético pueden dividirse en dos categorías generales: cantidades de fuente y cantidades de campo. La fuente de un campo electromagnético siempre consiste en cargas eléctricas en reposo o en movimiento. Sin embargo, un campo electromagnético puede ocasionar una redistribución de las cargas, lo cual a su vez modificará el campo; por esto no siempre es muy clara la separación entre la causa y el efecto.

Cargas eléctricas

Usaremos el símbolo q (en ocasiones Q) para denotar la ***carga eléctrica***. La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia y únicamente existe en múltiplos enteros positivos o negativos de la carga de un electrón, $-e$.

$$\boxed{e = 1.60 \times 10^{-19} \qquad \text{(C)},} \tag{1-1}$$

Unidad de carga: coulomb (C)

donde C es la abreviatura de la unidad de carga, el coulomb.† Se llama así en honor del físico francés Charles A. de Coulomb, quien formuló la ley de Coulomb en 1785 (analizaremos la ley de Coulomb en el capítulo 3). Un coulomb es una unidad muy grande para la carga eléctrica, pues se requieren $1/(1.60 \times 10^{-19}) = 6.25$ millones de billones de electrones para formar -1(C). Es más, dos cargas de 1C a un metro de distancia ejercerán entre sí una fuerza de aproximadamente un millón de toneladas. En el apéndice B-2 se listan otras constantes físicas del electrón.

El principio de la ***conservación de la carga eléctrica***, como el principio de conservación de la energía, es un postulado fundamental o ley de la física. Establece que la carga eléctrica se conserva; es decir, no se crea ni se destruye. Es una ley de la naturaleza y no puede derivarse de otros principios o relaciones.

Las cargas eléctricas pueden moverse de un lugar a otro y redistribuirse bajo la influencia de un campo electromagnético, pero la suma algebraica de las cargas negativas

† Analizaremos el sistema de unidades en la sección 1-3

La conservación de la carga eléctrica es un postulado fundamental de la física.

y positivas en un sistema cerrado (aislado) no cambia. ***El principio de conservación de la carga eléctrica debe satisfacerse en todo momento y en todas las circunstancias.*** Cualquier formulación o solución de un problema electromagnético que viole el principio de la conservación de la carga eléctrica *siempre* será incorrecta

Aunque en el sentido microscópico la carga eléctrica existe o no existe en un punto de manera discreta, estas variaciones abruptas a escala atómica no tienen importancia al considerar el efecto electromagnético de grandes conjuntos de cargas. Al construir una teoría electromagnética macroscópica o a gran escala, encontramos que se obtienen resultados muy buenos al usar la densidad media alisada. (Este mismo enfoque se emplea en la mecánica, donde se define un función de densidad alisada de masa a pesar de que la masa se relaciona únicamente con partículas elementales de una forma discreta a escala atómica.) Definimos una ***densidad volumétrica de carga***, ρ_v, como una cantidad fuente, de la siguiente manera:

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \qquad (\text{C/m}^3), \tag{1-2}$$

Densidades voumétrica, superficial y lineal de carga: densidades medias en el sentido macroscópico

donde Δq es la cantidad de carga en un volumen muy pequeño Δv. ¿Cuán pequeño debe ser Δv? Debe ser lo suficientemente pequeño para representar una variación precisa de ρ_v, pero lo suficientemente grande como para contener gran número de cargas discretas. Por ejemplo, un cubo elemental con lados tan pequeños como 1 micra (10^{-6} m o 1μm) tiene un volumen de 10^{-18}(m^3), el cual contiene unos 10^{11} (100 000 millones) átomos. Es de esperar que una función alisada de las coordenadas espaciales, ρ_v, definida con una Δv tan pequeña, produzca resultados macroscópicos precisos para casi todos los fines prácticos.

En algunas situaciones físicas podemos identificar una cantidad de carga Δq con un elemento de superficie Δs o un elemento de línea $\Delta \ell$. En estos casos será más apropiado definir una ***densidad superficial de carga***, ρ_s, o una ***densidad lineal de carga***, ρ_ℓ:

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \qquad (\text{C/m}^2), \tag{1-3}$$

$$\rho_\ell = \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} \qquad (\text{C/m}). \tag{1-4}$$

Las densidades de carga son funciones puntuales.

Excepto en algunas situaciones espèciales, las densidades de carga varían de un punto a otro; por consiguiente, ρ_v, ρ_s y ρ_ℓ son, en términos generales, *funciones puntuales* de las coordenadas espaciales.

La corriente es la razón de cambio de la carga con respecto al tiempo, es decir,

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (\text{C/s o A}), \tag{1-5}$$

donde la propia I también puede depender del tiempo. La unidad de corriente es el coulomb por segundo (C/s), lo cual equivale a un ampere (A). Una corriente debe fluir

La corriente no es una función puntual, pero sí la densidad de [redacted]

a través de un área finita (por ejemplo, un alambre conductor con área transversal finita), por lo tanto, no se trata de una función puntual. En el electromagnetismo se define una función puntual vectorial ***densidad de corriente***, **J**, que mide la cantidad de corriente que fluye por un área unidad normal a la dirección del flujo de la corriente. La letra en negritas **J** es un vector cuya magnitud es la corriente por unidad de área (A/m^2) y su dirección es la del flujo de corriente.

Las cuatro [redacted] fundamentales del campo electromagnético: E, B, D, H

En el electromagnetismo hay cuatro cantidades de campo *vectoriales* fundamentales: ***intensidad de campo eléctrico*** **E**, ***densidad de flujo eléctrico*** (o ***desplazamiento eléctrico***) **D**, ***densidad de flujo magnético*** **B** e ***intensidad de campo magnético*** **H**. Explicaremos con detalle la definición y la importancia física de estas cantidades cuando se presenten más adelante. Por el momento sólo queremos establecer lo siguiente: la intensidad de campo eléctrico **E** es el único vector necesario al analizar la electrostática (los efectos de cargas eléctricas estacionarias) en el espacio libre; se define como la fuerza eléctrica por unidad de carga de prueba. El vector de desplazamiento eléctrico **D** es útil en el estudio de campos eléctricos en medios materiales, como veremos en el capítulo 3. De forma parecida, la densidad de flujo magnético **B** es el único vector necesario al analizar la magnetostática (los efectos de corrientes eléctricas estacionarias) en el espacio libre, y se relaciona con la fuerza magnética que actúa sobre una carga que se mueve con determinada velocidad. El vector de intensidad de campo magnético **H** es útil en el estudio de campos magnéticos en medios materiales. En el capítulo 5 veremos la definición y la importancia de **B** y **H**.

En la tabla 1-1 se presentan las cuatro cantidades fundamentales del campo electromagnético, así como sus unidades. En la tabla 1-1, V/m es volt por metro y T representa un tesla o volt-segundo por metro cuadrado. Si no hay variación temporal (como en los casos estáticos o estacionarios), las cantidades de campo eléctrico **E** y **D** y las cantidades de campo magnético **B** y **H** forman dos pares vectoriales separados. Sin embargo, en los casos dependientes del tiempo, las cantidades de campos eléctricos

TABLA **1-1** CANTIDADES FUNDAMENTALES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Símbolos y unidades para las cantidades del campo	Cantidad de campo	Símbolo	Unidad
Eléctrico	Intensidad de campo eléctrico	**E**	V/m
	Densidad de flujo eléctrico (desplazamiento eléctrico)	**D**	C/m^2
Magnético	Densidad de flujo magnético	**B**	T
	Intensidad de campo magnético	**H**	A/m

y magnéticos están acopladas; es decir, si **E** y **D** son variables con el tiempo producirán **B** y **H**, y viceversa. Las cuatro cantidades son funciones puntuales. Las propiedades de los materiales (o medios) determinan las relaciones entre **E** y **D** y entre **B** y **H**. Estas relaciones se denominan ***relaciones constitutivas*** de un medio y las veremos más adelante.

El objetivo principal del estudio del electromagnetismo es comprender la interacción entre cargas y corrientes a distancia, con base en el modelo electromagnético. Los campos y las ondas (campos dependientes del tiempo y del espacio) son las cantidades conceptuales básicas de este modelo. Los postulados fundamentales, que enunciaremos en capítulos subsecuentes, relacionarán **E**, **D**, **B**, **H** y las cantidades fuente; además, las relaciones derivadas nos llevarán a la explicación y la predicción de los fenómenos electromagnéticos.

1-3 UNIDADES EN EL SI Y CONSTANTES UNIVERSALES

La medición de una cantidad física debe expresarse como un número seguido por una unidad. De esta manera podemos hablar de una longitud de tres metros, una masa de dos kilogramos y un periodo temporal de diez segundos. Para que un sistema de unidades sea útil, debe basarse en unidades fundamentales de tamaño conveniente (práctico). Todas las cantidades en la mecánica pueden expresarse en términos de tres unidades básicas (de longitud, masa y tiempo). En el electromagnetismo se requiere una cuarta unidad básica (de corriente). El ***SI (Sistema internacional de unidades)*** es un ***sistema MKSA*** elaborado a partir de las cuatro unidades fundamentales listadas en la tabla 1-2. Todas las otras unidades usadas en el electromagnetismo, incluyendo las que aparecen en la tabla 1-1, son unidades derivadas que se expresan en función de *metros, kilogramos, segundos* y *amperes*. Por ejemplo, la unidad de carga, coulomb (C), es ampere-segundo (A · s); la unidad de intensidad de campo eléctrico (V/m) es kg · m/A · s^3; la unidad de densidad de flujo magnético, tesla (T), es kg/A · s^2. En el apéndice A se presentan tablas más completas de las unidades de diversas cantidades.

Unidades del SI o MKSA

En nuestro modelo electromagnético hay tres constantes universales, además de las cantidades de campo de la tabla 1-1. Estas constantes se relacionan con las propiedades

TABLA 1-2 UNIDADES DEL SI FUNDAMENTALES

Cantidad	Unidad	Abreviatura
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente	ampere	A

Tres constantes universales del modelo electromagnético

del espacio libre (vacío) y son: ***velocidad de la onda electromagnética*** (incluyendo la luz) en el espacio libre, c; ***permitividad*** del espacio libre, ϵ_0, y ***permeabilidad*** del espacio libre, μ_0. Se han realizado muchos experimentos para medir con precisión la velocidad de la luz, hasta varias cifras decimales. Para nuestros fines basta recordar que

$$\boxed{c \simeq 3 \times 10^8 \qquad \text{(m/s)}.} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{1-6}$$

Las otras dos constantes, ϵ_0 y μ_0, se relacionan con los fenómenos eléctricos y magnéticos, respectivamente: ϵ_0 es la constante de proporcionalidad entre la densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D}$ y la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el espacio libre, de manera que

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E};} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{1-7}$$

μ_0 es la constante de proporcionalidad entre la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ y la intensidad de campo magnético $\mathbf{H}$ en el espacio libre, de manera que

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}.} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{1-8}$$

Los valores de ϵ_0 y μ_0 se determinan de acuerdo con el sistema de unidades elegido y no son independientes. En el ***sistema SI***, adoptado de manera casi universal para el trabajo electromagnetico, se elige la permeabilidad del espacio libre como

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \qquad \text{(H/m)},} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{1-9}$$

donde H/m representa henry por metro. Con los valores de c y μ_0 establecidos en las ecuaciones (1-6) y (1-9), el valor de la permitividad del espacio libre se obtiene de las siguientes relaciones:

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \qquad \text{(m/s)},} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{1-10}$$

o sea

$$\boxed{\begin{aligned}\epsilon_0 &= \frac{1}{c^2\mu_0} \cong \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \\ &\simeq 8.854 \times 10^{-12} \qquad \text{(F/m)},\end{aligned}} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{1-11}$$

TABLA 1-3 CONSTANTES UNIVERSALES EN UNIDADES DEL SI

Constantes universales	Símbolo	Valor	Unidad
Velocidad de la luz en el espacio libre	c	3×10^8	m/s
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$	F/m

donde F/m es la abreviatura de farad por metro. En la tabla 1-3 se resumen las tres constantes universales y sus valores.

Ahora que hemos definido las cantidades básicas y las constantes universales del modelo electromagnético, podemos desarrollar los temas del electromagnetismo. Sin embargo, antes de hacerlo, debemos contar con las herramientas matemáticas apropiadas. En el capítulo que sigue analizaremos las reglas de operación básicas del álgebra y el cálculo vectoriales.

RESUMEN

En este capítulo se sentaron las bases para nuestro estudio del electromagnetismo para ingeniería. Adoptamos un enfoque deductivo o axiomático y construimos un modelo electromagnético. Se definieron las cantidades fuente básicas (carga, densidad de carga, densidad de corriente) y las cantidades de campo (**E**, **D**, **B**, **H**); se especificó el sistema de unidades (SI) y se indicaron las tres constantes universales del espacio libre (μ_0, c, ϵ_0). Con base en este esquema podemos desarrollar los diversos temas presentando los postulados fundamentales en los capítulos sucesivos, lo haremos gradualmente, pero antes necesitamos estar familiarizados con las matemáticas que usaremos para relacionar las distintas cantidades. Es indispensable un conocimiento sólido del análisis vectorial y por ello se presenta en el capítulo 2 el material necesario sobre álgebra vectorial y cálculo vectorial.

PREGUNTAS DE REPASO

P.1-1 ¿Qué es el electromagnetismo?

P.1-2 Describa dos fenómenos o situaciones, aparte del teléfono móvil de la figura 1-1, que no puedan explicarse adecuadamente con la teoría de circuitos.

P.1-3 ¿Cuáles son los tres pasos esenciales para elaborar un modelo idealizado para el estudio de un tema científico?

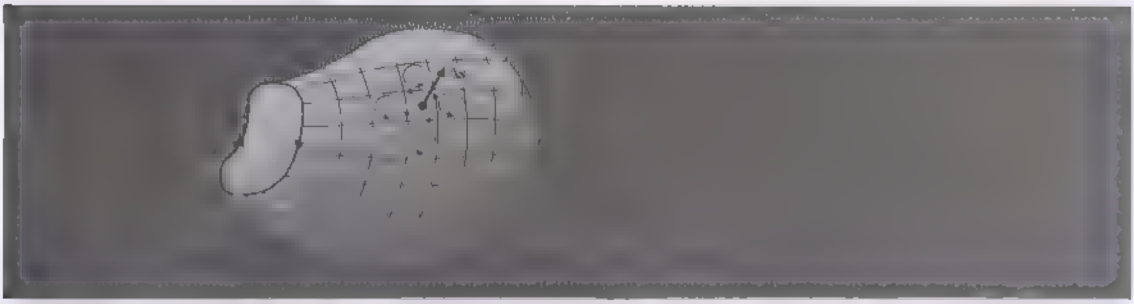
P.1-4 ¿Cuáles son las cantidades fuente del modelo electromagnético?

P.1-5 ¿Qué significa una *función puntual*? ¿La densidad de carga es una función puntal? ¿La corriente es una función puntual?

P.1-6 ¿Cuáles son las cuatro unidades SI fundamentales del electromagnetismo?

P.1-7 ¿Cuáles son las cuatro unidades de campo fundamentales del modelo electromagnético? ¿Cuáles son sus unidades?

P.1-8 ¿Cuáles son las tres constantes universales del modelo electromagnético y cuales son sus relaciones?



CAPÍTULO 2

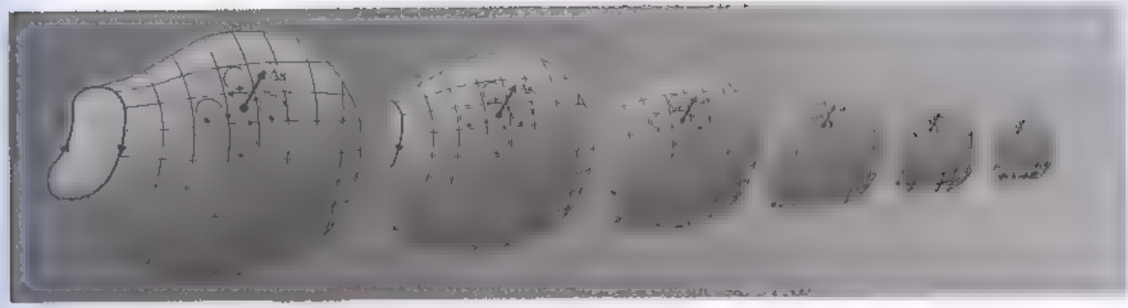
Escalar

Vector

Independencia del sistema de coordenadas

2-1 DESCRIPCIÓN GENERAL Algunas de las cantidades de nuestro modelo electromagnético (como la carga, la corriente y la energía) son escalares, otras (como las intensidades de campos magnético y eléctrico) son vectores. Tanto los escalares como los vectores pueden ser funciones del tiempo y de la posición. En un instante y posición determinados, un ***escalar*** está totalmente definido por su magnitud (positiva o negativa, junto con su unidad). De esta manera podemos especificar, por ejemplo, una carga de $-1(\mu C)$ en cierta posición en $t = 0$ Por otra parte, la especificación de un ***vector*** en un instante y posición específicos requiere una magnitud y una dirección. ¿Cómo se especifica la dirección de un vector? En el espacio tridimensional se requieren tres números, los cuales dependen del sistema de coordenadas elegido.

Es importante señalar que las leyes y los teoremas físicos que relacionan diversas cantidades escalares y vectoriales deben ser válidos sin importar el sistema de coordenadas *Las expresiones generales de las leyes del electromagnetismo no requieren la especificación de un sistema de coordenadas* Se elige un sistema de coordenadas específico sólo cuando hay que analizar un problema con una determinada geometría Por ejemplo, si vamos a determinar el campo magnético en el centro de una espira de alambre que transporta corriente, es más conveniente emplear coordenadas rectangulares si la espira es rectangular o polares si la espira tiene forma circular. La relación electromagnética básica que rige la solución de este problema es la misma en ambas geometrías.



Análisis vectorial

Puesto que muchas cantidades electromagnéticas son vectores, debemos ser capaces de manejar (sumar, restar y multiplicar) estos vectores fácilmente Para expresar resultados específicos en un espacio tridimensional es necesario elegir un sistema de coordenadas apropiado. En este capítulo analizaremos los tres sistemas de coordenadas ortogonales más comunes: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Veremos cómo expresar un vector en sus componentes en estas coordenadas y cómo efectuar transformaciones de un sistema de coordenadas a otro.

Gracias a ciertos operadores diferenciales, podemos expresar los postulados fundamentales y otras fórmulas del electromagnetismo de manera sucinta y general. Analizaremos la importancia de las operaciones de gradiente, divergencia y rotacional y demostraremos los teoremas de la divergencia y de Stokes.

En este capítulo sobre análisis vectorial se abarcan tres temas principales.

1. Álgebra vectorial. suma, resta y multiplicación de vectores.
2. Sistemas de coordenadas ortogonales: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
3. Cálculo vectorial: diferenciación e integración de vectores; operaciones de gradiente, divergencia y rotacional.

También demostraremos dos identidades nulas importantes que implican repetidas aplicaciones de los operadores diferenciales.

2-2 SUMA Y RESTA DE VECTORES

Sabemos que un vector tiene una magnitud y una dirección. Un vector **A** puede escribirse como

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_A A, \tag{2-1}$$

donde A es la magnitud (y tiene la unidad y la dimensión) de **A**

$$A = |\mathbf{A}|, \tag{2-2}$$

que es un escalar. $\mathbf{a}_A$ es un vector sin dimensiones con magnitud unidad, especifica la dirección de **A**. Podemos hallar $\mathbf{a}_A$ a partir del vector **A** dividiéndolo por su magnitud.

Determinación del vector unitario a partir de un vector

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}. \tag{2-3}$$

El vector **A** puede representarse gráficamente como un segmento de línea recta dirigida de longitud $|\mathbf{A}| = A$, con la punta de la flecha apuntando en la dirección de $\mathbf{a}_A$, como se ilustra en la figura 2-1.

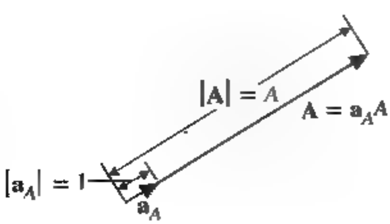
Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección, aunque puedan estar desplazados en el espacio. Puesto que es difícil escribir a mano letras en negritas, en la escritura es común usar una flecha o una barra sobre una letra ($\vec{A}$ o $\bar{A}$) o una línea sinuosa debajo de la letra ($\underset{\sim}{A}$) para distinguir un vector de un escalar. *Una vez elegida esta marca distintiva, no deberá omitirse nunca cuando se escriban vectores.*

Marcas distintivas de los vectores

Dos vectores **A** y **B** que no tengan la misma dirección y que no estén en direcciones opuestas, como los de la figura 2-2(a), determinan un plano. Su suma es otro vector **C** en el mismo plano. $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ puede obtenerse gráficamente de dos maneras:

1. Por la regla del paralelogramo: El vector **C** resultante es el vector diagonal del paralelogramo formado por **A** y **B** dibujados desde el mismo punto, como se ilustra en la figura 2-2(b).

FIGURA 2-1 Representación gráfica del vector **A**.



(a) Dos vectores, **A** y **B** (b) Regla del paralelogramo. (c) Regla cabeza-cola, **A** + **B**. (d) Regla cola-cabeza, **B** + **A**.

FIGURA 2-2 Suma de vectores, **C** = **A** + **B** = **B** + **A**.

2. Por la regla cabeza-cola: La cabeza de **A** se conecta con la cola de **B**. Su suma **C** es el vector dibujado de la cola de **A** a la cabeza de **B**; los vectores **A**, **B** y **C** forman un triángulo, como se muestra en la figura 2-2(c). En la figura 2-2(d) se ilustra gráficamente **C** = **A** + **B** = **B** + **A**.

La resta de vectores puede definirse en términos de la suma de vectores, de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}), \tag{2-4}$$

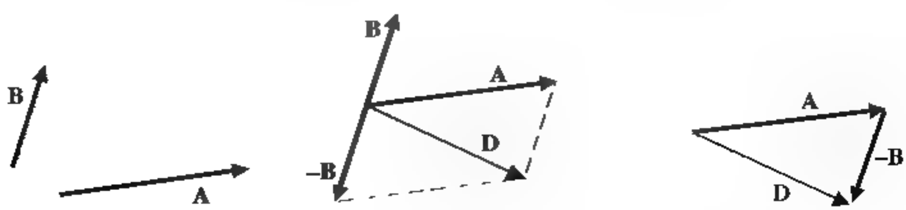
donde −**B** es el negativo del vector **B**. Esto se ilustra en la figura 2-3.

Nota: No tiene sentido sumar o restar un escalar a un vector ni sumar o restar un vector a un escalar.

■ **Ejercicio 2.1** Tres vectores, **A**, **B** y **C**, dibujados en forma cabeza-cola, forman los tres lados de un triángulo. ¿Cuánto es **A** + **B** + **C**? ¿Cuánto es **A** + **B** − **C**?

Respuesta: 0, −2**C**.

FIGURA 2-3 Resta de vectores, **D** = **A** − **B** = **A** + (−**B**).



(a) Dos vectores, **A** y **B**. (b) Regla del paralelogramo (c) Regla cabeza-cola

2-3 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

La multiplicación de un vector **A** por un escalar positivo k cambia la magnitud de **A** por k veces sin modificar su dirección (k puede ser mayor o menor que 1).

$$k\mathbf{A} = \mathbf{a}_A(kA). \tag{2-5}$$

No es posible decir simplemente "la multiplicación de un vector por otro" ni "el producto de dos vectores", ya que hay dos tipos muy diferentes de productos de dos vectores. Éstos son (1) el producto escalar o punto y (2) el producto vectorial o cruz. Definiremos estos productos en las subsecciones siguientes.

2-3.1 PRODUCTO PUNTO O ESCALAR

El producto escalar o punto de dos vectores **A** y **B** se denota **A** · **B** ("**A** punto **B**"). El resultado del producto punto de dos vectores es un escalar igual al producto de las magnitudes de **A** y **B** y el coseno del ángulo entre éstos. De esta manera,

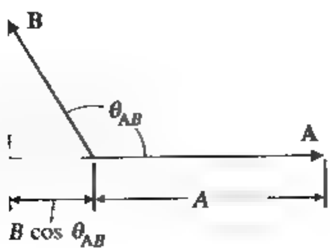
[redacted] producto punto o [redacted]

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \triangleq AB\cos\theta_{AB}.} \tag{2-6}$$

El símbolo $\triangleq$ en la ecuación (2-6) significa "igual por definición"; θ_{AB} es el ángulo *más pequeño* entre **A** y **B** y es menor que π radianes (180°), como se ilustra en la figura 2-4.

A partir de la definición de la ecuación (2-6) podemos ver que el producto punto de dos vectores: (1) es menor o igual que el producto de sus magnitudes; (2) puede ser una cantidad positiva o negativa, dependiendo de si el ángulo entre ellos es menor o mayor que $\pi/2$ radianes (90°); (3) es igual al producto de la magnitud de un vector y la proyección del otro vector sobre el primero; y (4) es cero cuando los vectores son perpendiculares entre sí.

FIGURA 2-4 **Ilustración del producto punto de A y B.**



A partir de la ecuación (2-6) podemos ver que

El producto punto es conmutativo.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}. \tag{2-7}$$

Por consiguiente, el orden de los vectores en el producto punto no tiene importancia (el producto punto es conmutativo). Así mismo,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 \tag{2-8}$$

o

Determinación de la magnitud de un vector

$$A = |\mathbf{A}| = {}^{+}\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}. \tag{2-9}$$

La ecuación (2-9) nos permite determinar la magnitud de un vector cuando la expresión del vector se presenta en *cualquier sistema de coordenadas*. Basta formar el producto punto del vector por sí mismo ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$) y obtener la raíz cuadrada positiva del resultado escalar.

EJEMPLO 2-1

Use vectores para demostrar la ley de los cosenos de un triángulo.

SOLUCIÓN

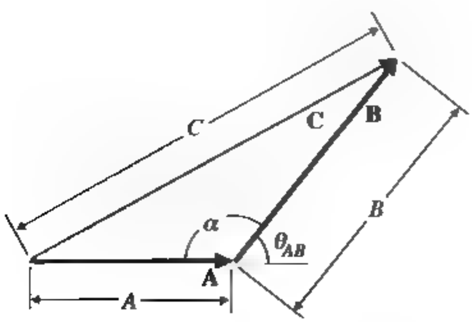
La ley de los cosenos es una relación escalar que expresa la longitud de un lado de un triángulo en términos de las longitudes de los otros dos lados y el ángulo entre ellos. Para la figura 2-5, la ley de los cosenos establece que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}. \tag{2-10}$$

Demostramos lo anterior considerando los lados como vectores; es decir,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

FIGURA 2-5 Ilustración del ejemplo 2-1.



Para obtener la magnitud de **C** realizamos el producto punto de **C** por sí mismo, como en la ecuación (2-8).

$$C^2 = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$
$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$
$$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}.$$

Como θ_{AB} es, por definición, el ángulo *más pequeño* entre **A** y **B** e igual a $(180° - \alpha)$, sabemos que $\cos\,\theta_{AB} = \cos\,(180° - \alpha) = -\cos\,\alpha$. Por lo tanto,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha. \tag{2-11}$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación (2-11) se obtiene la ley de los cosenos de la ecuación (2-10). Observe que en este problema no es necesario especificar ningún sistema de coordenadas.

2-3.2 PRODUCTO CRUZ O VECTORIAL

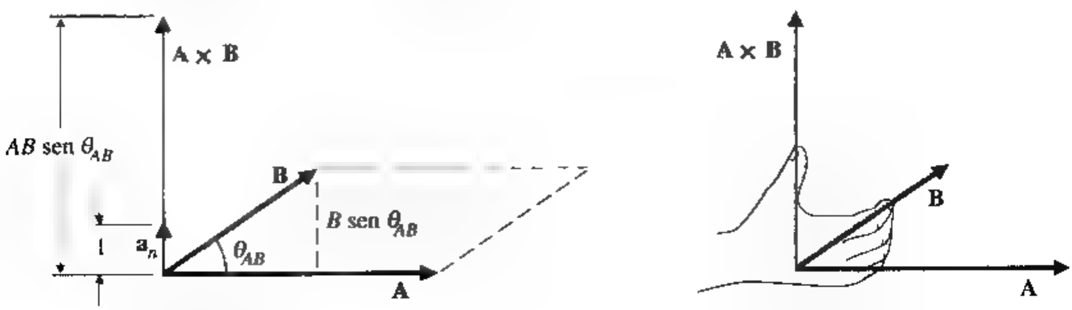
Otro tipo de multiplicación de vectores es el producto vectorial o cruz. Dados dos vectores **A** y **B**, el producto cruz, denotado **A** × **B** ("**A** cruz **B**") es otro vector definido por

Definición del producto cruz o vectorial de dos vectores

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} \triangleq \mathbf{a}_n AB\,\mathrm{sen}\,\theta_{AB},} \tag{2-12}$$

donde θ_{AB} es el ángulo *más pequeño* entre los vectores **A** y **B** ($\leq \pi$) y $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal (perpendicular) al plano que contiene **A** y **B**. La dirección de $\mathbf{a}_n$ sigue la del dedo pulgar de la *mano derecha* cuando los dedos giran de **A** a **B** siguiendo el ángulo θ_{AB} (*regla de la mano derecha*). Esta regla se ilustra en la figura 2-6. En esta figura podemos ver que B sen θ_{AB} es la altura del paralelogramo formado por los vectores **A** y **B**. También se observa que la cantidad AB sen θ_{AB}, que es no negativa

FIGURA 2-6 **Producto cruz de A y B, A × B**



(a) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{a}_n AB$ sen θ_{AB}.

(b) Regla de la mano derecha.

(positiva o cero), es numéricamente igual al área del paralelogramo. Por lo tanto, el producto cruz $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ produce otro vector cuya dirección $\mathbf{a}_n$ se obtiene por la regla de la mano derecha al girar de **A** a **B**, y cuya magnitud es igual al área del paralelogramo formado por **A** y **B**.

A partir de la definición de la ecuación (2-12) y con la regla de la mano derecha, tenemos que

El producto vectorial no es conmutativo.

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \tag{2-13}$$

Por lo tanto, el producto cruz *no* es conmutativo y la inversión del orden de los vectores en el producto cruz cambia el signo del producto.

2-3.3 PRODUCTOS DE TRES VECTORES

Hay dos tipos de productos de tres vectores: (1) producto escalar triple y (2) producto vectorial triple.

1. Producto escalar triple. Es el producto punto de un vector con el resultado del producto cruz de otros dos vectores. Una forma típica de este producto es

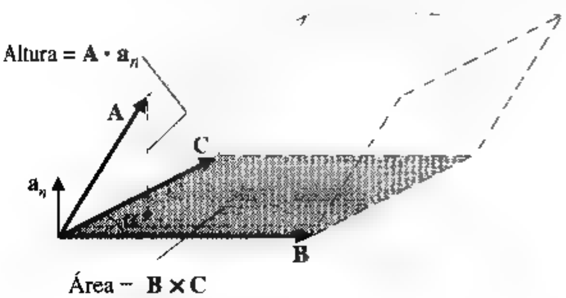
   $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$,

   donde **A**, **B** y **C** son tres vectores arbitrarios, como se ilustra en la figura 2-7(a).

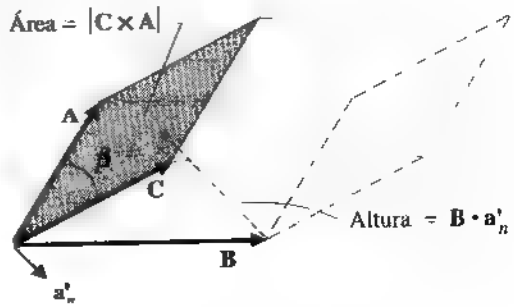
   De acuerdo con la ecuación (2-12), el producto cruz $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ tiene magnitud BC sen α, igual al área del paralelogramo sombreado que forman los lados **B** y **C**. La dirección de $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ es $\mathbf{a}_n$, un vector unitario normal perpendicular al plano que contiene **B** y **C**, como puede observarse en la figura. El producto triple es entonces

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n) BC \operatorname{sen} \alpha. \tag{2-14}$$

FIGURA 2-7 Ilustración de productos escalares triples.



(a) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.



(b) $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$.

En la ecuación (2-14), $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n)$ es un escalar cuya magnitud es la proyección de **A** en la dirección del vector unitario normal $\mathbf{a}_n$. Por lo tanto, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n)$ es numéricamente igual a la altura del paralelepípedo formado por los vectores **A**, **B** y **C**, y el producto escalar triple es igual al volumen del paralelepípedo.

2. Producto vectorial triple. Es el producto cruz de un vector con el resultado del producto cruz de otros dos. Una forma típica de este producto es

   $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

   Este caso es más complicado y aquí no presentaremos una derivación general. Sin embargo, es bastante fácil de desarrollar si se especifica un sistema de coordenadas (véase el Prob. 2-9). Analizaremos su aplicación cuando sea necesario más adelante.

EJEMPLO 2-2

Dados tres vectores, **A**, **B** y **C**, demuestre la siguiente relación de los productos escalares triples:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).} \tag{2-15}$$

SOLUCIÓN

Hemos visto que el primer producto escalar triple $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, de acuerdo con la ecuación (2-14), es igual al volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores **A**, **B** y **C**. Veamos ahora el segundo producto escalar triple $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$. A partir de la figura 2-7(b) y la ecuación (2-12), tenemos

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_n')CA \operatorname{sen} \beta, \tag{2-16}$$

donde $\mathbf{a}_n'$ y $CA \operatorname{sen} \beta$ representan, respectivamente, la dirección y la magnitud del producto cruz $\mathbf{C} \times \mathbf{A}$. Visualice ahora el paralelepípedo formado por los tres vectores **A**, **B** y **C** como si estuviera sobre la base sombreada con área igual a $\mathbf{C} \times \mathbf{A} = CA \operatorname{sen} \beta$. La altura del paralelepípedo es $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_n')$. Por lo tanto, el producto escalar triple de la ecuación (2-16) tiene magnitud igual al volumen del paralelepípedo, el cual es idéntico al de la ecuación (2-14). Entonces,

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}). \tag{2-17}$$

Se aplican argumentos similares al tercer producto escalar triple de la ecuación (2-15), $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, ya que las tres formas producen el volumen del paralelepípedo.

CUIDADO: Para las igualdades de la ecuación (2-15) se requiere que el orden de los vectores del producto escalar triple tenga una permutación cíclica. Esto significa que debe mantenerse la secuencia {**A**, **B**, **C**}, {**B**, **C**, **A**} o {**C**, **A**, **B**} al obtener el producto

punto del primer vector con el resultado del producto cruz de los otros dos vectores. $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$, que no sigue la secuencia cíclica, no es lo mismo que $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ de la ecuación (2-16) (aunque sí es igual a su valor negativo).

PREGUNTAS DE REPASO

P.2-1 ¿En qué condiciones puede ser negativo el producto punto de dos vectores?

P.2-2 Escriba los resultados de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ si (a) $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ y (b) $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

P.2-3 ¿Es lo mismo $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ que $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$? Explique.

P.2-4 Dados dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, ¿cómo calcula (a) la componente de $\mathbf{A}$ en la dirección de $\mathbf{B}$ y (b) la componente de $\mathbf{B}$ en la dirección de $\mathbf{A}$?

P.2-5 ¿$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ implica $\mathbf{B} = \mathbf{C}$? Explique.

P.2-6 ¿$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ implica $\mathbf{B} = \mathbf{C}$? Explique.

COMENTARIOS

1. Al escribir un vector, *nunca* omita la marca que lo distingue de un escalar.
2. No sume o reste un vector y un escalar, o viceversa.
3. La división por un vector no está definida. No intente dividir una cantidad por un vector.
4. Dos vectores son perpendiculares entre sí si su producto punto es cero, y viceversa. ($\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$. Ec. 2-6.)
5. Dos vectores son paralelos entre sí si su producto cruz es cero, y viceversa. ($\theta = 0$, $\operatorname{sen}\theta = 0$. Ec. 2-10.)

■ **EJERCICIO 2.2** Compare los valores de los siguientes productos escalares triples de vectores:
(a) $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$, (c) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ y (d) $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{a}_A \times \mathbf{A})$.

■ **EJERCICIO 2.3** ¿Cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido?
(a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$, (b) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}/(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (c) $\mathbf{AB}/\mathbf{CD}$, (d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}/(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$,
(e) $\mathbf{ABC}$, (f) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

2-4 SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES

Ya indicamos que, aunque las leyes del electromagnetismo son independientes del sistema de coordenadas, para la resolución de problemas prácticos se requiere que las expresiones derivadas de estas leyes se expresen en un sistema de coordenadas apropiado para la geometría del problema. Por ejemplo, para determinar el campo eléctrico en

cierto punto del espacio es necesario que al menos describamos la posición de la fuente y la situación de este punto con respecto a un sistema de coordenadas. En un espacio tridimensional, un punto puede localizarse como la intersección de tres superficies. Suponga que las tres familias de superficies se describen con u_1 = constante, u_2 = constante y u_3 = constante, donde las u no tienen que ser todas longitudes y algunas pueden ser ángulos. (En el conocido sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares, u_1, u_2 y u_3 corresponden a x, y y z, respectivamente.) Cuando las tres superficies son mutuamente perpendiculares se tiene un ***sistema de coordenadas ortogonales***.

Sistemas de coordenadas ortogonales

Existen muchos sistemas de coordenadas ortogonales, pero en este libro sólo nos interesan los tres más útiles y de uso más común:

1. Coordenadas cartesianas (o rectangulares).†
2. Coordenadas cilíndricas.
3. Coordenadas esféricas.

Analizaremos cada uno de estos sistemas en las subsecciones siguientes.

2-4.1 COORDENADAS CARTESIANAS

Un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ en coordenadas cartesianas es la intersección de *tres planos* especificados por $x = x_1$, $y = y_1$ y $z = z_1$, como se ilustra en la figura 2-8. Tenemos

$$(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z).$$

Los tres vectores mutuamente perpendiculares, $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$, en dirección de las tres coordenadas, se denominan ***vectores base***. En el caso de un sistema de mano derecha tenemos las siguientes propiedades cíclicas:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \tag{2-18a}$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \tag{2-18b}$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y. \tag{2-18c}$$

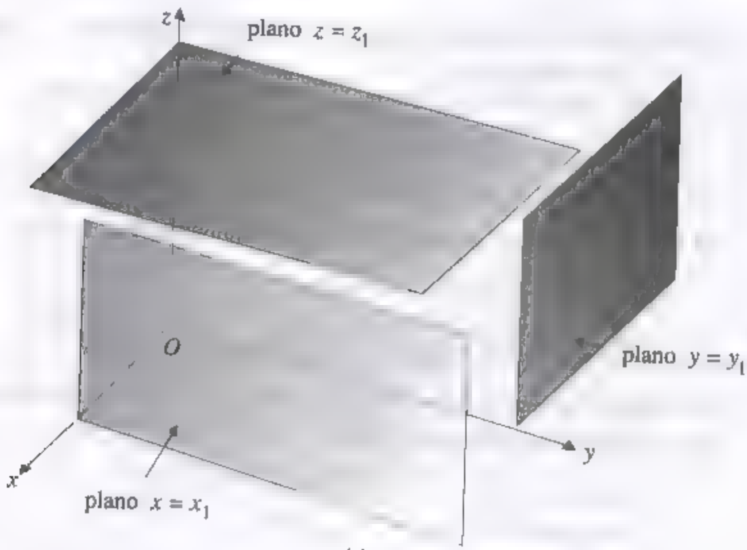
Las siguientes relaciones se deducen directamente.

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0 \tag{2-19}$$

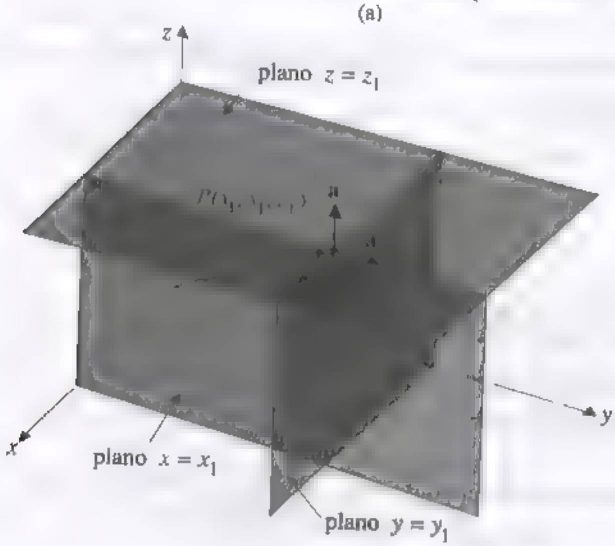
y

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1. \tag{2-20}$$

† Preferimos usar el término "coordenadas cartesianas" porque el término "coordenadas rectangulares" usualmente se asocia con la geometría bidimensional. El adjetivo "cartesiano" se emplea en honor del filósofo y matemático francés Renatus Cartesius (forma latinizada de René Descartes, 1596-1650), quien inició la geometría analítica.



(a)



(b)

FIGURA 2-8 Coordenadas cartesianas. (a) Tres planos mutuamente perpendiculares. (b) La intersección de los tres planos de (a) define la posición de un punto P.

El vector de posición del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ es el vector trazado desde el origen O hasta P; sus componentes en las direcciones $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$ son, respectivamente, x_1, y_1, z_1.[†]

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}_x x_1 + \mathbf{a}_y y_1 + \mathbf{a}_z z_1. \tag{2-21}$$

[†] Al escribir vectores en este libro usaremos el convenio de escribir primero la dirección (de un vector unitario) y luego la magnitud.

Podemos escribir un vector **A** en coordenadas cartesianas con componentes A_x, A_y y A_z, de la siguiente manera:

Vector A en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z.} \tag{2-22}$$

La expresión de una longitud diferencial vectorial es

Longitud diferencial vectorial en coordenadas cartesianas

$$\boxed{d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz.} \tag{2-23}$$

Un volumen diferencial es el producto de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de las coordenadas:

Diferencial de volumen en coordenadas cartesianas

$$\boxed{dv = dx\,dy\,dz.} \tag{2-24}$$

El producto punto de **A** en la ecuación (2-22) y otro vector $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$ es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \cdot (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z),$$

o sea

Producto escalar de A y B en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,} \tag{2-25}$$

con base en las ecuaciones (2-19) y (2-20).

El producto cruz de **A** y **B** es

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z)\\ &= \mathbf{a}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z(A_x B_y - A_y B_x),\end{aligned} \tag{2-26}$$

con base en las ecuaciones (2-28a, b y c). La ecuación (2-26) puede escribirse más convenientemente en forma de determinante, para que sea más fácil memorizarla.

Producto vectorial de A y B en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}} \tag{2-27}$$

EJEMPLO 2-3

Dado un vector $\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2$ en coordenadas cartesianas, encuentre

a) su magnitud $A = |\mathbf{A}|$,

b) la expresión del vector unitario $\mathbf{a}_A$ en la dirección de **A**, y

c) el ángulo que forma **A** con el eje z.

SOLUCIÓN

a) Hallamos A usando las ecuaciones (2-8) y (2-9), teniendo en cuenta las ecuaciones (2-19) y (2-20).

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} &= (-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\cdot(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\\ &= (-1)(-1) + (2)(2) + (-2)(-2)\\ &= 1 + 4 + 4 = 9.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A = +\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = +\sqrt{9} = 3.$$

b) El vector unitario $\mathbf{a}_A$ se obtiene con la ecuación (2-3). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} &= \frac{1}{3}(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\\ &= -\mathbf{a}_x\frac{1}{3} + \mathbf{a}_y\frac{2}{3} - \mathbf{a}_z\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

c) Para encontrar el ángulo θ_z que forma **A** con el eje $+z$, obtenemos el producto punto de **A** y el vector unitario $\mathbf{a}_z$. A partir de la ecuación (2-6) tenemos

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_z = A\cos\theta_z,$$

$$(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\cdot\mathbf{a}_z = -2 = 3\cos\theta_z,$$

de lo cual se obtiene

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 180° - 48.2° = 131.8°.$$

PREGUNTA: ¿Por qué la respuesta no es −48.2° o 228.2° (180° + 48.2°)?

EJEMPLO 2-4

Dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x 3 + \mathbf{a}_z 4$, calcule

a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$,

b) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, y

c) θ_{AB}.

SOLUCIÓN

a) A partir de la ecuación (2-25) tenemos

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (5)(-3) + (-2)(0) + (1)(4) = -11.$$

b) De la ecuación (2-27) tenemos

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}_x 8 - \mathbf{a}_y 23 - \mathbf{a}_z 6.$$

c) Podemos encontrar θ_{AB}, el ángulo entre los vectores **A** y **B**, con base en la definición de $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ de la ecuación (2-6). Las magnitudes A de **A** y B de **B** son:

$$A = |\mathbf{A}| = +\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = +\sqrt{30}$$

y

$$B = |\mathbf{B}| = +\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

De la ecuación (2-6),

$$\cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{-11}{5\sqrt{30}} = -0.402.$$

Por lo tanto,

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}(-0.402) = 180^\circ - 66.3^\circ = 113.7^\circ.$$

EJEMPLO 2-5

a) Escriba la expresión del vector que va desde el punto $P_1(1, 3, 2)$ hasta el punto $P_2(3, -2, 4)$ en coordenadas cartesianas.

b) Determine la longitud de la línea $\overline{P_1P_2}$.

c) Encuentre la distancia perpendicular desde el origen hasta esta línea.

SOLUCIÓN

a) En la figura 2-9 podemos ver que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (\mathbf{a}_x 3 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z 4) - (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 3 + \mathbf{a}_z 2) \\ &= \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 5 + \mathbf{a}_z 2.\end{aligned}$$

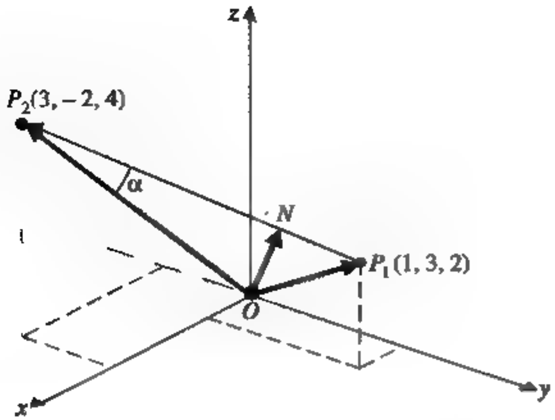


FIGURA 2-9 Ilustración del ejemplo 2-5.

b) La longitud de la línea $\overline{P_1P_2}$ es

$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2} &= |\overrightarrow{P_1P_2}| \\ &= \sqrt{2^2+(-5)^2+2^2} \\ &= \sqrt{33}.\end{aligned}$$

c) La distancia perpendicular (más corta) desde el origen hasta la línea es

$|\overrightarrow{ON}|$, que es igual a $|\overrightarrow{OP_2}|\operatorname{sen}\alpha = |\overrightarrow{OP_2} \times \mathbf{a}_{P_1P_2}|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{ON}| &= \frac{|\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \\ &= \frac{|(\mathbf{a}_x3-\mathbf{a}_y2+\mathbf{a}_z4)\times(\mathbf{a}_x2-\mathbf{a}_y5+\mathbf{a}_z2)|}{\sqrt{33}} \\ &= \frac{|\mathbf{a}_x16+\mathbf{a}_y2-\mathbf{a}_z11|}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{381}}{\sqrt{33}} = 3.40.\end{aligned}$$

NOTA: En este ejemplo se han omitido las unidades por cuestiones de sencillez.

■ **EJERCICIO 2.4**

Dado un vector $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x2 - \mathbf{a}_y6 + \mathbf{a}_z3$, encuentre

a) la magnitud de **B**,

b) la expresión de $\mathbf{a}_B$,

c) los ángulos que forma **B** con los ejes *x*, *y* y *z*.

RESPUESTA: (a) 7, (b) $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_x0.296 - \mathbf{a}_y0.857 + \mathbf{a}_z0.429$, (c) 73.4°, 149.0°, 64.6°.

■ **EJERCICIO 2.5** Dados dos puntos $P_1(1, 2, 0)$ y $P_2(3, 4, 0)$ en coordenadas cartesianas con origen O, calcule

a) la longitud de la proyección de $\overrightarrow{OP_2}$ sobre $\overrightarrow{OP_1}$, y

b) el área del triángulo OP_1P_2.

RESPUESTA: (a) 2.236, (b) 5.

2-4.2 COORDENADAS CILÍNDRICAS

En coordenadas cilíndricas, un punto $P(r_1, \phi_1, z_1)$ es la intersección de una superficie cilíndrica circular $r = r_1$, un semiplano con el eje z como arista y que forma un ángulo $\phi = \phi_1$ con el plano xy, y un plano paralelo al plano xy en $z = z_1$. Tenemos

$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z).$$

Como se ilustra en la figura 2-10, r es la distancia radial medida desde el eje z, y el ángulo ϕ se mide a partir del eje x positivo. El vector base $\mathbf{a}_\phi$ es tangente a la superficie cilíndrica. Las direcciones de $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\phi$ cambian de acuerdo con la posición del punto P. Las siguientes relaciones de mano derecha se aplican a $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\phi$ y $\mathbf{a}_z$:

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z, \tag{2-28a}$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r, \tag{2-28b}$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\phi. \tag{2-28c}$$

Coeficiente métrico

Dos de las tres coordenadas, r y z (u_1 y u_2) son longitudes, pero ϕ (u_2) es un ángulo, por lo que se requiere un coeficiente de multiplicación (un *coeficiente métrico*) r para convertir un cambio diferencial de ángulo $d\phi$ en un cambio diferencial de longitud. Esto se ilustra en la figura 2-11.

Los coeficiente métricos para dr y dz son unitarios. Si denotamos los coeficientes métricos en las tres direcciones de coordenadas $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\phi$ y $\mathbf{a}_z$ con h_1, h_2 y h_3, respectivamente, tenemos que para las coordenadas cilíndricas, $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$; éstos se indican en la tabla 2-1. Los coeficientes métricos en coordenadas cartesianas en las tres direcciones de coordenadas son unitarios ($h_1 = h_2 = h_3 = 1$), ya que las tres coordenadas (x, y, z) son longitudes.

La expresión general para una longitud diferencial vectorial en coordenadas cilíndricas es la suma vectorial de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de coordenadas.

Longitud diferencial vectorial en coordenadas cilíndricas

$$\boxed{d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\phi r\, d\phi + \mathbf{a}_z dz.} \tag{2-29}$$

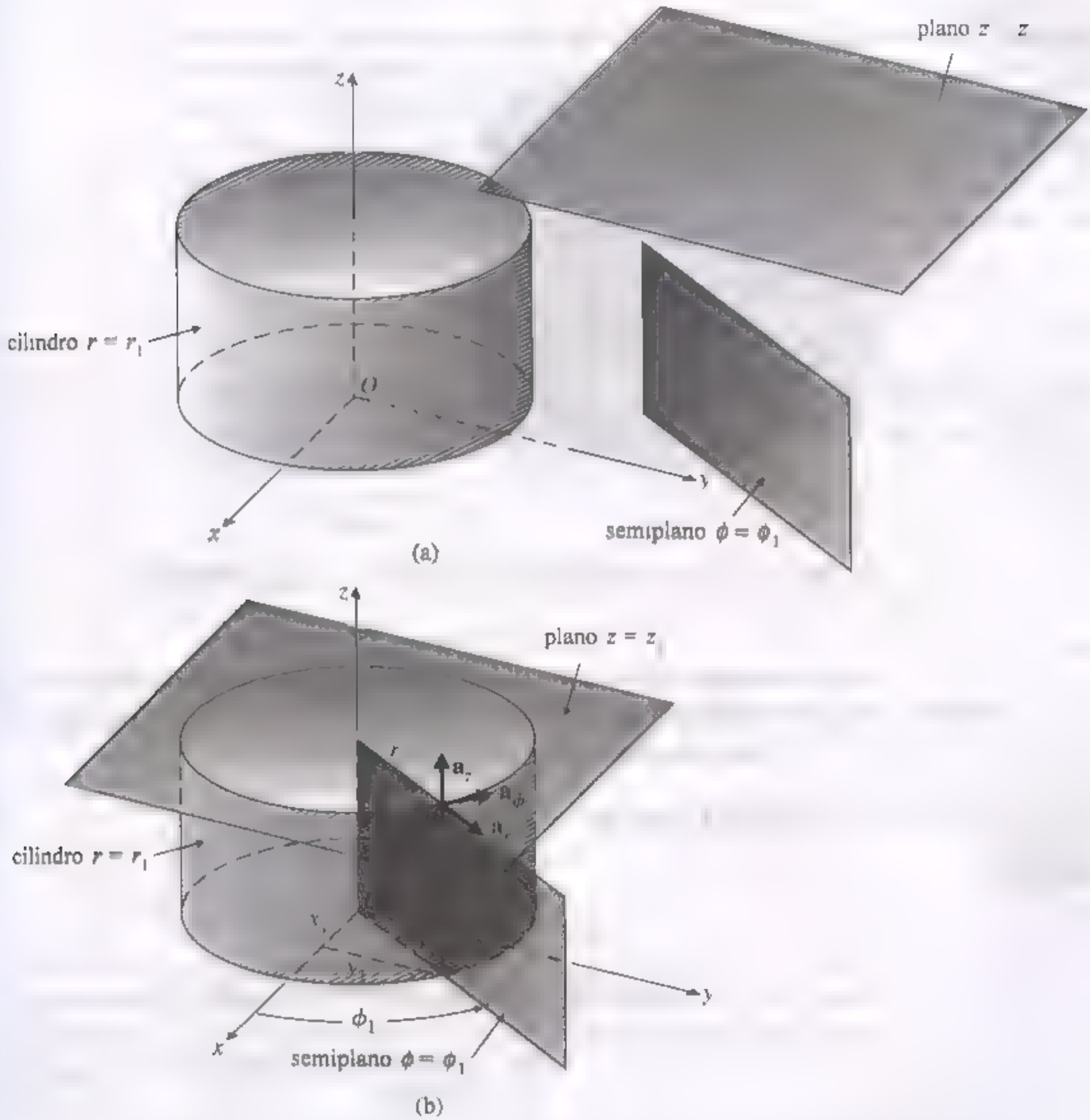


FIGURA 2-10 Coordenadas cilíndricas (a) Superficie cilíndrica circular, un semiplano con el eje z como arista y un plano perpendicular al eje z (b) La intersección de la superficie cilíndrica y los dos planos de (a) especifica la situación del punto P.

Un volumen diferencial es el producto de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de coordenadas. En coordenadas cilíndricas es

Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas

$$\boxed{dv = r\,dr\,d\phi\,dz.} \tag{2-30}$$

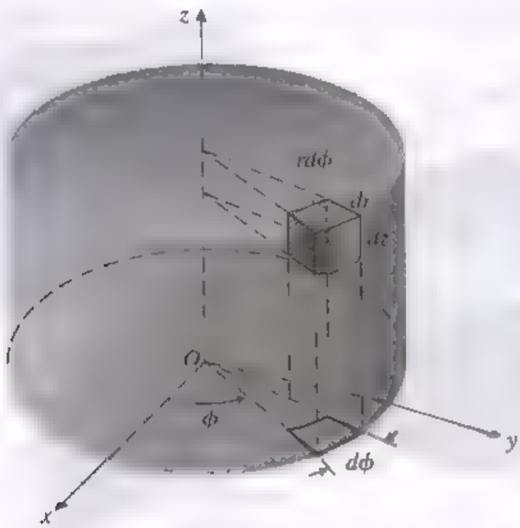


FIGURA 2-11 Elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas cilíndricas son importantes para problemas con corrientes o con largas líneas de carga y en lugares donde existen contornos cilíndricos o circulares.

Un vector en coordenadas cilíndricas se escribe como

Vector A en coordenadas cilíndricas

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z.} \tag{2-31}$$

TABLA **2-1** LOS TRES SISTEMAS BÁSICOS DE COORDENADAS ORTOGONALES

		Coordenadas cartesianas (x, y, z)	Coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)	Coordenadas esféricas (R, θ, ϕ)
Vectores base	$\mathbf{a}_{u_1}$	$\mathbf{a}_x$	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_R$
	$\mathbf{a}_{u_2}$	$\mathbf{a}_y$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_\theta$
	$\mathbf{a}_{u_3}$	$\mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_\phi$
Coeficientes métricos	h_1	1	1	1
	h_2	1	r	R
	h_3	1	1	R sen θ
Diferencial de volumen	dv	$dx\,dy\,dz$	$r\,dr\,d\phi\,dz$	R^2 sen $\theta\,dR\,d\theta\,d\phi$

Los vectores expresados en coordenadas cilíndricas pueden transformarse y expresarse en coordenadas cartesianas, y viceversa. Suponga que queremos expresar $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z$ en coordenadas cartesianas; es decir, queremos escribir $\mathbf{A}$ como $\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$ y determinar A_x, A_y y A_z. En primer lugar, observamos que A_z, la componente z de $\mathbf{A}$, no cambia con la transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas. Para encontrar A_x igualamos los productos punto de ambas expresiones de $\mathbf{A}$ con $\mathbf{a}_x$. Así,

$$\begin{aligned} A_x &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_x \\ &= A_r\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_x + A_\phi\mathbf{a}_\phi\cdot\mathbf{a}_x. \end{aligned} \tag{2-32}$$

El término que contiene A_z desaparece porque $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0$. Remitiéndonos a la figura 2-12, donde se muestran las posiciones relativas de los vectores base $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\phi$ en el plano xy, vemos que

$$\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_x = \cos\phi \tag{2-33}$$

y que

$$\mathbf{a}_\phi\cdot\mathbf{a}_x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\operatorname{sen}\phi. \tag{2-34}$$

Al sustituir las ecuaciones (2-33) y (2-34) en la ecuación (2-32), obtenemos

$$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\operatorname{sen}\phi. \tag{2-35}$$

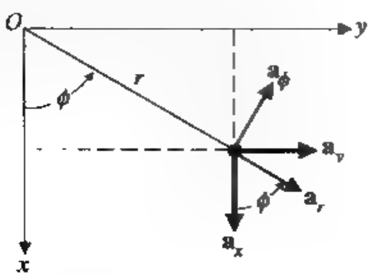
En forma similar, para hallar A_y tomamos los productos punto de ambas expresiones de $\mathbf{A}$ con $\mathbf{a}_y$:

$$\begin{aligned} A_y &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_y \\ &= A_r\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_y + A_\phi\mathbf{a}_\phi\cdot\mathbf{a}_y. \end{aligned}$$

A partir de la figura 2-12 tenemos que

$$\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \operatorname{sen}\phi \tag{2-36}$$

FIGURA 2-12 Relaciones entre $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\phi$.



y

$$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y = \cos\phi. \quad (2\text{-}37)$$

De esto se desprende que

$$A_y = A_r \operatorname{sen}\phi + A_\phi \cos\phi. \quad (2\text{-}38)$$

Es conveniente escribir en forma de matriz las relaciones entre las componentes de un vector en coordenadas cartesianas y cilíndricas:

Transformación de las componentes de un vector de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}.} \quad (2\text{-}39)$$

A partir de la figura 2-12 podemos ver que las coordenadas de un punto en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) pueden transformarse en las de coordenadas cartesianas (x, y, z), de la siguiente manera:

Transformación de la situación de un punto en coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas

$$x = r\cos\phi, \quad (2\text{-}40a)$$

$$y = r\operatorname{sen}\phi, \quad (2\text{-}40b)$$

$$z = z. \quad (2\text{-}40c)$$

EJEMPLO 2-6

Suponiendo que un campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas es $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r(3\cos\phi) - \mathbf{a}_\phi 2r + \mathbf{a}_z z$,

a) ¿Cuál es el campo en el punto $P(4, 60°, 5)$?
b) Exprese el campo $\mathbf{A}_P$ en P en coordenadas cartesianas.
c) Exprese la situación del punto P en coordenadas cartesianas.

SOLUCIÓN

a) En el punto $P(r = 4,\ \phi = 60°,\ z = 5)$, el campo es

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{a}_r(3\cos 60°) - \mathbf{a}_\phi(2\times 4) + \mathbf{a}_z 5$$
$$= \mathbf{a}_r(3/2) - \mathbf{a}_\phi 8 + \mathbf{a}_z 5.$$

b) Usando la ecuación (2-39) tenemos

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & \operatorname{sen}60° & 0 \\ \operatorname{sen}60° & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.68 \\ -2.70 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{a}_x 7.68 - \mathbf{a}_y 2.70 + \mathbf{a}_z 5.$$

c) Usando las ecuaciones (2-40a, b y c) podemos obtener las coordenadas cartesianas del punto P como $(4 \cos 60°, 4 \text{ sen } 60°, 5)$ o $(2, 2\sqrt{3}, 5)$.

■ **EJERCICIO 2.6** Exprese el vector de posición $\overrightarrow{OQ}$ desde el origen O hasta el punto $Q(3, 4, 5)$ en coordenadas cilíndricas.

RESPUESTA: $\mathbf{a}_r 5 + \mathbf{a}_z 5$.

■ **EJERCICIO 2.7** Las coordenadas cilíndricas de dos puntos P_1 y P_2 son: $P_1(4, 60°, 1)$ y $P_2(3, 180°, -1)$. Determine la distancia entre estos dos puntos.

RESPUESTA: $\sqrt{41}$

2-4.3 COORDENADAS ESFÉRICAS

Un punto $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$ en coordenadas esféricas se especifica como la intersección de las tres superficies siguientes: una superficie esférica centrada en el origen con radio $R = R_1$; un cono circular recto con su vértice en el origen, su eje coincidente con el eje $+z$ y con un ángulo mitad $\theta = \theta_1$; y un semiplano con el eje z como arista y que forma un ángulo $\phi = \phi_1$ con el plano xz. Tenemos

$$(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi).$$

$\mathbf{a}_R$ y $\mathbf{a}_r$ son muy diferentes.

Las tres superficies intersecantes se ilustran en la figura 2-13. Observe que el *vector base $\mathbf{a}_R$ en P es radial desde el origen y bastante diferente de $\mathbf{a}_r$ en coordenadas cilíndricas, ya que este último es perpendicular al eje z.* El vector base $\mathbf{a}_\theta$ está en el plano $\phi = \phi_1$ y es tangencial a la superficie esférica, mientras que el vector base $\mathbf{a}_\phi$ es el mismo que en las coordenadas cilíndricas. Los vectores base se ilustran en la figura 2-11. En un sistema de mano derecha tenemos

$$\mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi, \tag{2-41a}$$

$$\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_R, \tag{2-41b}$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\theta. \tag{2-41c}$$

Las coordenadas esféricas son importantes en problemas que comprenden fuentes puntuales y regiones con contornos esféricos. Cuando un observador está muy lejos de una

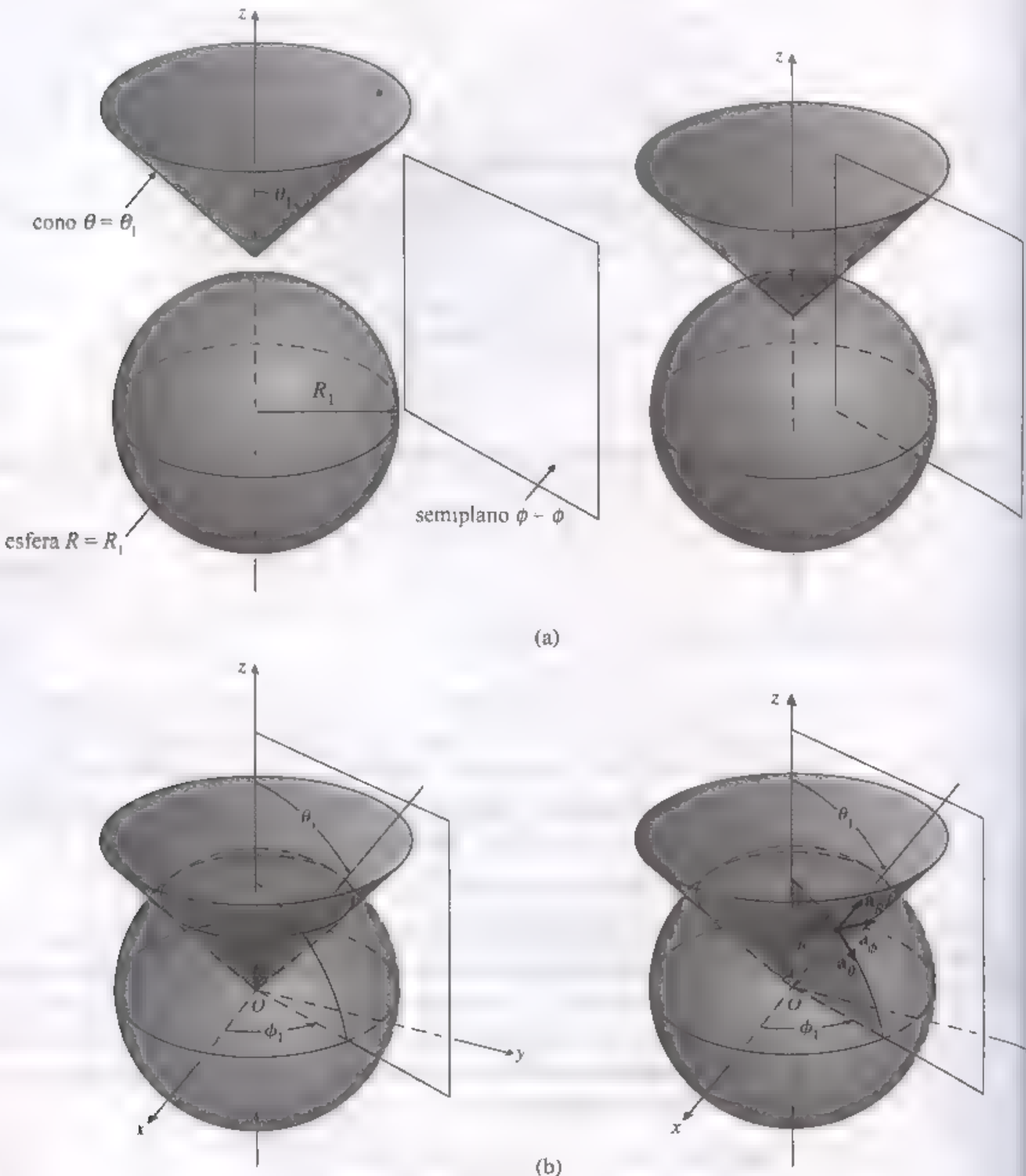


FIGURA 2-13 (a) Superficie esférica, un cono circular recto y un semiplano que contiene el eje z. (b) La intersección de la esfera, el cono y el semiplano de (a) especifica el punto P.

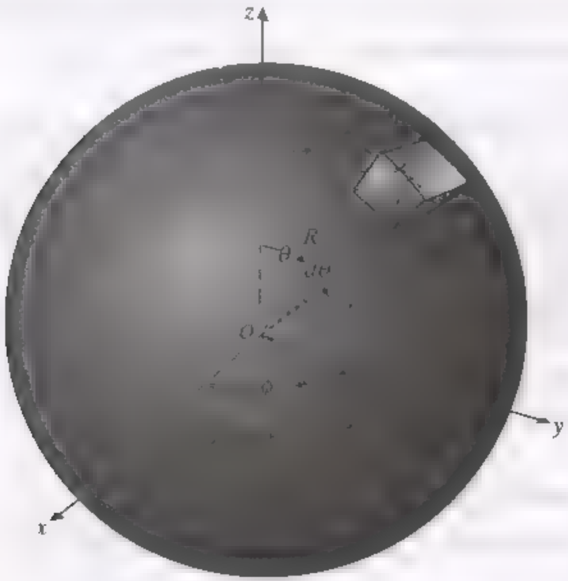


FIGURA 2-14 Elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas

región fuente de extensión finita, esta fuente puede considerarse aproximadamente como un punto. Por lo tanto, podría elegirse como el origen de un sistema de coordenadas esféricas para que se puedan efectuar aproximaciones apropiadas que simplifiquen el problema. Es por esto que se usan coordenadas esféricas para resolver problemas de antenas en el campo lejano.

Un vector en coordenadas esféricas se escribe como

Vector A en coordenadas esféricas

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi.} \tag{2-42}$$

En coordenadas esféricas sólo R es una longitud. Las otras dos coordenadas, θ y ϕ, son ángulos. Remitiéndonos a la figura 2-14, donde se muestra un elemento de volumen diferencial típico, vemos que se requieren los coeficientes métricos $h_2 - R$ y $h_3 - R$ sen θ para convertir $d\theta$ y $d\phi$, respectivamente, en longitudes diferenciales (R) $d\theta$ y $(R \text{ sen } \theta)d\phi$. La expresión general para una longitud diferencial vectorial es

Longitud diferencial vectorial en coordenadas esféricas

$$\boxed{d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_R\, dR + \mathbf{a}_\theta R\, d\theta + \mathbf{a}_\phi R \operatorname{sen}\theta\, d\phi.} \tag{2-43}$$

Un volumen diferencial es el producto de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de coordenadas:

Diferencial de volumen en coordenadas esféricas

$$\boxed{dv = R^2 \operatorname{sen}\theta \, dR \, d\theta \, d\phi.} \tag{2-44}$$

En la tabla 2-1 se presentan los vectores base, los coeficientes métricos y las expresiones para un volumen diferencial en los tres sistemas básicos de coordenadas ortogonales.

En la figura 2-15 se muestra la interrelación de las variables espaciales $(x, y\ z)$, (r, ϕ, z) y (R, θ, ϕ) que especifican la situación de un punto P. Las ecuaciones siguientes transforman las variables de coordenadas expresadas en coordenadas esféricas en coordenadas cartesianas.

Transformación de la situación de un punto en coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas

$$x = R \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \tag{2-45a}$$

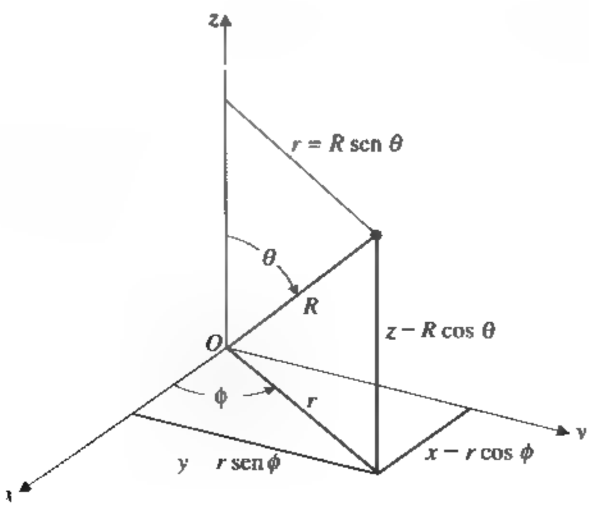
$$y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \tag{2-45b}$$

$$z = R \cos\theta. \tag{2-45c}$$

■ **EJERCICIO 2.8** Transforme las coordenadas cartesianas (4, –6, 12) en coordenadas esféricas.

RESPUESTA: (14, 31°, 303.7°).

FIGURA 2-15 Ilustración de la interrelación de las variables espaciales (x, y, z), (r, ϕ, z) y (R, ϕ, θ).



EJEMPLO 2-7

Exprese el vector unitario $\mathbf{a}_z$ en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN

En primer lugar, no debemos caer en la tentación de usar la ecuación (2-45c) para escribir $\mathbf{a}_z$ como $\mathbf{a}_R R \cos\theta$ o $\mathbf{a}_R \cos\theta$, ya que serían incorrectas la dirección ($\mathbf{a}_z \neq \mathbf{a}_R$) y la magnitud ($1 \neq R\cos\theta$ o $\cos\theta$ para toda θ). Como los vectores base de las coordenadas esféricas son $\mathbf{a}_R$, $\mathbf{a}_\theta$ y $\mathbf{a}_\phi$, encontremos las componentes de $\mathbf{a}_z$ en estas direcciones. A partir de las figuras 2-13 y 2-14 tenemos

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R = \cos\theta, \tag{2-46a}$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\operatorname{sen}\theta, \tag{2-46b}$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0. \tag{2-46c}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_R \cos\theta - \mathbf{a}_\theta \operatorname{sen}\theta. \tag{2-47}$$

EJEMPLO 2-8

Suponiendo que una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas con radios de 2 y 5 (cm) tiene una densidad de carga de

$$\frac{-3 \times 10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi \qquad (\mathrm{C/m^3}),$$

encuentre la carga total contenida en la región.

SOLUCIÓN

Tenemos

$$\rho_v = -\frac{3 \times 10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi,$$

$$Q = \int \rho_v\, dv.$$

Las condiciones especificadas para el problema apuntan de manera obvia al uso de coordenadas esféricas. Utilizando la expresión de dv de la ecuación (2-44) efectuamos una integración triple:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05} \rho_v R^2 \operatorname{sen}\theta\, dR\, d\theta\, d\phi.$$

Aquí hay dos cuestiones importantes. En primer lugar, como ρ_v se expresa en unidades de coulombs por metro cúbico, los límites de la integración de R deben convertirse a metros. Segundo, el intervalo de integración de θ es de 0 a π radianes, *no* de 0 a 2π radianes. Si pensamos en esto un poco nos convenceremos de que un semicírculo (no un círculo completo) girado 2π radianes (ϕ de 0 a 2π) sobre el eje z genera una esfera. Tenemos

$$
\begin{aligned}
Q &= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{0.02}^{0.05} \frac{1}{R^2} \cos^2 \phi \operatorname{sen}\theta \, dR \, d\theta \, d\phi \\
&= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.02} \right) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \cos^2 \phi \, d\phi \\
&= -0.9 \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \\
&= -1.8 \times 10^{-6} \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -1.8\pi \qquad (\mu\text{C}).
\end{aligned}
$$

■ **EJERCICIO 2.9** Obtenga la fórmula de la superficie de una esfera con radio R_0 integrando el área superficial diferencial en coordenadas esféricas.

RESPUESTA: $4\pi R_0^2$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.2-7 Explique qué es lo que hace que un sistema de coordenadas sea (a) ortogonal, (b) de mano derecha.

P.2-8 ¿Qué son los coeficientes métricos?

P.2-9 Escriba $d\ell$ y dv (a) en coordenadas cartesianas, (b) en coordenadas cilíndricas y (c) en coordenadas esféricas.

P.2-10 Dados dos puntos $P_1(1, 2, 3)$ y $P_2(-1, 0, 2)$ en coordenadas cartesianas, escriba las expresiones de los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_2P_1}$.

P.2-11 ¿Cuáles son las expresiones de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ en coordenadas cartesianas?

COMENTARIOS

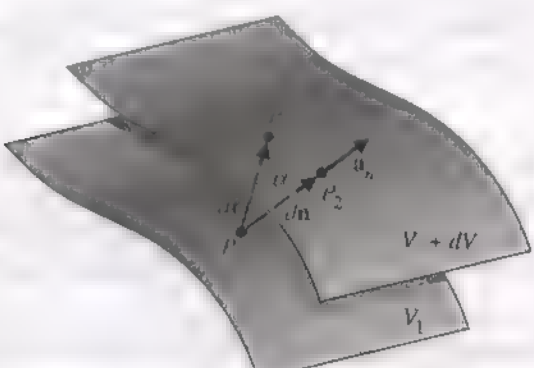
1. Hay que usar coeficientes métricos apropiados al convertir cambios de ángulo a cambios de longitud.
2. No confunda la distancia cilíndrica, r, medida a partir del eje z, con la distancia esférica, R, medida desde el origen.
3. Los productos cruz de los vectores base de cada sistema de coordenadas siguen la regla de la mano derecha en orden cíclico.

2-5 GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR

En el electromagnetismo es común tratar con cantidades que dependen tanto del tiempo como de la posición. Puesto que las tres variables de coordenadas tienen lugar en un espacio tridimensional, es de esperar encontrarse campos escalares y vectoriales que sean funciones de cuatro variables (t, u_1, u_2, u_3). En términos generales, los campos pueden cambiar al variar una cualquiera de las cuatro variables. Veremos ahora el método para describir la razón de cambio espacial de un campo escalar en un instante determinado. Es necesario usar derivadas parciales con respecto a las tres variables de coordenadas espaciales y, puesto que la razón de cambio puede ser diferente dependiendo de la dirección, se requiere también un vector para definir la razón de cambio espacial de un campo escalar en un punto y en un instante determinados.

Consideremos una función escalar de coordenadas espaciales $V(u_1, u_2, u_3)$, que puede representar, por ejemplo, la distribución de temperatura en un edificio, la altitud de un terreno montañoso o el potencial eléctrico en una región. La magnitud de V depende en general de la posición del punto en el espacio, pero puede ser constante sobre ciertas líneas o superficies. En la figura 2-16 se muestran dos superficies en las cuales la magnitud de V es constante y tiene los valores V_1 y $V_1 + dV$, respectivamente, donde dV indica un cambio pequeño en V. Debemos señalar que las superficies de V constante no tienen por qué coincidir con cualquiera otra de las superficies que define el sistema de coordenadas. El punto P_1 está en la superficie V_1; P_2 es el punto correspondiente sobre la superficie $V_1 + dV$ determinado por el vector normal $d\mathbf{n}$; y P_3 es un punto cercano a P_2 determinado por otro vector $d\boldsymbol{\ell} \neq d\mathbf{n}$. Para el mismo cambio dV en V, la razón de cambio espacial, $dV/d\ell$, es obviamente más grande a lo

FIGURA 2-16 Relativo al gradiente de un escalar.



largo de $d\mathbf{n}$ porque dn es la distancia más corta entre las dos superficies.† Puesto que la magnitud de $dV/d\ell$ depende de la dirección de $d\ell$, $dV/d\ell$ es una derivada direccional. ***Definimos el vector que representa la magnitud y la dirección de la razón de incremento espacial máximo de un escalar como el gradiente de dicho escalar.*** Escribimos entonces

El gradiente de un campo escalar: definición física

El gradiente de un campo escalar: definición matemática

$$\boxed{\mathbf{grad}\, V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn}.} \tag{2-48}$$

Por cuestiones de brevedad, es costumbre emplear el operador *del*, representado por el símbolo ∇,‡ y escribir ∇V en lugar de **grad** V. De esta manera,

$$\boxed{\nabla V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn}.} \tag{2-49}$$

Hemos supuesto que dV es positivo (un incremento en V); si dV fuera negativo (una disminución en V de P_1 a P_2), ∇V sería negativo en la dirección $\mathbf{a}_n$.

La derivada direccional a lo largo de $d\ell$ es

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\ell} &= \frac{dV}{dn}\frac{dn}{d\ell} = \frac{dV}{dn}\cos\alpha \\ &= \frac{dV}{dn}\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{a}_\ell = (\nabla V)\cdot\mathbf{a}_\ell.\end{aligned} \tag{2-50}$$

La ecuación (2-50) establece que la razón de incremento espacial de V en la dirección $\mathbf{a}_\ell$ es igual a la proyección (la componente) del gradiente de V en esa dirección. También podemos escribir la ecuación (2-50) como

Razón de incremento espacial de V en función de ∇V

$$\boxed{dV = (\nabla V)\cdot d\boldsymbol{\ell},} \tag{2-51}$$

donde $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\ell\, d\ell$. Ahora, dV en la ecuación (2-51) es el diferencial total de V como resultado de un cambio en posición (de P_1 a P_3 en la figura 2-16) y puede expresarse como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \ell_1} d\ell_1 + \frac{\partial V}{\partial \ell_2} d\ell_2 + \frac{\partial V}{\partial \ell_3} d\ell_3, \tag{2-52}$$

donde $d\ell_1$, $d\ell_2$ y $d\ell_3$ son las componentes del desplazamiento diferencial vectorial $d\boldsymbol{\ell}$ en un sistema de coordenadas determinado. En el caso de coordenadas cartesianas,

† En un tratamiento más formal se usarían los cambios ΔV y $\Delta\ell$, y la razón $\Delta V/\Delta\ell$ se convertiría en la derivada $dV/d\ell$ conforme $\Delta\ell$ se aproxime a cero. Evitaremos esta formalidad en favor de la sencillez.

‡ ∇ también se conoce como operador *nabla*.

$(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ y $d\ell_1$, $d\ell_2$ y $d\ell_3$ son, respectivamente, dx, dy y dz (véase la Ec. 2-23). Podemos escribir dV en la ecuación (2-52) como el producto punto de dos vectores, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dV &= \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{dy} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{a}_x\, dx + \mathbf{a}_y\, dy + \mathbf{a}_z\, dz) \\ &= \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot d\boldsymbol{\ell}. \end{aligned} \tag{2-53}$$

Al comparar la ecuación (2-53) con la ecuación (2-51) tenemos

∇V en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\nabla V = \mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z},} \tag{2-54}$$

o sea

$$\nabla V = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) V. \tag{2-55}$$

Con base en la ecuación (2-55), es conveniente considerar ∇ en coordenadas cartesianas como un operador diferencial vectorial.

$$\boxed{\nabla \equiv \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}.} \tag{2-56}$$

En coordenadas ortogonales generales (u_1, u_2, u_3) con coeficientes métricos (h_1, h_2, h_3), podemos definir ∇ como

$$\boxed{\nabla \equiv \left(\mathbf{a}_{u_1} \frac{\partial}{h_1\, \partial u_1} + \mathbf{a}_{u_2} \frac{\partial}{h_2\, \partial u_2} + \mathbf{a}_{u_3} \frac{\partial}{h_3\, \partial u_3}\right).} \tag{2-57}$$

Las expresiones de ∇V en coordenadas cilíndricas y esféricas se presentan en el Apéndice C.

EJEMPLO 2-9

La intensidad de campo electrostático $\mathbf{E}$ puede derivarse como el gradiente negativo de un potencial eléctrico escalar V; es decir, $\mathbf{E} = -\nabla V$. Determine $\mathbf{E}$ en el punto (1, 1, 0) si

a) $V = V_0 e^{-x} \operatorname{sen} \dfrac{\pi y}{4}$,

b) $V = E_0 R \cos\theta$.

SOLUCIÓN

a) Usamos la ecuación (2-54) para evaluar $\mathbf{E} = \nabla V$ en coordenadas cartesianas.

$$\mathbf{E} = -\left[\mathbf{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right]V_0e^{-x}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{4}$$

$$= \left(\mathbf{a}_x\operatorname{sen}\frac{\pi y}{4} - \mathbf{a}_y\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi y}{4}\right)V_0e^{-x}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}(1, 1, 0) = \left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y\dfrac{\pi}{4}\right)\dfrac{V_0}{\sqrt{2}} = \mathbf{a}_E E.$

donde

$$E = V_0\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)}.$$

$$\mathbf{a}_E = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi^2/16)}}\left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Aquí, V aparece como función de la coordenada esférica θ. En el caso de coordenadas esféricas tenemos $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$ y $(h_1, h_2, h_3) = (1, R, R \operatorname{sen}\theta)$; véase la tabla 2-1. Tenemos entonces, a partir de la ecuación (2-57),

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left[\mathbf{a}_R\frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{a}_\theta\frac{\partial}{R\partial\theta} + \mathbf{a}_\phi\frac{\partial}{R\operatorname{sen}\theta\,\partial\phi}\right]E_0R\cos\theta$$

$$= -(\mathbf{a}_R\cos\theta - \mathbf{a}_\theta\operatorname{sen}\theta)E_0.$$

Con base en la ecuación (2-47), la ecuación anterior se convierte de manera muy sencilla en $\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z E_0$ en coordenadas cartesianas. Esto tiene sentido, ya que un examen cuidadoso de V revela que $E_0R\cos\theta$ es, de hecho, igual a E_0z. En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_z\frac{\partial}{\partial z}(E_0z) = -\mathbf{a}_z E_0.$$

■ **EJERCICIO 2.10** Suponiendo $V \quad xy \quad 2yz$, encuentre, en el punto $P(2, 3, 6)$,

a) la dirección y la magnitud del máximo incremento de V, y

b) la razón espacial de disminución de V en la dirección hacia el origen

RESPUESTA: (a) $\mathbf{a}_x3 \quad \mathbf{a}_y10 \quad \mathbf{a}_z6$, (b) -60/7.

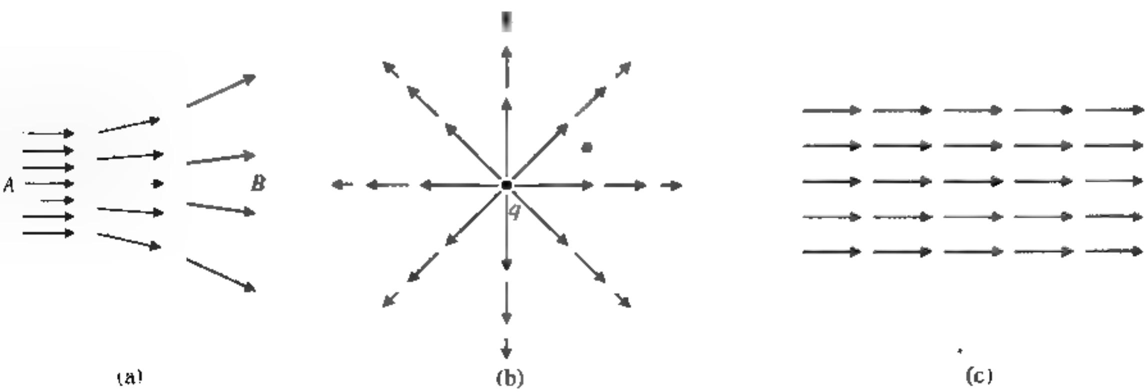
2-6 DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

En la sección previa consideramos las derivadas espaciales de un campo escalar, de lo cual obtuvimos la definición del gradiente. Pasamos ahora a las derivadas espaciales de un campo vectorial, de lo cual surgirán las definiciones de la ***divergencia*** y del ***rotacional*** de un vector. Analizaremos el significado de la divergencia en esta sección y el del rotacional en la sección 2-8. Ambos conceptos son muy importantes en el estudio del electromagnetismo.

En el estudio de campos vectoriales es conveniente representar gráficamente las variaciones de los campos mediante líneas de campo dirigidas, llamadas ***líneas de flujo***. Son líneas o curvas dirigidas que indican en cada punto la dirección del campo vectorial, como se ilustra en la figura 2-17. La magnitud del campo en un punto se representa o bien con la densidad o bien con la longitud de las líneas dirigidas en la vecindad del punto. En la figura 2-17(a) se muestra que el campo en la región A es más fuerte que en la región B, ya que hay mayor densidad de líneas dirigidas de igual longitud en la región A. En la figura 2-17(b), la reducción en la longitud de las flechas al alejarse del punto q indica un campo radial que es más fuerte en la región cercana a q. En la figura 2-17(c) se ilustra un campo uniforme.

La fuerza del campo vectorial de la figura 2-17(a) se mide con el número de líneas de flujo que pasan por una superficie unidad normal al vector. El flujo de un campo vectorial es análogo al flujo de un fluido incompresible, como el agua. En el caso de un volumen con una superficie cerrada, habrá un exceso de flujo que sale o entra por la superficie si el volumen contiene una fuente o un sumidero, respectivamente. Es decir, una divergencia neta positiva indica la presencia de una fuente de fluido en el interior del volumen, mientras que una divergencia neta negativa indica

FIGURA 2-17 Líneas de flujo de campos vectoriales.



la presencia de un sumidero. El flujo de salida neto del fluido por unidad de volumen es entonces una medida de la fuerza de la fuente encerrada En el campo uniforme ilustrado en la figura 2-17(c) hay cantidades iguales de flujo de entrada y salida que pasan por cualquier volumen cerrado que no contiene fuentes ni sumideros, produciendo una divergencia nula.

La divergencia de un campo vectorial A: definición física

Definimos la divergencia de un campo vectorial **A** *en un punto, abreviada div A, como el flujo neto de salida de* **A** *por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero.*

La divergencia de un campo vectorial A: definición matemática

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{A} \triangleq \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta v}.} \tag{2-58}$$

El numerador en la ecuación (2-58) es una integral de superficie. En realidad se trata de una integral doble en dos dimensiones, pero se escribe con el signo de una integral sencilla por cuestiones de sencillez. El círculo pequeño en el signo de la integral indica que la integral debe aplicarse a *toda* la superficie *S que encierra un volumen* En el integrando, el elemento diferencial de superficie vectorial, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_n ds$, tiene una magnitud ds y una dirección indicada por el vector unitario normal $\mathbf{a}_n$ que apunta *hacia fuera* del volumen encerrado. La integral de superficie encerrada representa el flujo de salida neto del campo vectorial **A**. La ecuación (2-58) es la definición general de div **A**, una *cantidad escalar* cuya magnitud puede variar de un punto a otro al variar **A**. Esta definición es válida para cualquier sistema de coordenadas; por supuesto, la expresión de div **A**, como la de **A**, dependerá de la elección del sistema de coordenadas. Derivaremos ahora la expresión de div **A** en coordenadas cartesianas.

Considere un volumen diferencial con lados Δx, Δy y Δz centrado alrededor de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en el campo de un vector **A**, como se ilustra en la figura 2-18 En coordenadas cartesianas, $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$. Queremos encontrar div **A** en el punto (x_0, y_0, z_0). Dado que el volumen diferencial tiene seis caras, la superficie integral del numerador de la ecuación (2-58) puede descomponerse en seis partes:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\int_{\substack{\text{cara}\\\text{anterior}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{posterior}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{derecha}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{izquierda}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{superior}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{inferior}}}\right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2-59}$$

En la cara anterior,

$$\begin{aligned} \int_{\substack{\text{cara}\\\text{anterior}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \mathbf{A}_{\substack{\text{cara}\\\text{anterior}}} \cdot \Delta\mathbf{s}_{\substack{\text{cara}\\\text{anterior}}} = \mathbf{A}_{\substack{\text{cara}\\\text{anterior}}} \cdot \mathbf{a}_x(\Delta y\, \Delta z) \\ &= A_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\Delta y\, \Delta z. \end{aligned} \tag{2-60}$$

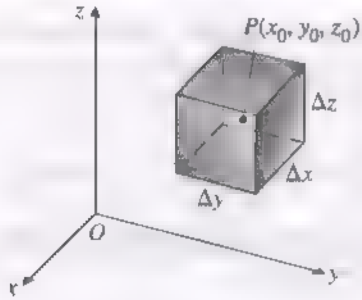


FIGURA 2-18 Volumen diferencial en coordenadas cartesianas.

La cantidad $A_x(x_0 + (\Delta x/2), y_0, z_0)$ puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de su valor en (x_0, y_0, z_0), de la siguiente manera:

$$A_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) = A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{términos de grado superior,} \tag{2-61}$$

donde los términos de grado superior (T.G.S.) contienen los factores $(\Delta x/2)^2$, $(\Delta x/2)^3$, etcétera. De forma similar, para la cara posterior,

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\text{cara}\\\text{posterior}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} &= \mathbf{A}_{\substack{\text{cara}\\\text{posterior}}}\cdot\Delta\mathbf{s}_{\substack{\text{cara}\\\text{posterior}}} = \mathbf{A}_{\substack{\text{cara}\\\text{posterior}}}\cdot(-\mathbf{a}_x\,\Delta y\,\Delta z)\\ &= -A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\Delta y\,\Delta z.\end{aligned} \tag{2-62}$$

El desarrollo en serie de Taylor de $A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)$ es

$$A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) = A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.} \tag{2-63}$$

Sustituyendo la ecuación (2-61) en la ecuación (2-60) y la ecuación (2-63) en la ecuación (2-62), para luego sumar las contribuciones, tenemos

$$\left[\int_{\substack{\text{cara}\\\text{anterior}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{posterior}}}\right]\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \text{T.G.S.}\right)\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x\,\Delta y\,\Delta z. \tag{2-64}$$

En este caso se ha eliminado por factorización una Δx de los términos de grado superior de las ecuaciones (2-61) y (2-63), pero todos los términos de grado superior de la ecuación (2-64) aún contienen potencias de Δx

Seguimos el mismo procedimiento para las caras derecha e izquierda, donde los cambios en coordenadas son $+\Delta y/2$ y $-\Delta y/2$, respectivamente, y $\Delta s = \Delta x \Delta z$, de esta manera tenemos

$$\left[\int_{\substack{\text{cara}\\\text{derecha}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{izquierda}}}\right]\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \text{ T.G.S.}\right)\bigg|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z. \tag{2-65}$$

En este caso los términos de grado superior contienen los factores Δy, $(\Delta y)^2$, etcétera. Para las caras superior e inferior tenemos

$$\left[\int_{\substack{\text{cara}\\\text{superior}}} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{inferior}}}\right]\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \text{ T.G.S.}\right)\bigg|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z, \tag{2-66}$$

donde los términos de grado superior contienen los factores Δz, $(\Delta z)^2$, etcétera. Después combinamos los resultados de las ecuaciones (2-64), (2-65) y (2-66) en la ecuación (2-59) para obtener

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\bigg|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{2-67}$$

$$+ \text{ términos de grado superior en } \Delta x,\ \Delta y \text{ y } \Delta z.$$

Puesto que $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$, la sustitución de la ecuación (2-67) en la ecuación (2-58) produce la expresión de div **A** en coordenadas cartesianas:

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.} \tag{2-68}$$

Los términos de grado superior desaparecen conforme el volumen diferencial $\Delta x \Delta y \Delta z$ se aproxima a cero. El valor de div **A** generalmente depende de la posición del punto donde se calcula. En la ecuación (2-68) eliminamos la notación (x_0, y_0, z_0) porque se aplica a cualquier punto donde están definidos **A** y sus derivadas parciales.

Con el operador diferencial vectorial del, ∇, definido por la ecuación (2-56), podemos escribir de otra manera la ecuación (2-68) como $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (léase "del punto **A**"); es decir,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \operatorname{div}\mathbf{A}.} \tag{2-69}$$

En un sistema general de coordenadas ortogonales (u_1, u_2, u_3), la ecuación (2-58) nos lleva a

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ en un sistema general de coordenadas ortogonales

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]} \tag{2-70}$$

La expresión de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas se presenta en el Apéndice C.

EJEMPLO 2-10

Calcule la divergencia del vector de posición de un punto arbitrario

SOLUCIÓN

Calcularemos la solución en coordenadas cartesianas y esféricas.

a) *Coordenadas cartesianas.* La expresión del vector de posición de un punto arbitrario (x, y, z) es

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z. \tag{2-71}$$

Si usamos la ecuación (2-68) tenemos

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{OP}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

b) *Coordenadas esféricas.* En este caso, el vector de posición es simplemente

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A} = \mathbf{a}_R R. \tag{2-72}$$

Su divergencia en coordenadas esféricas (R, θ, ϕ) puede obtenerse usando la ecuación (2-70) y la tabla 2-1, de la siguiente manera:

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas esféricas

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{R\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}.} \tag{2-73}$$

Sustituyendo la ecuación (2-72) en la ecuación (2-73) también obtenemos $\nabla \cdot (\overrightarrow{OP}) = 3$, como se esperaba.

■ **EJERCICIO 2.11** Resuelva el ejemplo 2-10 en coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 2-11

La densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ alrededor de un alambre muy largo que transporta una corriente es circunferencial e inversamente proporcional a la distancia al eje del alambre. Calcule $\nabla \cdot \mathbf{B}$.

SOLUCIÓN

Sea el alambre largo coincidente con el eje z en un sistema de coordenadas cilíndricas El problema establece que

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \frac{k}{r},$$

donde k es una constante. La divergencia de un campo vectorial en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) puede determinarse con la ecuación (2-70) y la tabla 2-1

$\nabla \cdot$ A en coordenadas cilíndricas

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}} \tag{2-74}$$

Ahora $B_\phi = k/r$ y $B_r = B_z = 0$. La ecuación (2-74) nos indica que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Campo solenoidal

En este caso tenemos un vector que no es constante pero cuya divergencia es cero. Un campo cuya divergencia es nula se denomina ***campo solenoidal***. En el capítulo 5 veremos que el campo magnético es solenoidal.

2-7 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

En la sección anterior definimos la divergencia de un campo vectorial como el flujo de salida neto por unidad de volumen. Podríamos esperar de manera intuitiva que ***la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial es igual al flujo de salida total del vector a través de la superficie que limita el volumen***; es decir,

Teorema de la divergencia

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.} \tag{2-75}$$

Esta identidad, que demostraremos en el párrafo siguiente, se conoce como ***teorema de la divergencia.***† Se aplica a cualquier volumen V limitado por una superficie S. La dirección de $d\mathbf{s}$ es siempre la de la *normal hacia el exterior*, perpendicular a la superficie ds y dirigida hacia fuera del volumen.

En el caso de un elemento de volumen diferencial muy pequeño Δv_j, limitado por una superficie s_j, la definición de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en la ecuación (2-58) da directamente

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j = \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2-76}$$

† También se conoce como ***teorema de Gauss***

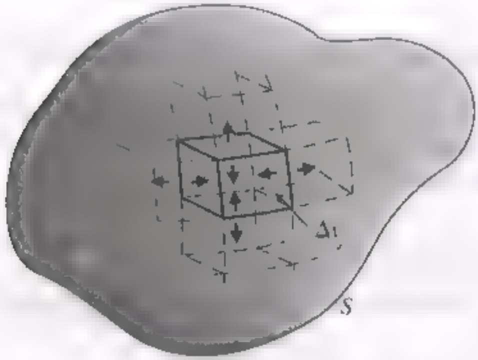


FIGURA 2-19 Volumen subdividido para la demostración del teorema de la divergencia

En el caso de un volumen arbitrario V, podemos subdividirlo en muchos, digamos N, volúmenes diferenciales pequeños, de los cuales Δv_j es típico. Este procedimiento se ilustra en la figura 2-19. Combinemos ahora las contribuciones de estos volúmenes diferenciales en ambos lados de la ecuación (2-76), para obtener

$$\lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N} (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j\right] = \lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N} \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right]. \tag{2-77}$$

El lado izquierdo de la ecuación (2-77) es, por definición, la integral de volumen de $\nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N} (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j\right] = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dv \tag{2-78}$$

Las integrales de superficie en el lado derecho de la ecuación (2-77) se suman para todas las caras de los elementos de volumen diferencial. Sin embargo, las contribuciones de las superficies internas de elementos adyacentes se cancelan, ya que en una superficie interna común las normales de salida de los elementos adyacentes apuntan en direcciones opuestas. Por lo tanto, la contribución neta del lado derecho de la ecuación (2-77) se debe únicamente a la superficie exterior S que encierra el volumen V; es decir,

$$\lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N} \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right] = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2-79}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-78) y (2-79) en la ecuación (2-77) se obtiene el teorema de divergencia de la ecuación (2-75).

El teorema de la divergencia es una identidad importante en el análisis vectorial. *Convierte una integral de volumen de la divergencia de un vector en una integral de superficie cerrada del vector y viceversa.* La usamos con frecuencia para establecer otros teoremas y relaciones en el electromagnetismo. Queremos destacar que, *aunque por cuestiones de sencillez se usa un signo de integral simple en ambos lados de la ecuación (2-75), las integrales de volumen y superficie representan en realidad integraciones triple y doble, respectivamente.*

EJEMPLO 2-12

Dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x x^2 + \mathbf{a}_y xy + \mathbf{a}_z yz$, verifique el teorema de divergencia para un cubo de lado unidad. El cubo está situado en el primer octante del sistema de coordenadas cartesianas, con un vértice en el origen.

SOLUCIÓN

Remítase a la figura 2-20. Primero se calcula la integral de superficie en las seis caras del cubo.

1. Cara anterior: $x = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_x\, dy\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara}\\\text{anterior}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1\int_0^1 dy\, dz = 1.$$

2. Cara posterior: $x = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_x\, dy\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara}\\\text{posterior}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

3. Cara izquierda: $y = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_y\, dx\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara}\\\text{izquierda}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

4. Cara derecha: $y = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_y\, dx\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara}\\\text{derecha}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1\int_0^1 x\, dx\, dz = \tfrac{1}{2}.$$

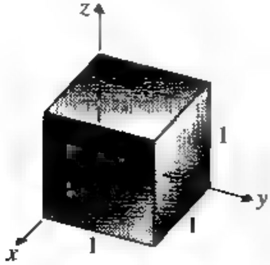
5. Cara superior: $z = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_z\, dx\, dy$;

$$\int_{\substack{\text{cara}\\\text{superior}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1\int_0^1 y\, dx\, dy = \tfrac{1}{2}.$$

6. Cara inferior: $z = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_z\, dx\, dy$;

$$\int_{\substack{\text{cara}\\\text{inferior}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

FIGURA 2-20 Cubo unidad (ejemplo 2-12).



Al sumar los seis valores anteriores tenemos

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 1 + 0 + 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 0 = 2. \tag{2-80}$$

La divergencia de **A** es entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 3x + y.$$

Por lo tanto,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + y)\, dx\, dy\, dz = 2, \tag{2-81}$$

lo que es igual al resultado de la integral de superficie cerrada de la ecuación (2-80). Por consiguiente, el teorema de la divergencia ha sido verificado.

EJEMPLO 2-13

Dado $\mathbf{F} = \mathbf{a}_R kR$, determine si el teorema de la divergencia es válido para la capa encerrada por las superficies esféricas en $R = R_1$ y $R = R_2 (R_2 > R_1)$, con centro en el origen, como se ilustra en la figura 2-21.

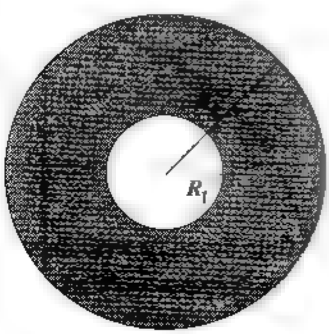
SOLUCIÓN

En este ejemplo, la región especificada tiene dos superficies, en $R = R_1$ y $R = R_2$.

En la superficie exterior: $R = R_2$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_R R_2^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\phi$;

$$\int_{\substack{\text{superficie}\\\text{exterior}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (kR_2) R_2^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi k R_2^3.$$

FIGURA 2-21 Región de una capa esférica (ejemplo 2-13).



En la superficie interior: $R = R_1$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_R R_1^2 \operatorname{sen} \theta d\theta\, d\phi$:

$$\int_{\substack{\text{superficie}\\ \text{interior}}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(kR_1)R_1^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = -4\pi k R_1^3.$$

En realidad, puesto que en ambos casos el integrando es independiente de θ o ϕ, la integral de una constante en una superficie esférica es simplemente la constante multiplicada por el área de la superficie ($4\pi R_2^2$ para la superficie externa y $4\pi R_1^2$ para la superficie interna), y no se requiere la integración. Al sumar los dos resultados obtenemos

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3). \tag{2-82}$$

Para encontrar la integral de volumen, primero determinamos $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para una $\mathbf{F}$ que sólo tenga una componente F_R. A partir de la ecuación (2-73) tenemos

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 F_R) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(kR^3) = 3k.$$

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es una constante, su integral de volumen es igual al producto de la constante por el volumen. El volumen de la capa entre las dos superficies esféricas con radios R_1 y R_2 es $4\pi(R_2^3 - R_1^3)/3$. Por consiguiente,

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dv = (\nabla\cdot\mathbf{F})V = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3), \tag{2-83}$$

que es el mismo resultado de la ecuación (2-82).

Este ejemplo muestra que el teorema de la divergencia es válido incluso si el volumen tiene agujeros; es decir, aunque el volumen esté encerrado por una superficie con conexiones múltiples.

■ **EJERCICIO 2.12** Dado un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z$,

a) encuentre el flujo de salida total a través de un cilindro circular alrededor del eje z con radio 2 y altura 4 centrado en el origen.

b) repita (a) para el mismo cilindro con la base coincidiendo con el plano xy

c) encuentre $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y verifique el teorema de la divergencia.

RESPUESTA: (a) 48π, (c) 3.

2-8 ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ es una medida de la fuerza de la fuente de flujo de A

En la sección 2-6 establecimos que el flujo de salida neto de un vector **A** a través de una superficie que limita un volumen indica la presencia de una fuente. Esta fuente puede denominarse *fuente de flujo* y div **A** es una medida de la fuerza de la fuente de flujo.

Hay otro tipo de fuente, llamada ***fuente de vórtice***, que ocasiona la circulación de un campo vectorial a su alrededor. La ***circulación neta*** (o simplemente ***circulación***) de un campo vectorial alrededor de una *trayectoria cerrada* se define como la integral de línea escalar del vector a lo largo de la trayectoria. Tenemos

$$\text{Circulación de } \mathbf{A} \text{ alrededor del contorno} \quad C \triangleq \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{2-84}$$

La ecuación (2-87) es una definición matemática. El significado físico de la circulación depende de qué tipo de campo representa el vector **A**. Si **A** es una fuerza que actúa sobre un objeto, su circulación será el trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto una vez alrededor del contorno; si **A** representa una intensidad de campo eléctrico, la circulación será una fuerza electromotriz alrededor de la trayectoria cerrada. El fenómeno familiar del agua que gira al salir por el desagüe de un lavabo es un ejemplo de un *sumidero vórtice* que ocasiona una circulación de la velocidad del fluido. Puede existir una circulación de **A** aunque div **A** = 0 (cuando no hay fuente de flujo).

EJEMPLO 2-14

Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$, encuentre su circulación alrededor de la trayectoria *OABO* mostrada en la figura 2-22.

SOLUCIÓN

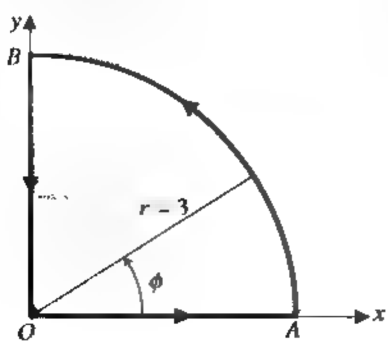
Dividamos la integral de circulación en tres partes:

$$\oint_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_O^A \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_B^O \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

A lo largo de la trayectoria *OA*: $y = 0$, $\mathbf{F} = -\mathbf{a}_y 2x$, $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_x dx$, $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$.

$$\int_O^A \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0.$$

FIGURA 2-22 Trayectoria para la integral de línea (ejemplos 2-14 y 2-16).



A lo largo de la trayectoria BO: $x = 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. $\int_B^O \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$.

A lo largo de la trayectoria AB: $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_x\,dx + \mathbf{a}_y\,dy$ (véase la Ec 2-23).

$\mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = xy\,dx - 2x\,dy$.

La ecuación del cuarto de círculo es $x^2 + y^2 = 9$ $(0 \leq x, y \leq 3)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_3^0 x\sqrt{9-x^2}\,dx - 2\int_0^3 \sqrt{9-y^2}\,dy \\ &= -\frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_3^0 - \left[y\sqrt{9-y^2} + 9\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{y}{3}\right]_0^3 \\ &= -9\left(1+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\oint_{OABO} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -9\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

■ **EJERCICIO 2.13** Encuentre la circulación en el sentido de las agujas del reloj del campo vectorial **F** presentado en el ejemplo 2-14, alrededor de una trayectoria cuadrada en el plano xy, centrada en el origen y con cuatro unidades en cada lado ($-2 \leq x \leq 2$ y $-2 \leq y \leq 2$).

RESPUESTA: 32.

La circulación se definió en la ecuación (2-84) como una integral de línea de un producto punto, de manera que su valor depende de la orientación del contorno C relativa al vector **A**. Para definir una función puntual, que es una medida de la fuerza de la fuente de vórtice, C debe ser muy pequeño y hay que orientarlo de manera que la circulación sea máxima. Definimos†

Definición matemática de un campo vectorial A

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \nabla\times\mathbf{A} \\ &\quad\triangleq \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\left[\mathbf{a}_n\oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}\right]_{\text{máx}}.\end{aligned}}$$

† En algunos libros, el rotacional de **A** se conoce como *curl* de **A** y se escribe curl **A**. $\nabla\times\mathbf{A}$ se lee "del cruz A".

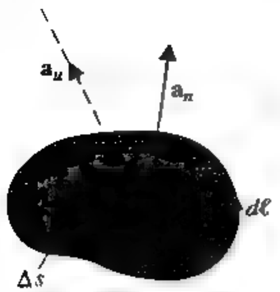


FIGURA 2-23 Relación entre $\mathbf{a}_n$ y $d\boldsymbol{\ell}$ al definir el rotacional.

Definición física de $\nabla \times \mathbf{A}$, una medida de la fuerza de la fuente de vórtice de A

En forma textual, la ecuación (2-85) establece que *el rotacional de un campo vectorial* **A**, *denotado por rot* **A** *o* $\nabla \times \mathbf{A}$, *es un vector cuya magnitud es la circulación neta máxima de* **A** *por unidad de área conforme el área tiende a cero y cuya dirección es la dirección de la normal al área cuando ésta está orientada de manera que la circulación neta sea máxima.* Puesto que la normal a un área puede apuntar en dos direcciones opuestas, seguimos la regla de la mano derecha: cuando los dedos de la mano derecha siguen la dirección de $d\boldsymbol{\ell}$, el pulgar apunta en la dirección $\mathbf{a}_n$; esto se ilustra en la figura 2-23. El rotacional de A es una función puntual vectorial. Su componente en cualquier otra dirección $\mathbf{a}_u$ es $\mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ y puede determinarse a partir de la circulación por unidad de área normal a $\mathbf{a}_u$ conforme el área se aproxima a cero.

$$\boxed{(\nabla \times \mathbf{A})_u = \mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta s_u \to 0} \frac{1}{\Delta s_u}\left(\oint_{C_u} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}\right),} \tag{2-86}$$

donde la dirección de la integración de línea alrededor del contorno C_u que limita el área Δs_u y la dirección $\mathbf{a}_u$ siguen la regla de la mano derecha.

Usamos ahora la ecuación (2-86) para hallar las tres componentes de $\nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas. Remítase a la figura 2-24, donde se muestra un área rectangular diferencial paralela al plano yz con lados Δy y Δz dibujados alrededor de un punto genérico $P(x_0, y_0, z_0)$. Tenemos $\mathbf{a}_u = \mathbf{a}_x$ y $\Delta s_u = \Delta y\, \Delta z$ y el contorno C_u consiste en los cuatro lados 1, 2, 3 y 4. De esta manera,

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta y\, \Delta z}\left(\oint_{\substack{\text{lados}\\1,2,3,4}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}\right). \tag{2-87}$$

En coordenadas cartesianas, $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$. Las contribuciones de los cuatro lados a la integral de línea son las siguientes:

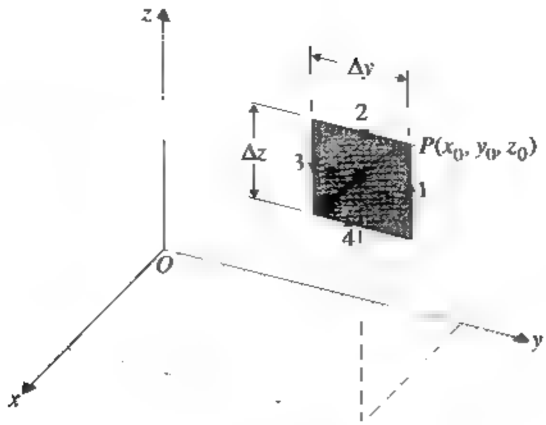


FIGURA 2-24 Determinación de $(\nabla \times \mathbf{A})_x$

Lado 1: $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_z \Delta z$, $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = A_z\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\Delta z$,

donde $A_z\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)$ puede desarrollarse en serie de Taylor:

$$A_z\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) = A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.}, \tag{2-88}$$

donde T.G.S. (términos de grado superior) contiene los factores $(\Delta y)^2$, $(\Delta y)^3$, etcétera. De esta manera,

$$\int_{\text{lado 1}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \left\{A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.}\right\}\Delta z. \tag{2-89}$$

Lado 3: $d\boldsymbol{\ell} = -\mathbf{a}_z \Delta z$, $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = A_z\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\Delta z$,

donde

$$A_z\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) = A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S}; \tag{2-90}$$

$$\int_{\text{lado 3}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.} \right\}(-\Delta z). \tag{2-91}$$

Al combinar las ecuaciones (2-89) y (2-91) tenemos

$$\int_{\text{lados 1 y 3}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} + \text{T.G.S.} \right)\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta y \, \Delta z. \tag{2-92}$$

Los T.G.S. de la ecuación (2-92) aún contienen potencias de Δy. De forma similar, puede verse que

$$\int_{\text{lados 2 y 4}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \text{T.G.S.} \right)\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta y \, \Delta z. \tag{2-93}$$

Si sustituimos las ecuaciones (2-92) y (2-93) en la ecuación (2-87) y observamos que los términos de grado superior tienden a cero cuando Δx y $\Delta y \to 0$, obtenemos la componente en x de $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \tag{2-94}$$

Una revisión más cuidadosa de la ecuación (2-94) revela un orden cíclico de x, y y z, el cual nos permite escribir las componentes en y y z de $\nabla \times \mathbf{A}$. La expresión completa del rotacional de $\mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas es

Expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).} \tag{2-95}$$

un escalar. Le será fácil recordar la ecuación (2-95) si la organiza en forma de determinante al igual que en el producto cruz de la ecuación (2-27).

Otra forma de $\nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.} \tag{2-96}$$

Para la derivación de $\nabla \times \mathbf{A}$ en otros sistemas de coordenadas se sigue el mismo procedimiento, pero los pasos son más complejos. La expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$ en un sistema general de coordenadas ortogonales curvilíneas (u_1, u_2, u_3) es

Expresión de ∇ × A en un sistema general de coordenadas ortogonales

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{u_1}h_1 & \mathbf{a}_{u_2}h_2 & \mathbf{a}_{u_3}h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}. \tag{2-97}$$

Las expresiones de $\nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas pueden obtenerse fácilmente a partir de la ecuación (2-97) usando los valores apropiados de u_1, u_2 y u_3 y sus coeficientes métricos h_1, h_2, h_3 listados en la tabla 2-1. Estas expresiones se presentan en el Apéndice C.

EJEMPLO 2-15

Demuestre que $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ si

a) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi(k/r)$ en coordenadas cilíndricas, donde k es una constante, o

b) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R f(R)$ en coordenadas esféricas, donde $f(R)$ es cualquier función de la distancia radial R.

SOLUCIÓN

a) En las coordenadas esféricas se aplica lo siguiente: $(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z)$; $h_1 = 1$, $h_2 = r$ y $h_3 = 1$. A partir de la ecuación (2-97) tenemos

Expresión de ∇ × A en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix}, \tag{2-98}$$

que para la $\mathbf{A}$ especificada, da

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \text{[illegible]} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

b) En las coordenadas esféricas se aplica lo siguiente: $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$; $h_1 = 1$, $h_2 = R$ y $h_3 = R \operatorname{sen} \theta$. Por lo tanto,

Expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas esféricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (R\operatorname{sen}\theta)A_\phi \end{vmatrix}, \tag{2-99}$$

y, para la A especificada,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Definición de un campo irrotacional o conservativo

Un campo vectorial cuyo rotacional es nulo se denomina ***campo irrotacional*** o ***conservativo***. Por consiguiente, los dos tipos de campos presentados en este ejemplo son conservativos. En el capítulo siguiente veremos que un campo electrostático es conservativo.

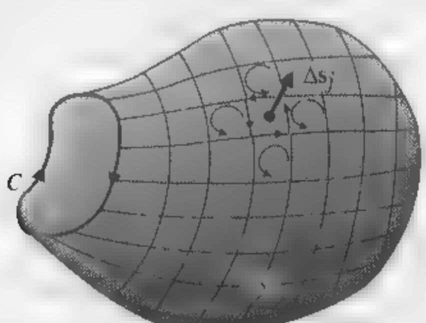
2-9 Teorema de Stokes

En el caso de un área diferencial muy pequeña Δs_j limitada por un contorno c_j, la definición de $\nabla \times \mathbf{A}$ en la ecuación (2-86) nos lleva a

$$(\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta \mathbf{s}_j) = \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{2-100}$$

Para obtener la ecuación (2-100) hemos realizado el producto punto en ambos lados de la ecuación (2-85) por $\mathbf{a}_n \Delta s_j$ o $\Delta \mathbf{s}_j$. En el caso de una superficie arbitraria S, podemos subdividirla en varias, digamos N, áreas diferenciales pequeñas. En la figura 2-25 se muestra este esquema con Δs_j como elemento diferencial típico. El lado izquierdo de

FIGURA 2-25 Área subdividida para la demostración del teorema de Stokes



la ecuación (2-100) es el flujo del vector $\nabla \times \mathbf{A}$ por el área Δs. Al sumar la contribución al flujo de todas las áreas diferenciales tenemos

$$\lim_{\Delta s_j \to 0} \sum_{j=1}^{N} (\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta \mathbf{s}_j) = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}. \tag{2-101}$$

Sumamos las integrales de línea alrededor de los contornos de todos los elementos superficiales representados por el lado derecho de la ecuación (2-100). Puesto que la parte común de los contornos de dos elementos adyacentes es recorrida en direcciones opuestas por dos contornos, la contribución neta a la integral de línea total de todas las partes comunes en el interior es cero y después de la sumatoria sólo queda la contribución del contorno exterior C que limita toda el área S.

$$\lim_{\Delta s_j \to 0} \sum_{j=1}^{N} \left(\oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{2-102}$$

Al combinar las ecuaciones (2-101) y (2-102) obtenemos el ***teorema de Stokes***:

$$\boxed{\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell},} \tag{2-103}$$

Teorema de Stokes

el cual establece que ***la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie abierta es igual a la integral de línea cerrada del vector a lo largo del contorno que limita la superficie.***

El teorema de Stokes convierte una integral de superficie del rotacional de un vector en una integral de línea del vector, y viceversa. El teorema de Stokes, al igual que el teorema de la divergencia, es una identidad importante en el análisis vectorial y lo usaremos con frecuencia para establecer otros teoremas y relaciones del electromagnetismo.

Si aplicamos la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{A}$ a una superficie cerrada, no habrá un contorno externo que limite la superficie, y la ecuación (2-103) nos indica que

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{2-104}$$

para cualquier superficie cerrada S. La geometría arbitraria de la figura 2-25 se ha elegido a propósito para destacar el hecho de que una aplicación no trivial del teorema de Stokes siempre implica una *superficie abierta con un borde*. La superficie abierta más sencilla sería un plano bidimensional o un disco con la circunferencia como contorno. Debemos recordar que las *direcciones relativas de $d\boldsymbol{\ell}$ y $d\mathbf{s}$* (su dirección denotada por $\mathbf{a}_n$) *siguen la regla de la mano derecha*; es decir, si los dedos de la mano derecha siguen la dirección de $d\boldsymbol{\ell}$, el pulgar apuntará en dirección de $\mathbf{a}_n$.

EJEMPLO 2-16

Dado $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$, verifique el teorema de Stokes sobre un cuarto de disco circular con radio 3 en el primer cuadrante, como se ilustró en la figura 2-22.

SOLUCIÓN

Usamos la ecuación (2 96) para encontrar $\nabla \times \mathbf{F}$ en coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2x & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}_z(2 + x).$$

Para la geometría indicada y la dirección designada de $d\boldsymbol{\ell}$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_n ds = \mathbf{a}_z dx\, dy$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\int_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (\nabla \times \mathbf{F})\cdot(\mathbf{a}_z\, dx\, dy) \\
&= \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} -(2 + x)\, dx\right] dy \\
&= -\int_0^3 [2\sqrt{9 - y^2} + \tfrac{1}{2}(9 - y^2)]\, dy \\
&= -\left[y\sqrt{9 - y^2} + 9\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{y}{3} + \frac{9}{2}y - \frac{y^3}{6}\right]_0^3 \\
&= -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Es *importante* usar los límites apropiados para las dos variables de integración. Podemos intercambiar el orden de la integración como

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{s} = \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-x^2}} -(2 + x)\, dy\right] dx$$

y obtener el mismo resultado; sin embargo, sería un error emplear 0 a 3 como intervalo de integración de x y y. (¿Sabe por qué?)

La integral de línea de $\mathbf{F}$ alrededor de la trayectoria $OABO$ del cuarto de disco circular, $\oint \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell}$, es la circulación determinada en el ejemplo 2-14, que es igual a la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{F}$ que obtuvimos previamente. Así queda verificado el teorema de Stokes.

■ **EJERCICIO 2.14** Dado $\mathbf{F}$ $\mathbf{a}_r\,\mathrm{sen}\,\phi + \mathbf{a}_\phi 3\cos\phi$ y la región de cuarto de círculo presentada en la figura 2-22,

a) determine $\oint_{OABO} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell}$, y
b) calcule $\nabla \times \mathbf{F}$ y verifique el teorema de Stokes

RESPUESTA: (a) 6, (b) $\mathbf{a}_z\left(\frac{2}{[illegible]}\cos\phi\right)$

2-10 DOS IDENTIDADES NULAS

En el estudio del electromagnetismo son muy importantes dos identidades que implican repetidas operaciones del operador *del*, sobre todo al introducir las funciones de potencial. Analizaremos estas identidades a continuación.

2-10.1 IDENTIDAD I

$$\boxed{\nabla \times (\nabla V) \equiv 0} \tag{2-105}$$

Una importante identidad nula

De forma textual, ***el rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es idénticamente cero.*** (La existencia de V y sus primeras derivadas en todos los puntos está implícita en esta identidad.)

La ecuación (2-105) puede demostrarse fácilmente en coordenadas cartesianas si usamos la ecuación (2-56) para ∇ y realizamos las operaciones indicadas. En términos generales, si se toma la integral de superficie de $\nabla \times (\nabla V)$ sobre cualquier superficie, el resultado es igual a la integral de línea de ∇V (o *circulación* de ∇V) a lo largo de la trayectoria cerrada que limita la superficie, como lo establece el teorema de Stokes:

$$\int_S [\nabla \times (\nabla V)] \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\nabla V) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{2-106}$$

Sin embargo, con base en la ecuación (2-51),

$$\oint_C (\nabla V) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C dV = 0. \tag{2-107}$$

La combinación de las ecuaciones (2-106) y (2-107) establece que la integral de superficie de $\nabla \times (\nabla V)$ sobre *cualquier* superficie es cero. Por consiguiente, el integrando debe anularse y se obtiene la identidad de la ecuación (2-105). Puesto que en la derivación no se especifica un sistema de coordenadas, la identidad es general e invariable para cualquier sistema de coordenadas.

La identidad I puede enunciarse también como sigue: ***Si el rotacional de un campo vectorial es nulo, entonces el campo vectorial puede expresarse como el gradiente de un campo escalar.*** Sea $\mathbf{E}$ un campo vectorial. Entonces, si $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, podemos definir un campo escalar V tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \tag{2-108}$$

El signo negativo no tiene importancia en lo que se refiere a la identidad I. (Se incluye en la ecuación (2-108) porque la relación va de acuerdo con una relación básica entre la *intensidad de campo eléctrico* $\mathbf{E}$ y el *potencial escalar eléctrico* V de la electrostática, algo que veremos en el siguiente capítulo. Por el momento no tiene importancia lo que representan $\mathbf{E}$ y V.) A partir de la sección 2-8 sabemos que un campo vectorial cuyo rotacional es nulo es un campo conservativo; por lo tanto, ***un campo vectorial irrotacional (conservativo) siempre puede expresarse como el gradiente de un campo escalar.***

■ **EJERCICIO 2.15** Demuestre la identidad de la ecuación (2-105) en coordenadas cartesianas

2-10.2 IDENTIDAD II

$$\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\equiv 0} \tag{2-109}$$

Otra importante identidad nula

De forma textual, ***la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es idénticamente cero.***

Podemos demostrar esta identidad sin hacer referencia a un sistema de coordenadas si tomamos la integral de volumen de $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})$ en el lado izquierdo. Al aplicar el teorema de la divergencia tenemos

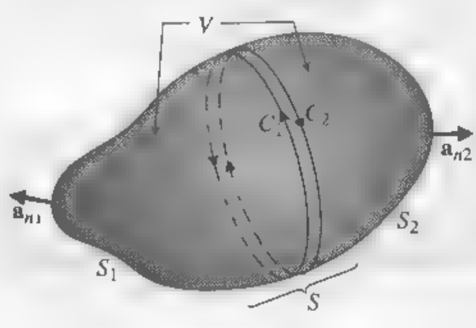
$$\int_V \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\,dv = \oint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s}. \tag{2-110}$$

Escojamos, por ejemplo, el volumen arbitrario V encerrado por una superficie S, como se ilustra en la figura 2-26. La superficie cerrada S puede dividirse en dos superficies abiertas, S_1 y S_2, conectadas por una frontera común que se ha dibujado dos veces como C_1 y C_2. Después se aplica el teorema de Stokes a la superficie S_1 limitada por C_1 y a la superficie S_2 limitada por C_2, escribiendo el lado derecho de la ecuación (2-110) como

$$\oint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{a}_{n1}\,ds + \int_{S_2} (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{a}_{n2}\,ds$$
$$= \oint_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{2-111}$$

Las normales $\mathbf{a}_{n1}$ y $\mathbf{a}_{n2}$ a las superficies S_1 y S_2 son normales *hacia afuera* y sus relaciones con las direcciones de las trayectorias de C_1 y C_2 siguen la regla de la mano derecha. Puesto que los contornos de C_1 y C_2 de hecho son la misma frontera comun

FIGURA 2-26 Volumen arbitrario V encerrado por una superficie S.



entre S_1 y S_2, las dos integrales de línea en el lado derecho de la ecuación (2-111) siguen la misma trayectoria en direcciones opuestas. Su suma es entonces cero y desaparece la integral de volumen de $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ del lado izquierdo de la ecuación (2-110) Puesto que esto se aplica a cualquier volumen arbitrario, la integral debe ser cero, como lo indica la identidad de la ecuación (2-109).

Otra forma de enunciar la identidad II es como sigue: ***Si la divergencia de un campo vectorial es nula, entonces el campo vectorial es solenoidal y puede expresarse como el rotacional de otro campo vectorial.*** Sea **B** un campo vectorial. Este enunciado alternativo establece que si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos definir un campo vectorial **A** tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2-112}$$

■ **EJERCICIO 2.16** Demuestre la identidad de la ecuación (2-109) en coordenadas cartesianas

2-11 CLASIFICACIÓN DE CAMPOS Y TEOREMA DE HELMHOLTZ

Campo cuya divergencia es nula ↔ campo solenoidal

Campo cuyo rotacional es nulo ↔ campo irrotacional (conservativo)

En secciones anteriores mencionamos que un *campo cuya divergencia es nula es solenoidal* y que *un campo cuyo rotacional es nulo es irrotacional (conservativo)*. Podemos clasificar los campos vectoriales de acuerdo con el hecho de que sean solenoidales o irrotacionales. Un campo vectorial **F** es

1. Solenoidal e irrotacional si

   $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad$ y $\quad \nabla \times \mathbf{F} = 0.$

   EJEMPLO: Un campo eléctrico estático en una región libre de carga.

2. Solenoidal pero no irrotacional si

   $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad$ y $\quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0.$

   EJEMPLO: Un campo magnético estático en un conductor que transporta corriente.

3. Irrotacional pero no solenoidal si

   $\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad$ y $\quad \nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0.$

   EJEMPLO: Un campo eléctrico estático en una región con carga

4. Ni solenoidal ni irrotacional si

   $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0 \quad$ y $\quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0.$

   EJEMPLO: Un campo eléctrico en un medio cargado con campo magnético variable con el tiempo.

El campo vectorial más general tiene una divergencia distinta de cero y un rotacional distinto de cero, y puede considerarse como la suma de un campo solenoidal y un campo irrotacional.

Teorema de Helmholtz

Teorema de Helmholtz: ***Un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todos los puntos.***[†]

El teorema de Helmholtz puede demostrarse como teorema matemático de manera general.[‡] Para nuestros fines, recordemos (véase la Sec. 2-8) que la divergencia de un vector es una medida de la fuerza de la fuente de flujo y que el rotacional de un vector es una medida de la fuerza de la fuente de vórtice. Cuando están especificadas la fuerza de la fuente de flujo y de la fuente de vórtice, es de esperar que el campo vectorial esté determinado.

Desarrollo axiomático por pasos del electromagnetismo

En los capítulos siguientes nos apoyaremos en el teorema de Helmholtz como elemento básico del desarrollo axiomático del electromagnetismo. Para cada uno de los temas de estudio (campos eléctricos estáticos, campos magnéticos estáticos y campos electromagnéticos variables con el tiempo), enunciaremos los postulados fundamentales (especificaremos la divergencia y el rotacional) de los vectores de campo básicos necesarios para el modelo electromagnético. A partir de los postulados fundamentales se desarrollarán otros teoremas y otras relaciones.

■ **EJERCICIO 2.17** Determine si los campos vectoriales siguientes son irrotacionales, solenoidales, ambos o ninguno.

a) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y y^2 + \mathbf{a}_z xz$,

b) $\mathbf{B} = r(\mathbf{a}_r \operatorname{sen}\phi + \mathbf{a}_\phi 2\cos\phi)$,

c) $\mathbf{C} = \mathbf{a}_x x - \mathbf{a}_y 2y + \mathbf{a}_z z$,

d) $\mathbf{D} = \mathbf{a}_R k/R$

RESPUESTA: (a) ninguno, (b) solenoidal, (c) ambos, (d) irrotacional.

PREGUNTAS DE REPASO

P.2-12 ¿Cuál es la diferencia entre una cantidad escalar y un campo escalar? ¿Entre una cantidad vectorial y un campo vectorial?

P.2-13 ¿Cuál es la definición física del gradiente de un campo escalar?

P.2-14 Exprese la razón de cambio espacial de un escalar en una dirección en términos de su gradiente.

P.2-15 ¿Cuál es la expresión del operador del, ∇, en coordenadas cartesianas?

P.2-16 ¿Cuál es la definición física de la divergencia de un campo vectorial?

P.2-17 Enuncie con palabras el teorema de la divergencia.

[†] Para ser más precisos, debemos exigir que la divergencia y el rotacional de un campo vectorial se anulen en el infinito en una región no limitada. Si el campo vectorial está confinado al interior de una región limitada por una superficie, entonces estará determinado si se especifican su divergencia y su rotacional en toda la región, así como la componente normal del vector sobre la superficie limitadora.

[‡] Véase, por ejemplo, G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Sec. 1.15, Academic Press, Nueva York, 1966.

P.2-18 ¿Cuál es la definición física del rotacional de un campo vectorial?

P.2-19 Enuncie con palabras el teorema de Stokes.

P.2-20 ¿Cuál es la diferencia entre un campo irrotacional y un campo solenoidal?

P.2-21 Enuncie con palabras el teorema de Helmholtz.

COMENTARIOS

1. Las reglas básicas del álgebra vectorial (suma, resta, producto punto y producto cruz de vectores) son independientes del sistema de coordenadas.
2. El gradiente de un campo escalar es una función puntual vectorial.
3. La divergencia de un campo vectorial es una función puntual escalar.
4. El rotacional de un campo vectorial es una función puntual vectorial.
5. No olvide dibujar un pequeño círculo en el signo de integración ($\oint$) al escribir una integral de línea cerrada o una integral de superficie sobre toda la superficie que encierra una región.
6. Las dos identidades nulas presentadas en las ecuaciones (2-105) y (2-109) y sus implicaciones son las bases para definir funciones de potencial en capítulos posteriores. Aprenda bien estas identidades.

RESUMEN

El análisis vectorial es una herramienta matemática esencial en el electromagnetismo. Proporciona una forma concisa de representar y expresar las relaciones de diversas cantidades en el modelo electromagnético. En este capítulo

- repasamos las reglas básicas de la suma y la resta de vectores y de los productos de vectores;
- explicamos las propiedades de los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas;
- presentamos el operador diferencial *del* (∇) y definimos el gradiente de un campo escalar, y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial,
- presentamos el teorema de la divergencia que convierte la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial en una integral de superficie cerrada del campo vectorial, y viceversa;
- presentamos el teorema de Stokes que transforma la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial en la integral de línea cerrada de un campo vectorial, y viceversa;
- introdujimos dos identidades nulas importantes de los campos vectoriales, y

- analizamos la clasificación de vectores y presentamos el teorema de Helmholtz, que usaremos como elemento básico en el desarrollo axiomático de los diversos temas del electromagnetismo.

PROBLEMAS

P.2-1 Un rombo es un paralelogramo equilátero. Denote dos lados vecinos del rombo con los vectores **A** y **B**.

a) Verifique que las dos diagonales sean **A** + **B** y **A** - **B**.

b) Demuestre que las diagonales son perpendiculares entre sí.

P.2-2 Si los tres lados de un triángulo arbitrario se denotan con los vectores **A**, **B** y **C** en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario, entonces la ecuación **A** + **B** + **C** = 0 es válida. Demuestre la ley de los senos.

Sugerencia: Obtenga el producto cruz de la ecuación separadamente por **A** y por **B** y examine las relaciones de magnitud de los productos.

P.2-3 Dados los tres vectores **A**, **B** y **C** siguientes:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 6 + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 3,$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 4 - \mathbf{a}_y 6 + \mathbf{a}_z 12,$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_z 2,$$

calcule

a) $\mathbf{a}_B$,

b) $|\mathbf{B} - \mathbf{A}|$,

c) la componente de **A** en la dirección de **B**,

d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$,

e) la componente de **B** en la dirección de **A**,

f) θ_{AB},

g) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, y

h) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ y $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

P.2-4 Los vectores unitarios $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ denotan las direcciones de los vectores **A** y **B** en el plano *xy* que forman ángulos α y β, respectivamente, con el eje x.

a) Obtenga una fórmula para desarrollar el coseno de la diferencia de dos ángulos, $\cos(\alpha - \beta)$ realizando el producto escalar $\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B$.

b) Obtenga una fórmula para $\text{sen}(\alpha - \beta)$ realizando el producto vectorial $\mathbf{a}_B \times \mathbf{a}_A$

P.2-5 Los tres vértices de un triángulo rectángulo están en $P_1(1, 0, 2)$, $P_2(-3, 1, 5)$ y $P_3(3, -4, 6)$.

a) Determine cuál de los vértices corresponde a un ángulo recto.

b) Encuentre el área del triángulo.

P.2-6 Dados dos puntos $P_1(\ 2, 0, 3)$ y $P_2(0, 4, -1)$, encuentre

a) la longitud de la línea que une P_1 y P_2 y
b) la distancia perpendicular desde el punto $P_3(3, 1, 3)$ hasta la línea.

P.2-7 Dado el vector $\mathbf{A}\ \ \mathbf{a}_x5\ \ \mathbf{a}_y2 + \mathbf{a}_z$, encuentre la expresión de

a) un vector unitario $\mathbf{a}_B$ tal que $\mathbf{a}_B \parallel \mathbf{A}$ y
b) un vector unitario $\mathbf{a}_C$ en el plano xy tal que $\mathbf{a}_C \perp \mathbf{A}$.

P.2-8 Descomponga el vector $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x2 - \mathbf{a}_y5 + \mathbf{a}_z3$ en dos componentes, $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, que sean respectivamente perpendicular y paralela a otro vector $\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y4$.

P.2-9 La ecuación (2-15) del ejemplo 2-2 describe los *productos escalares triples* de tres vectores **A**, **B** y **C**. Hay otro tipo importante de producto de tres vectores: el ***producto vectorial triple***, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Demuestre la siguiente relación desarrollando en coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).} \tag{2-113}$$

La ecuación (2-113) se conoce como ***regla "BAC-CAB"***.

P.2-10 Encuentre la componente del vector $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x z - \mathbf{a}_z x$ en el punto $P_1(-1, 0, -2)$ que esté dirigida hacia el punto $P_2(\sqrt{3}, 150°, 1)$.

P.2-11 La posición de un punto en coordenadas cilíndricas está indicada por $(3, 4\pi/3, -4)$. Especifique la situación del punto

a) en coordenadas cartesianas, y
b) en coordenadas esféricas.

P.2-12 Calcule los resultados de los siguientes productos de vectores unitarios:

a) $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x$,
b) $\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_y$,
c) $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R$,
d) $\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_x$,
e) $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_R$,
f) $\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_z$.

P.2-13 Exprese la componente r, A_r, de un vector **A** en (r_1, ϕ_1, z_1)

a) en función de A_x y A_y en coordenadas cartesianas, y
b) en función de A_R y A_θ en coordenadas esféricas.

P.2-14 Exprese la componente θ, E_θ, de un vector **E** en (R_1, θ_1, ϕ_1)

a) en función de E_x, E_y y E_z en coordenadas cartesianas, y
b) en función de E_r y E_z en coordenadas cilíndricas.

P.2-15 Dado un campo vectorial en coordenadas esféricas $\mathbf{F}\ \ \mathbf{a}_R(12/R^2)$,

a) encuentre **F** y F_y en el punto $P(-2,\ 4, 4)$ y

b) encuentre el ángulo que forma $\mathbf{F}$ con el vector $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 2 \quad \mathbf{a}_y 3 \quad \mathbf{a}_z 6$ en P

P.2-16 Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$, calcule la integral $\int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ desde $P_1(2, 1, -1)$ hasta $P_2(8, 2, -1)$

a) a lo largo de una línea recta que une los dos puntos, y

b) a lo largo de una parábola $x = 2y^2$.

¿$\mathbf{F}$ es un campo conservativo? Explique.

P.2-17 Denote con $\mathbf{R}$ el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$. Determine $\nabla(1/R)$

a) en coordenadas cartesianas, y

b) en coordenadas esféricas.

P.2-18 Dado el campo escalar $V = 2xy - yz + xz$,

a) determine el vector que representa la dirección y la magnitud de la razón de incremento máxima de V en el punto $P(2, -1, 0)$, y

b) determine la razón de incremento de V en el punto P en la dirección hacia el punto $Q(0, 2, 6)$.

P.2-19 En un sistema de coordenadas curvilíneas, la diferenciación de un vector base puede producir un nuevo vector en otra dirección.

a) Determine $\partial \mathbf{a}_r/\partial\phi$ y $\partial \mathbf{a}_\phi/\partial\phi$ en coordenadas cilíndricas.

b) Use los resultados de (a) para encontrar la fórmula de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas, usando las ecuaciones (2-57) y (2-31).

P.2-20 Calcule la divergencia de los siguientes campos radiales:

a) $f_1(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R R^n$,

b) $f_2(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R k/R^2$, donde k es una constante.

P.2-21 Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy + \mathbf{a}_y yz + \mathbf{a}_z zx$,

a) calcule el flujo de salida total a través de la superficie de un cubo unidad en el primer octante con un vértice en el origen, y

b) encuentre $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y verifique el teorema de la divergencia

P.2-22 Para una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r^2 + \mathbf{a}_z 2z$, verifique el teorema de la divergencia para la región cilíndrica circular encerrada por $r = 5$, $z = 0$ y $z = 4$.

P.2-23 Para una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z z$,

a) calcule $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ sobre la superficie de una región semiesférica que es la mitad superior de una esfera de radio 3 centrada en el origen, con la base plana coincidente con el plano xy,

b) encuentre $\nabla \cdot \mathbf{A}$, y

c) verifique el teorema de la divergencia.

P.2-24 Un campo vectorial $\mathbf{D} = \mathbf{a}_R(\cos^2\phi)/R^3$ existe en la región comprendida entre dos capas esféricas definidas por $R = 2$ y $R = 3$. Calcule

a) $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$, y

b) $\int \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv$.

P.2-25 Para una función escalar f y una función vectorial $\mathbf{A}$, demuestre que

$$\boxed{\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla f} \qquad (2\text{-}114)$$

en coordenadas cartesianas.

P.2-26 Suponga un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x(2x^2 + y^2) + \mathbf{a}_y(xy - y^2)$

a) Calcule $\oint \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ a lo largo del contorno triangular ilustrado en la figura 2-27.

b) Calcule $\oint (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s}$ sobre el área triangular.

c) ¿Puede expresarse $\mathbf{A}$ como el gradiente de un escalar? Explique.

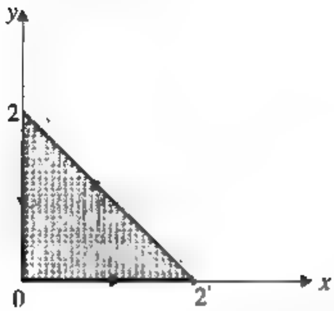


FIGURA 2-27 Gráfica para el problema P.2-26.

P.2-27 Suponga una función vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_r 5r \operatorname{sen}\phi + \mathbf{a}_\phi r^2 \cos\phi$.

a) Calcule $\oint \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ a lo largo del contorno $ABCDA$ en la dirección indicada en la figura 2-28.

b) Calcule $\nabla\times\mathbf{F}$.

c) Calcule $\int (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{s}$ sobre el área sombreada y compare el resultado con el que obtuvo en la parte (a).

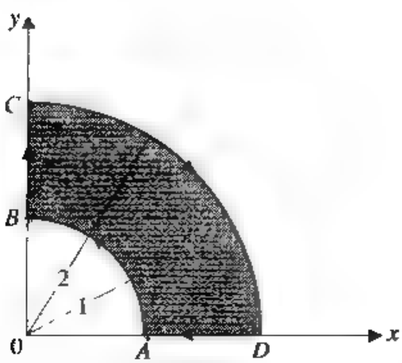


FIGURA 2-28 Gráfica para el problema P.2-27

P.2-28 Dada una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi 3 \operatorname{sen}(\phi/2)$, verifique el teorema de Stokes sobre la superficie de una semiesfera de radio 4 y su borde circular.

P.2-29 Para una función escalar f y una función vectorial $\mathbf{G}$, demuestre que

$$\boxed{\nabla \times (f\mathbf{G}) = f(\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla f) \times \mathbf{G}} \qquad (2\text{-}115)$$

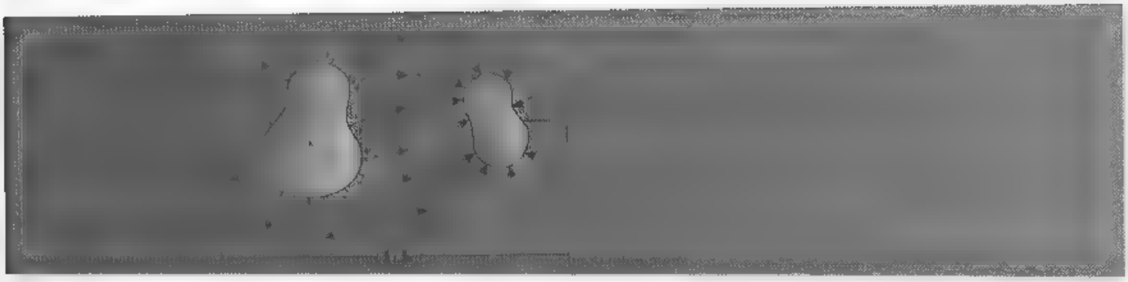
en coordenadas cartesianas.

P.2-30 Dada una función vectorial

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_x(x + 3y - c_1 z) + \mathbf{a}_y(c_2 x + 5z) + \mathbf{a}_z(2x - c_3 y + c_4 z),$$

a) determine c_1, c_2 y c_3 si $\mathbf{F}$ es irrotacional, y

b) determine c_4 si $\mathbf{F}$ también es solenoidal.



CAPÍTULO 3

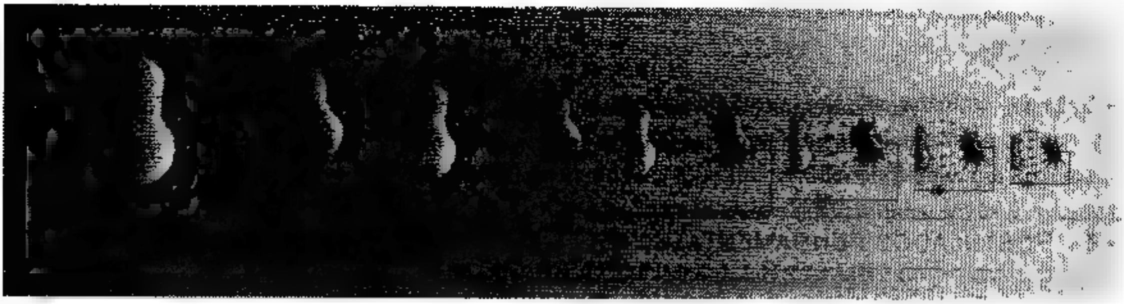
3-1 DESCRIPCIÓN GENERAL

Cuando caminamos por una alfombra en una habitación seca y tocamos el picaporte de metal de una puerta, en muchas ocasiones salta una chispa. Esto se debe a que las cargas estáticas inducidas en nuestro cuerpo como resultado de la fricción de las suelas de caucho contra la alfombra tienden a congregarse en los lugares puntiagudos, como la punta de los dedos, y saltar por el aire al picaporte de la puerta. La diferencia de potencial generada puede ser de miles de volts, pero no ocurren daños serios, excepto por el leve choque, ya que la cantidad de carga usualmente es muy pequeña. Otro ejemplo de la electricidad estática es el fenómeno de una prenda de vestir delgada que se adhiere a una prenda interior fabricada con otro material, debido a las cargas opuestas inducidas por el movimiento relativo y la fricción.

Ejemplos de la generación de electricidad estática

La electrostática es el estudio de los efectos de las cargas eléctricas en reposo y de los campos eléctricos que no cambian con el tiempo. Aunque es la más simple de las situaciones del electromagnetismo, es fundamental dominar este tema para comprender los modelos electromagnéticos más complicados. La explicación de muchos fenómenos naturales (como los relámpagos y el efecto corona) y los principios de varias aplicaciones industriales (como los osciloscopios, las impresoras de chorro de tinta, la xerografía, los teclados por efecto capacitivo y las pantallas de cristal líquido) se basan en la electrostática. Se han publicado varios libros sobre las aplicaciones especiales de la electrostática.†

† A. Klinkenberg y J. L. van der Minne, *Electrostatics in the Petroleum Industry*, Elsevier, Amsterdam, 1958. J. H. Dessauer y H. E. Clark, *Xerography and Related Processes*, Focal Press, Londres, 1965. A. D. Moore (Ed.), *Electrostatics and Its Applications*, John Wiley, Nueva York, 1973. C. E. Jewett, *Electrostatics in the Electronics Environment*, John Wiley, Nueva York, 1976. J. C. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wiley, Nueva York, 1986.



Campos eléctricos estáticos

Desde el punto de vista histórico, las relaciones cuantitativas de la electrostática comenzaron con los experimentos de Charles Augustin de Coulomb, quien formuló en 1785 lo que se conoce ahora como *ley de Coulomb*. Más tarde, Karl F. Gauss desarrolló la *ley de Gauss* y otros científicos e ingenieros contribuyeron con importantes resultados adicionales relacionados con las cargas eléctricas estacionarias. La teoría de los campos eléctricos estáticos fue desarrollándose gradualmente. El método que consiste en comenzar con leyes experimentales y sintetizarlas en la forma de las ecuaciones de Maxwell es un *enfoque inductivo*. Este enfoque es el que usualmente se sigue en un curso de introducción a la física.

Enfoque deductivo

Debido a que los diversos resultados fueron obtenidos por individuos no coordinados y en tiempos diferentes, el enfoque inductivo tiende a parecer fragmentado y poco coherente. En este libro preferimos un *enfoque deductivo*, el cual, como señalamos en la sección 1-2, es más conciso y lógico, pues nos permite desarrollar el electromagnetismo de forma ordenada.

Para el estudio de los campos eléctricos estáticos en el espacio libre definimos un vector de intensidad de campo eléctrico especificando su divergencia y su rotacional. Éstos son los postulados fundamentales a partir de los cuales podemos *derivar* la ley de Coulomb y la ley de Gauss, que juntas pueden usarse para determinar el campo eléctrico debido a diversas distribuciones de carga. Después examinaremos los efectos de los conductores y los dieléctricos en los campos electrostáticos. Se presentará el potencial electrostático y se explorarán las relaciones entre las fuerzas y la energía electrostática. En aquellas situaciones donde no se conocen las distribuciones exactas de carga en todos los puntos, pero deben satisfacerse ciertas condiciones en la frontera (condiciones de contorno), es necesario emplear técnicas de resolución adicionales

Analizaremos el procedimiento para resolver ecuaciones sencillas de Poisson y Laplace y explicaremos el método de imágenes.

3-2 POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTRÓSTÁTICA EN EL ESPACIO LIBRE

Para la electrostática en el espacio libre sólo tenemos que considerar una de las cuatro cantidades de campo vectoriales fundamentales del modelo electromagnético analizado en la sección 1-2, específicamente, la intensidad de campo eléctrico **E**. Así mismo, en nuestra formulación sólo entra la permitividad del espacio libre, ϵ_0, de las tres constantes universales mencionadas en la sección 1-3.

Intensidad de campo eléctrico

La ***intensidad de campo eléctrico*** se define como la fuerza por unidad de carga que experimenta una carga de prueba estacionaria muy pequeña al colocarse en una región donde existe un campo eléctrico. Es decir,

$$\boxed{\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad (\text{V/m}).} \tag{3-1}$$

La unidad en el SI de E es (V/m).

La intensidad de campo eléctrico **E** es entonces proporcional a la fuerza **F** y tiene su misma dirección. Si **F** se mide en newtons (N) y la carga q en coulombs (C), **E** tiene unidades de newtons por coulomb (N/C), lo cual equivale a volts por metro (V/m). Por supuesto, la carga de prueba q no puede ser cero en la práctica, de hecho, no puede ser menor que la carga de un electrón. Sin embargo, el carácter finito de la carga de prueba no hará que el campo **E** medido difiera notablemente de su valor calculado si la carga de prueba es lo suficientemente pequeña como para no perturbar la distribución de carga de la fuente. Una relación inversa de la ecuación (3-1) da la fuerza **F** sobre una carga estacionaria q en un campo eléctrico **E**:

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad (\text{N}).} \tag{3-2}$$

Los dos postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre especifican la divergencia y el rotacional de **E**. Éstos son

Divergencia de un E electrostático en el espacio libre

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{3-3}$$

y

El rotacional del E electrostático es nulo.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0.} \tag{3-4}$$

En la ecuación (3-3), ρ_v es la densidad volumétrica de carga libre (C/m^3) y ϵ_0 es la permitividad del espacio libre, expresada en la ecuación (1-11). La ecuación (3-4)

establece que ***los campos eléctricos estáticos son irrotacionales***, mientras que la ecuación (3-3) implica que un campo eléctrico estático no es solenoidal a menos que $\rho_v = 0$. Estos dos postulados son concisos, sencillos e independientes del sistema de coordenadas además, pueden usarse para derivar otras relaciones, leyes y teoremas de la electrostática.

Las ecuaciones (3-3) y (3-4) son relaciones puntuales; es decir, se aplican en todos los puntos del espacio. Se conocen como la forma diferencial de los postulados de la electrostática, ya que las operaciones de divergencia y rotacional implican derivadas espaciales. En las aplicaciones prácticas normalmente nos interesa el campo total debido a un conjunto o una distribución de cargas. Esto puede obtenerse de manera más conveniente con una forma integral de la ecuación (3-3). Si tomamos la integral de volumen en ambos lados de la ecuación (3-3) para un volumen arbitrario V, tenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v\, dv. \tag{3-5}$$

Teniendo en cuenta el teorema de la divergencia de la ecuación (2-75), la ecuación (3-5) se convierte en

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0},} \tag{3-6}$$

donde Q es la carga total contenida en el volumen V limitado por la superficie S. La ecuación (3-6) es una forma de la ***ley de Gauss***, una de las relaciones más importantes de la electrostática. La analizaremos con mayor detalle en la sección 3-4, junto con algunos ejemplos ilustrativos.

También puede obtenerse una forma integral de la relación del rotacional de la ecuación (3-4), integrando $\nabla \times \mathbf{E}$ sobre una superficie abierta e invocando el teorema de Stokes expresado en la ecuación (2-103). Tenemos entonces

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0.} \qquad \text{(en el espacio libre)} \tag{3-7}$$

La integral de línea se aplica a un contorno cerrado arbitrario C. La ecuación (3-7) establece que ***la integral de línea escalar (o circulación) de la intensidad de campo eléctrico estático a lo largo de una trayectoria cerrada es nula.*** El producto escalar $\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ integrado a lo largo de cualquier trayectoria es el voltaje entre los extremos de dicha trayectoria. Por consiguiente, la ecuación (3-7) es una expresión de la ***ley del voltaje de Kirchhoff*** de la teoría de circuitos, que indica que ***la suma algebraica de las caídas de voltaje a lo largo de un circuito cerrado es cero.***

Ley del voltaje de Kirchhoff

La ecuación (3-7) también implica que la integral de línea escalar del campo irrotacional $\mathbf{E}$ a lo largo de cualquier trayectoria de un punto (digamos P_1) a otro (digamos P_2)

es cancelada por la de P_2 a P_1 *a lo largo de cualquier otra trayectoria*; es decir, *la integral de línea de un campo eléctrico estático depende únicamente de los puntos inicial y final.* Como veremos en la sección 3-5, la integral de línea de **E** del punto P_1 a P_2 representa el trabajo realizado *por* **E** para mover una unidad de carga de P_1 a P_2. Por lo tanto, la ecuación (3-7) nos dice que el trabajo efectuado al mover una unidad de carga a lo largo de una trayectoria cerrada de un campo electrostático es cero. Es un enunciado de la conservación del trabajo o la energía en un campo electrostático. Es por esta razón que podemos afirmar que un campo irrotacional es un campo conservativo.[†]

A continuación repetimos los postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre porque forman la base para construir la estructura de la electrostática.

Dos postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre

Postulados de la electrostática en el espacio libre	
Forma diferencial	Forma integral
$\nabla\cdot\mathbf{E}=\dfrac{\rho_v}{\epsilon_0}$	$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\dfrac{Q}{\epsilon_0}$
$\nabla\times\mathbf{E}=0$	$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}=0$

Consideramos que estos postulados, al igual que el principio de la conservación de carga, son representaciones de las leyes de la naturaleza. En la sección siguiente derivaremos la ley de Coulomb.

3-3 Ley de Coulomb

Consideremos el problema electrostático más simple, que consiste en una sola carga puntual, q, en reposo en el espacio libre ilimitado. Para hallar la intensidad de campo eléctrico creado por q, dibujamos una superficie esférica de radio arbitrario R con centro en q; es decir, una superficie cerrada hipotética (una *superficie gaussiana*) alrededor de la fuente, a la cual se aplica la ley de Gauss para determinar el campo. Puesto que una carga puntual no tiene direcciones preferentes, su campo eléctrico debe ser radial en todas partes y tener la misma intensidad en todos los puntos de la superficie esférica. Al aplicar la ecuación (3-6) a la figura 3-1(a) tenemos

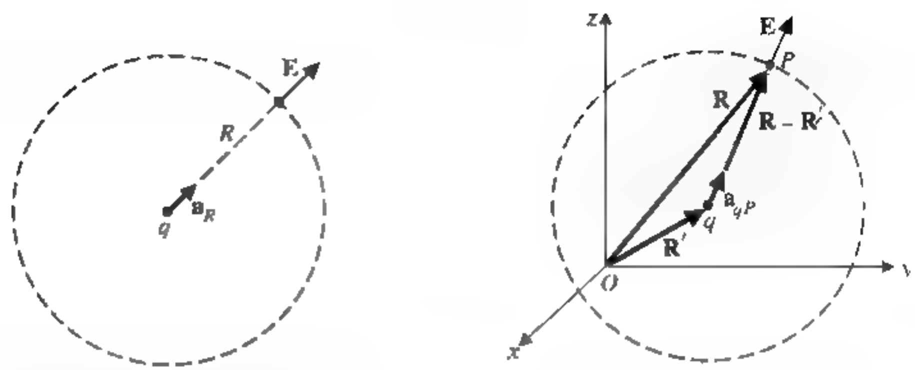
Una superficie gaussiana es una superficie hipotética sobre la cual se aplica la ley de Gauss.

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\oint_S (\mathbf{a}_R E_R)\cdot \mathbf{a}_R\, ds=\frac{q}{\epsilon_0},$$

o sea

$$E_R\oint_S ds=E_R(4\pi R^2)=\frac{q}{\epsilon_0}.$$

[†] Recordamos de la mecánica que el campo gravitacional es un campo conservativo.



(a) Carga puntual en el origen.

(b) Carga puntual fuera del origen

FIGURA 3-1 Intensidad de campo eléctrico debida a una carga puntual

Por lo tanto

Intensidad de campo eléctrico de una carga puntual aislada situada en el origen

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R = \mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{(V/m)}.} \tag{3-8}$$

La ecuación (3-8) nos indica que ***la intensidad de campo eléctrico de una carga puntual positiva tiene dirección radial hacia afuera y magnitud proporcional a la carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga.*** Esta fórmula básica es muy importante en la electrostática. La representación gráfica de las líneas de flujo de la intensidad de campo eléctrico debido a una carga puntual positiva q es como se muestra en la figura 2-17(b).

■ **EJERCICIO 3.1** Compruebe que el campo **E** de la ecuación (3-8) satisface la ecuación (3-4) y que por tanto es conservativo.

Si la carga q no está situada en el origen del sistema de coordenadas elegido, habrá que efectuar cambios apropiados al vector unitario $\mathbf{a}_R$ y la distancia R para reflejar la posición de la carga y el punto donde se determinará **E**. Sea $\mathbf{R}'$ el vector de posición de q y **R** el del punto campo P, como se ilustra en la figura 3-1(b). Entonces, a partir de la ecuación (3-8),

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{a}_{qP} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2}, \tag{3-9}$$

donde $\mathbf{a}_{qP}$ es el vector unitario trazado de q a P. Puesto que

$$\mathbf{a}_{qP} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}'}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}, \tag{3-10}$$

tenemos

Intensidad de campo eléctrico de una carga puntual aislada en una posición arbitraria

$$\boxed{\mathbf{E}_P = \frac{q(\mathbf{R}-\mathbf{R}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|^3} \qquad \text{(V/m)}.} \tag{3-11}$$

EJEMPLO 3-1

Determine la intensidad de campo eléctrico en $P(-0.2, 0, -2.3)$ debida a una carga puntual de $+5$ (nC) en $Q(0.2, 0.1, -2.5)$ en el aire. Todas las dimensiones están en metros.

SOLUCIÓN

El vector de posición del punto campo P es

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OP} = -\mathbf{a}_x 0.2 - \mathbf{a}_z 2.3.$$

El vector de posición del punto carga Q es

$$\mathbf{R}' = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}_x 0.2 + \mathbf{a}_y 0.1 - \mathbf{a}_z 2.5.$$

La diferencia es

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}' = -\mathbf{a}_x 0.4 - \mathbf{a}_y 0.1 + \mathbf{a}_z 0.2,$$

que tiene una magnitud

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = [(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2]^{1/2} = 0.458\,\text{(m)}.$$

Al sustituir en la ecuación (3-11) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_P &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{Q(\mathbf{R}-\mathbf{R}')}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|^3} \\
&= (9\times10^9)\,\frac{5\times10^{-9}}{0.458^3}\,(-\mathbf{a}_x 0.4 - \mathbf{a}_y 0.1 + \mathbf{a}_z 0.2) \\
&= 214.5(-\mathbf{a}_x 0.873 - \mathbf{a}_y 0.218 + \mathbf{a}_z 0.437) \quad \text{(V/m)}.
\end{aligned}$$

La cantidad entre paréntesis es el vector unitario $\mathbf{a}_{QP} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}')/|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|$ y $\mathbf{E}_P$ tiene una magnitud de 214.5 (V/m).

NOTA: La permitividad del aire es esencialmente la misma que la del espacio libre. El factor $1/(4\pi\epsilon_0)$ aparece con frecuencia en la electrostática. A partir de la ecuación (1-11) sabemos que $\epsilon_0 = 1/(c^2\mu_0)$. Sin embargo, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m) en unidades del SI, de manera que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 10^{-7}c^2 \qquad \text{(m/F)} \tag{3-12}$$

exactamente. Si usamos el valor aproximado $c = 3 \times 10^8$ (m/s), entonces $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9$ (m/F).

Cuando se coloca una carga puntual q_2 en el campo creado por otra carga puntual q_1, q_2 *experimenta* una fuerza $\mathbf{F}_{12}$ debida a la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}_{12}$ de q_1 en q_2. Al combinar las ecuaciones (3-2) y (3-9) tenemos

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = q_2\mathbf{E}_{12} = \mathbf{a}_{12}\,\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \qquad (\mathrm{N}).} \tag{3-13}$$

Ley de Coulomb

La ecuación (3-13) es una forma matemática de la ***ley de Coulomb***. Establece que ***la fuerza entre dos cargas puntuales es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*** En la ecuación (3-13) observamos que $\mathbf{F}_{12}$ es una fuerza de repulsión cuando q_1 y q_2 son ambas positivas o negativas (la dirección de $\mathbf{a}_{12}$ es de q_1 a q_2 y el producto q_1q_2 es positivo) y una fuerza de atracción cuando q_1 y q_2 tienen signos opuestos (el producto q_1q_2 es negativo).

■ EJERCICIO 3.2 Dadas dos cargas puntuales, $q_1 = 10(\mu\mathrm{C})$ en (2, 0, −4) y $q_2 = -60(\mu\mathrm{C})$ en (0, 1, -2), determine

a) la intensidad de campo eléctrico en q_1 debido a q_2 y

b) la magnitud de la fuerza experimentada por q_1

Todas las dimensiones se dan en metros.

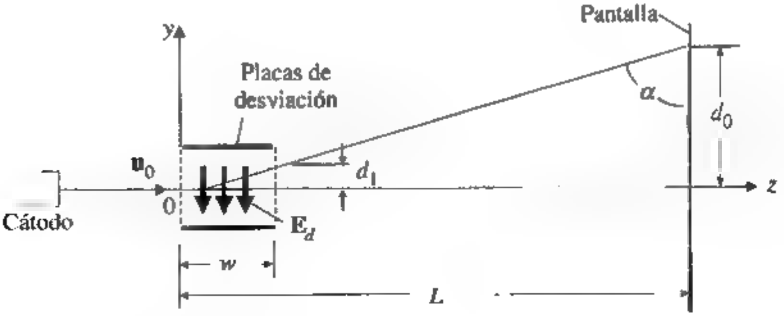
RESPUESTA: (a) $-20(\mathbf{a}_x 2 + \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z 2)$ (kV/m), (b) 0.6 (N), atracción

EJEMPLO 3-2

Sistema de desviación electrostática de un ORC

En la figura 3-2 se ilustra el sistema de desviación electrostática de un osciloscopio de rayos catódicos. Los electrones de un cátodo calentado reciben una velocidad inicial $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}_z u_0$ de un ánodo cargado positivamente (no ilustrado). Los electrones entran en $z = 0$ en una región de placas de desviación donde se mantiene un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_d = -\mathbf{a}_y E_d$ en un ancho w. Ignore los efectos gravitatorios y encuentre la desviación vertical de los electrones en la pantalla fluorescente en $z = L$.

FIGURA 3-2 Sistema de desviación electrostática de un osciloscopio de rayos catódicos (ejemplo 3-2).



SOLUCIÓN

Puesto que no hay fuerza en la dirección z en la región $z > 0$, se mantiene la velocidad horizontal u_0. El campo $\mathbf{E}_d$ ejerce una fuerza sobre los electrones, cada uno de los cuales transporta una carga $-e$, ocasionando una desviación en la dirección y:

$$\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E}_d = \mathbf{a}_y eE_d.$$

A partir de la segunda ley del movimiento de Newton, en la dirección vertical tenemos

$$m\frac{du_y}{dt} = eE_d,$$

donde m es la masa del electrón. Al integrar ambos lados obtenemos

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}E_d t,$$

donde la constante de integración se considera cero porque $u_y = 0$ en $t = 0$. Integramos de nuevo para obtener

$$y = \frac{e}{2m}E_d t^2.$$

La constante de integración es nuevamente cero porque $y = 0$ en $t = 0$. Observe que los electrones tienen una trayectoria parabólica entre las placas de desviación. Al salir de las placas de desviación, $t = w/u_0$.

$$d_1 = \frac{eE_d}{2m}\left(\frac{w}{u_0}\right)^2$$

y

$$u_{y1} = u_y\left(\text{en } t = \frac{w}{u_0}\right) = \frac{eE_d}{m}\left(\frac{w}{u_0}\right).$$

Cuando los electrones llegan a la pantalla han viajado una distancia horizontal adicional de $(L - w)$, para lo cual requirieron $(L - w)/u_0$ segundos. En este tiempo hay una desviación vertical adicional

$$d_2 = u_{y1}\left(\frac{L-w}{u_0}\right) = \frac{eE_d}{m}\frac{w(L-w)}{u_0^2}.$$

Por lo tanto, la desviación en la pantalla es

$$d_0 = d_1 + d_2 = \frac{eE_d}{mu_0^2}w\left(L - \frac{w}{2}\right).$$

Las impresoras de chorro de tinta empleadas para la salida de computadores, al igual que los osciloscopios de rayos catódicos, son dispositivos basados en el principio

Principio de operación de las impresoras de chorro de tinta

de desviación electrostática de un flujo de partículas cargadas. Se pasan gotas diminutas de tinta a través de una boquilla vibratoria controlada por un transductor piezoeléctrico. Se suministran cantidades variables de carga a las gotas de tinta dependiendo de la salida del computador. Las gotas de tinta cargadas pasan por un par de placas de desviación donde existe un campo eléctrico estático uniforme. La cantidad de desviación de la gota depende de su carga. Conforme la cabeza de impresión se mueve en dirección horizontal, las gotas de tinta salen de la boquilla y entran en contacto con la superficie de impresión en diversas posiciones, formando así la imagen impresa.

3-3.1 CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS DISCRETAS

Suponga que un grupo de n cargas puntuales discretas situadas en diferentes posiciones crea un campo electrostático. Puesto que la intensidad de campo eléctrico es una función lineal de (proporcional a) $\mathbf{a}_R q/R^2$, es aplicable el principio de superposición, y el campo total $\mathbf{E}$ en un punto es la *suma vectorial* de los campos causados por todas las cargas individuales. Denotemos las posiciones de las cargas q_1, q_2, ..., q_n (puntos fuente) con los vectores de posición $\mathbf{R}_1'$, $\mathbf{R}_2'$, ..., $\mathbf{R}_n'$, y la posición del punto campo donde se calculará la intensidad eléctrica, con $\mathbf{R}$.† A partir de la ecuación (3-11) podemos escribir

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1')}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1'|^3} + \frac{q_2(\mathbf{R}-\mathbf{R}_2')}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_2'|^3} + \cdots + \frac{q_n(\mathbf{R}-\mathbf{R}_n')}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_n'|^3}\right],$$

o

Intensidad de campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales discretas

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(\mathbf{R}-\mathbf{R}_k')}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_k'|^3} \qquad \text{(V/m)}.} \tag{3-14}$$

Aunque la ecuación (3-14) es una expresión concisa, es complicada de usar porque muchas veces es necesario sumar vectores con diferentes magnitudes y direcciones. Una estrategia más sencilla sería encontrar $\mathbf{E}$ a partir del potencial eléctrico. Veremos esto en la sección 3-5.

3-3.2 CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Podemos obtener el campo eléctrico creado por una distribución de carga continua integrando (superponiendo) la contribución de un elemento de carga a toda la distribución de carga. Remítase a la figura 3-3, donde se presenta una distribución de carga

† Cuando sea necesario distinguir la notación de la posición de un punto fuente de la de un punto campo, seguiremos el convenio aceptado de usar coordenadas con prima para la primera y coordenadas sin prima para la segunda.

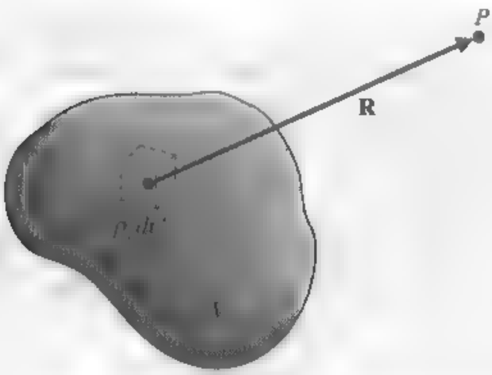


FIGURA 3-3 Campo eléctrico debido a una distribución de carga continua

de volumen. La densidad volumétrica de carga ρ_v (C/m^3) es, en términos generales, una función de las coordenadas. Ya que un elemento diferencial de carga se comporta como una carga puntual, la contribución a la intensidad de campo eléctrico en el punto fuente P de la carga $\rho_v dv'$ en un elemento de volumen diferencial dv' es

$$d\mathbf{E} = \mathbf{a}_R \frac{\rho_v \, dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \tag{3-15}$$

Tenemos

Intensidad de campo eléctrico de una distribución volumétrica

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_v}{R^2} \, dv' \qquad \text{(V/m)}.} \tag{3-16}$$

Si la carga está distribuida sobre una superficie con densidad superficial de carga ρ_s(C/m^2), escribimos

Intensidad de campo eléctrico de una distribución superficial de carga

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_s}{R^2} \, ds' \qquad \text{(V/m)}.} \tag{3-17}$$

Para una carga lineal tenemos

Intensidad de campo eléctrico de una distribución lineal de carga

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_\ell}{R^2} \, d\ell' \qquad \text{(V/m)},} \tag{3-18}$$

donde ρ_ℓ(C/m) es la densidad de una línea de carga y L' es la línea (no necesariamente recta) por la cual se distribuye la carga.

EJEMPLO 3-3

Determine la intensidad de campo eléctrico de una línea de carga recta, infinitamente larga, con densidad uniforme ρ_ℓ(C/m), en el aire.

SOLUCIÓN

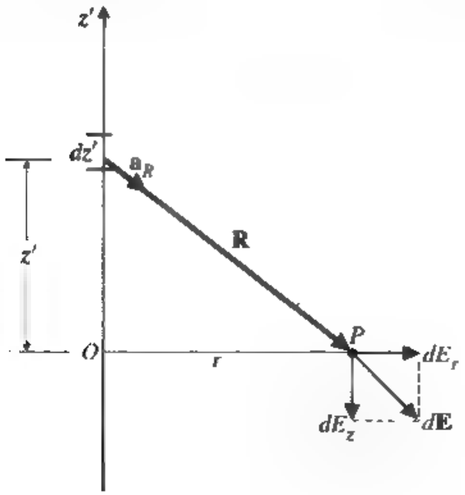
Supongamos que la línea de carga se encuentra sobre el eje z', como se ilustra en la figura 3-4. Podemos efectuar esta suposición porque el campo no depende de cómo designemos la línea. *Observe el convenio de usar coordenadas con prima para los puntos fuente y coordenadas sin prima para los puntos campo.*

En el problema se nos pide que encontremos la intensidad de campo eléctrico en un punto P que está a una distancia r de la línea. Puesto que el problema tiene simetría cilíndrica (es decir, el campo eléctrico es independiente del ángulo de azimut ϕ), lo más conveniente es trabajar con coordenadas cilíndricas. Reescribimos la ecuación (3-18) como

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \rho_\ell \frac{\mathbf{R}}{R^3}\, d\ell' \qquad \text{(V/m).}} \tag{3-18a}$$

En este problema ρ_ℓ es constante, y se elige un elemento de línea $d\ell' = dz'$ de manera que esté a una distancia arbitraria z' del origen. Es muy importante recordar que $\mathbf{R}$ es

FIGURA 3-4 Línea de carga recta e infinitamente larga.



el vector distancia que va *desde la fuente hasta el punto campo* y no en dirección contraria. Tenemos

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z'. \tag{3-19}$$

El campo eléctrico $d\mathbf{E}$ producido por el elemento diferencial de carga $\rho_\ell d\ell' = \rho_\ell \, dz'$ es

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{\rho_\ell \, dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \mathbf{a}_r \, dE_r + \mathbf{a}_z \, dE_z, \end{aligned} \tag{3-20}$$

donde

$$dE_r = \frac{\rho_\ell r \, dz'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{3-21}$$

y

$$dE_z = \frac{-\rho_\ell z' \, dz'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}}. \tag{3-22}$$

En la ecuación (3-22) hemos descompuesto $d\mathbf{E}$ en sus componentes en las direcciones $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_z$. Por cada $\rho_\ell dz'$ en $+z'$ hay un elemento de carga $\rho_\ell dz'$ en $-z'$ que producirá un $d\mathbf{E}$ con componentes dE_r y dE_z. Por lo tanto, las componentes $\mathbf{a}_z$ se cancelarán en el proceso de integración y sólo tendremos que integrar dE_r en la ecuación (3-21).

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}},$$

o sea

Intensidad de campo eléctrico debido a una línea de carga recta infinita con densidad uniforme

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{(V/m)}.} \tag{3-23}$$

La ecuación (3-23) es un resultado importante para una línea de carga infinita. Por supuesto, ninguna línea de carga física será infinita; no obstante, la ecuación (3-23) da el campo $\mathbf{E}$ aproximado de una línea de carga recta muy larga en un punto cercano a la línea de carga.

■ **EJERCICIO 3.3** Suponga una línea de carga infinitamente larga de 50 (pC/m) paralela al eje y en x 2(m) y z − 1(m); obtenga la intensidad eléctrica en el punto (1, 5, 3).

RESPUESTA: $0.18(\mathbf{a}_x 0.6 + \mathbf{a}_z 0.8)$(V/m).

3-4 LEY DE GAUSS Y APLICACIONES

La ***ley de Gauss*** se obtiene directamente del postulado de la divergencia de la electrostática, ecuación (3-3), aplicando el teorema de la divergencia. Se derivó en la ecuación (3-6) y se repite aquí debido a su gran importancia:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}.} \tag{3-24}$$

Ley de Gauss

***La ley de Gauss establece que el flujo de salida total del campo* E *a través de cualquier superficie cerrada en el espacio libre es igual a la carga total encerrada en la superficie, dividida por* ϵ_0.** Observamos que la superficie S puede ser *cualquier superficie cerrada hipotética (matemática) elegida por conveniencia*; no tiene que ser (y usualmente no es) una superficie física.

La ley de Gauss es muy útil para determinar el campo **E** de distribuciones de carga con ciertas condiciones de simetría, tal como que *la componente normal de la intensidad de campo eléctrico sea constante sobre una superficie cerrada*. En estos casos, la integral de superficie del lado izquierdo de la ecuación (3-24) sería muy fácil de calcular y la ley de Gauss sería una forma mucho más eficiente de determinar la intensidad de campo eléctrico que las ecuaciones (3-16) a (3-18a).

Elección apropiada de la superficie gaussiana

Por otra parte, la ley de Gauss no es muy útil cuando no existen condiciones de simetría. Los puntos cruciales para la aplicación de la ley de Gauss son, primero, la identificación de las condiciones de simetría y, segundo, la elección de una superficie apropiada donde la componente normal de **E** debida a la distribución de carga dada sea constante. Tal superficie se conoce como ***superficie gaussiana***. Este principio básico ya lo usamos para obtener la ecuación (3-8) de una carga puntual con simetría esférica; por consiguiente, una superficie gaussiana apropiada es la superficie de una esfera centrada en la carga puntual.

EJEMPLO 3-4

Use la ley de Gauss para determinar la intensidad de campo eléctrico de una línea de carga recta, infinitamente larga, con densidad uniforme ρ_ℓ en el aire.

SOLUCIÓN

Resolvimos este problema en el ejemplo 3-3 usando la ecuación (3-18). Puesto que la línea de carga es infinitamente larga, el campo **E** resultante debe ser radial y perpendicular a la línea de carga ($\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r$) y no puede existir una componente de **E** a lo largo de la línea. Aprovechando la simetría radial, construimos una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud arbitraria L con la línea de carga como eje, de la manera ilustrada en la figura 3-5. E_r es constante en esta superficie y $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_r r\, d\phi\, dz$. Tenemos

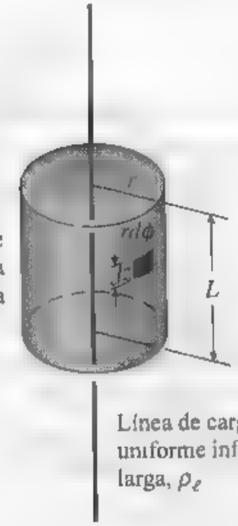


FIGURA 3-5 Aplicación de la ley de Gauss a una línea de carga infinitamente larga (ejemplo 3-4).

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E_r r\, d\phi\, dz = 2\pi r L E_r.$$

No hay contribución de la cara superior o inferior del cilindro porque en la cara superior $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_z r\, dr\, d\phi$, pero $\mathbf{E}$ no tiene componente en z, de manera que $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$. Sucede lo mismo en la cara inferior. La carga total encerrada por el cilindro es $Q = \rho_\ell L$ Sustituyendo en la ecuación (3-24) obtenemos

$$2\pi r L E_r = \frac{\rho_\ell L}{\epsilon_0},$$

o

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Este resultado es el mismo que el indicado por la ecuación (3-23), pero lo obtuvimos de manera mucho más sencilla. Observe también que la longitud L de la superficie gaussiana cilíndrica no aparece en la expresión final, por lo cual pudimos haber elegido un cilindro de longitud igual a la unidad.

NOTA: Esta misma superficie gaussiana cilíndrica no funcionará si la línea de carga es de longitud finita. ¿Sabe por qué?

EJEMPLO 3-5

Determine la intensidad de campo eléctrico de un plano de carga infinito con densidad superficial de carga uniforme ρ_s.

SOLUCIÓN

El campo **E** debido a una lámina cargada de extensión infinita es normal a la lámina. Podríamos usar la ecuación (3-17) para hallar **E**, pero esto implicaría una integración doble entre límites infinitos de una expresión general de $1/R^2$. Aquí podemos aprovechar la ley de Gauss.

Elegimos como superficie gaussiana una caja rectangular con caras superior e inferior de área arbitraria A equidistantes del plano de carga, como se muestra en la figura 3-6. Los lados de la caja son perpendiculares a la lámina cargada. Si la lámina cargada coincide con el plano xy, tenemos entonces en la cara superior

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{a}_z E_z)\cdot(\mathbf{a}_z\, ds) = E_z\, ds.$$

En la cara inferior,

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = (-\mathbf{a}_z E_z)\cdot(-\mathbf{a}_z\, ds) = E_z\, ds.$$

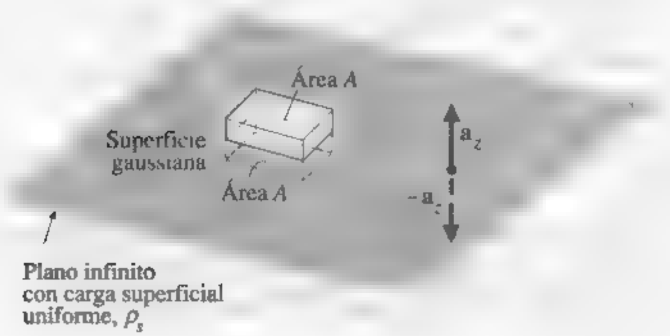
Puesto que no hay contribución de las caras laterales, tenemos

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 2E_z \int_A ds = 2E_z A.$$

La carga total encerrada por la caja es $Q = \rho_s A$. Por lo tanto,

$$2E_z A = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0},$$

FIGURA 3-6 Aplicación de la ley de Gauss a un plano de carga infinito (ejemplo 3-5)



de donde obtenemos

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_z = \mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \quad z > 0,} \tag{3-25a}$$

y

$$\boxed{\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z E_z = -\mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \quad z < 0.} \tag{3-25b}$$

La lámina cargada no siempre coincide con el plano xy (así que no siempre empleamos los términos de "arriba" y "abajo" del plano), pero el campo **E** siempre apunta *alejándose* de la lámina si ρ_s es *positiva*. La superficie gaussiana que elegimos pudo haber sido una caja de cualquier forma, no necesariamente rectangular.

NOTA: No puede elegirse una superficie gaussiana apropiada para este ejemplo si el plano de carga no es de extensión infinita en ambas direcciones o no es plano. ¿Puede explicar por qué?

Comparación de formas de iluminación

La forma de iluminar una oficina o un salón de clases puede consistir en bombillas incandescentes, largos tubos fluorescentes o paneles de luces en el techo. Éstos se asemejan de manera burda a fuentes puntuales, fuentes lineales y fuentes planares, respectivamente. Con base en las ecuaciones (3-8), (3-23) y (3-25) podemos estimar que la intensidad luminosa disminuirá con rapidez (como el cuadrado de la distancia a la fuente) en el caso de bombillas incandescentes, con menor rapidez (como primera potencia de la distancia) para los largos tubos fluorescentes y nada en el caso de paneles en el techo.

EJEMPLO 3-6

Determine el campo **E** producido por una nube esférica de electrones con densidad volumétrica de carga $\rho_v = -\rho_o$ para $0 \leqslant R \leqslant b$ (tanto ρ_o como b son positivos) y $\rho_v = 0$ para $R > b$.

SOLUCIÓN

Primero identificamos que la condición dada para la fuente tiene simetría esférica. Por lo tanto, las superficies gaussianas apropiadas deben ser superficies esféricas concéntricas. Debemos hallar el campo **E** en dos regiones, como se ilustra en la figura 3-7.

a) $0 \leqslant R \leqslant b$

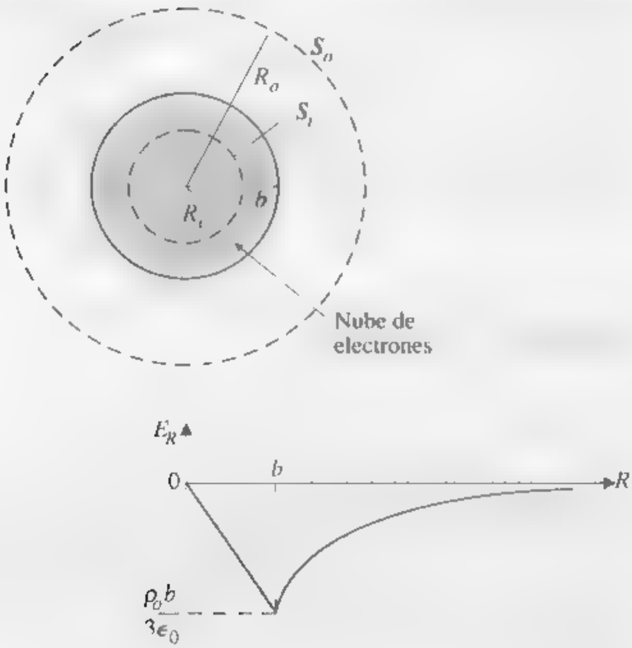


FIGURA 3-7 Intensidad de campo eléctrico de una nube de electrones esférica (ejemplo 3-6)

Se construye una superficie gaussiana esférica hipotética S_i con $R < b$ dentro de la nube de electrones. Sobre esta superficie, **E** es radial y tiene magnitud constante:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R, \qquad d\mathbf{s} = \mathbf{a}_R\, ds.$$

El flujo total de salida E es

$$\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_R \int_{S_i} ds = E_R 4\pi R^2.$$

La carga total encerrada por la superficie gaussiana es

$$Q = \int_V \rho_v \, dv$$

$$= -\rho_o \int_V dv = -\rho_o \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Al sustituir en la ecuación (3-6) obtenemos

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_o}{3\epsilon_0} R, \qquad 0 \leq R \leq b.$$

Vemos que dentro de la nube de electrones uniforme, el campo **E** está dirigido hacia el centro y tiene una magnitud proporcional a la distancia al centro.

b) $R \geqslant b$

Para este caso construimos una superficie gaussiana esférica S_o con $R > b$ fuera de la nube de electrones. Obtenemos la misma expresión de $\oint_{S_o} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ que para el caso (a). La carga total encerrada es

$$Q = -\rho_o \frac{4\pi}{3} b^3.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_o b^3}{3\epsilon_0 R^2}, \qquad R \geqslant b.$$

Observe que esta relación sigue la ley del inverso del cuadrado y pudo haberse obtenido directamente de la ecuación (3-8). Vemos que **E** *fuera* de la nube cargada es exactamente el mismo que se obtendría si la carga total hubiera estado concentrada en una sola carga puntual en el centro. Este resultado generalmente es válido para cualquier región cargada esféricamente simétrica, incluso si ρ_v es función de R.

■ **EJERCICIO 3.4** Dado $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r(20/r^2)$ (mV/m) en el espacio libre, calcule ρ_v en el punto (3, −4, 1) (cm)

RESPUESTA: −1.42 (nC/m³).

■ **EJERCICIO 3.5** Una carga positiva Q se distribuye uniformemente sobre una capa esférica muy delgada de radio b en el aire. Encuentre **E** en todos los puntos. Represente gráficamente $|\mathbf{E}|$ en función de R

RESPUESTA: 0 para $0 < R < b$; $\mathbf{a}_R(Q/4\pi\epsilon_0 R^2)$ para $R > b$.

3-5 POTENCIAL ELÉCTRICO

Antes, al hablar de la identidad nula de la ecuación (2-105), señalamos que un campo vectorial con rotacional nulo siempre puede expresarse como el gradiente de un campo escalar. Por lo tanto, podemos definir un ***potencial eléctrico*** V escalar a partir de la ecuación (3-4), de manera que

Intensidad de campo electrostático a partir del potencial eléctrico

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \tag{3-26}$$

ya que las cantidades escalares son más fáciles de manejar que las cantidades vectoriales. Si podemos determinar V con mayor facilidad, entonces podemos encontrar **E** con una operación de gradiente, lo cual no es más que un sencillo proceso de diferenciacion. En seguida explicaremos la razón por la cual se incluye un signo negativo en la ecuación (3-26).

El potencial eléctrico tiene importancia física y se relaciona con el trabajo realizado al mover una carga de un punto a otro. En la sección 3-2 definimos la intensidad de campo eléctrico como la fuerza que actúa sobre una unidad de carga de prueba. Por lo tanto, al mover una unidad de carga del punto P_1 al punto P_2 en un campo eléctrico hay que realizar un trabajo *en contra del campo*, igual a

$$\frac{W}{q} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(J/C o V)}. \tag{3-27}$$

Para ir de P_1 a P_2 pueden seguirse muchas trayectorias, y en la figura 3-8 se ilustran dos de ellas. Puesto que la trayectoria entre P_1 y P_2 no está especificada en la ecuación (3-27), surge la siguiente duda: ¿Cómo depende el trabajo de la trayectoria que se siga? Razonando un poco llegamos a la conclusión de que W/q en la ecuación (3-27) debe ser independiente de la trayectoria; si no fuera así, sería posible ir de P a P_2 por una trayectoria por la que W es más pequeño y luego regresar a P por otra trayectoria, logrando así una ganancia neta en trabajo o energía. Este resultado iría en contra del principio de conservación de la energía. Ya hemos hecho alusión a la naturaleza independiente de la trayectoria de la integral de línea escalar del campo irrotacional (conservativo) **E** cuando analizamos la ecuación (3-7).

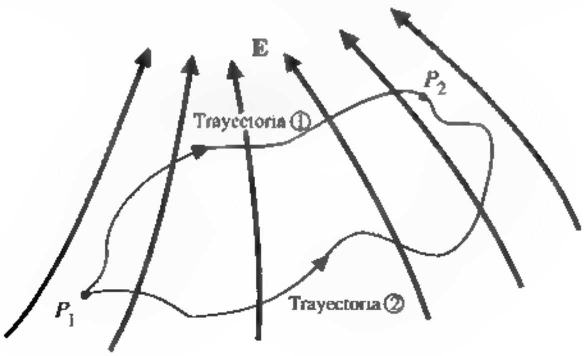
En forma análoga al concepto de la energía potencial en la mecánica, la ecuación (3-27) representa la diferencia en energía potencial eléctrica de una unidad de carga entre el punto P_2 y el punto P_1. Si denotamos la energía potencial eléctrica por unidad de carga con V (el **potencial eléctrico**), tenemos

La diferencia de potencial electrostático entre P_2 y P_1 es igual al trabajo efectuado al mover una unidad de carga de P_1 a P_2.

$$\boxed{V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(V)}.} \tag{3-28}$$

Lo que hemos definido en la ecuación (3-28) es una ***diferencia de potencial (voltaje electrostático)*** entre los puntos P_2 y P_1. No podemos hablar del potencial *absoluto* de un punto, al igual que no podemos hablar de la fase absoluta de un fasor o la altitud

FIGURA 3-8 Dos trayectorias que van de P_1 a P_2 en un campo eléctrico.



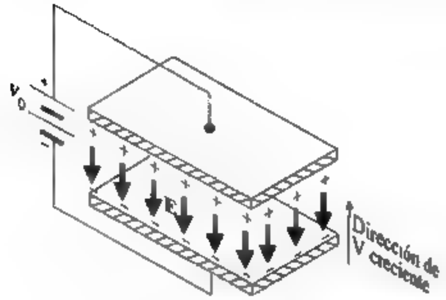


FIGURA 3-9 Direcciones relativas de **E** y V creciente.

Elección de un punto de referencia a potencial cero

absoluta de un lugar geográfico; primero hay que especificar un punto de referencia de potencial cero, una fase de referencia cero (usualmente en $t = 0$) o una altitud de referencia cero (por lo general el nivel del mar). En la mayoría de los casos (aunque no en todos) el punto de potencial cero se toma en el infinito. Cuando el punto de referencia de potencial cero no está en el infinito (por ejemplo, cuando está "en tierra"), debe especificarse de manera explícita.

Haremos dos observaciones importantes adicionales acerca de la ecuación (3-28). En primer lugar, hay que incluir el signo negativo para estar de acuerdo con el convenio de que el potencial eléctrico *V aumenta* al ir *en contra* del campo eléctrico **E**. Por ejemplo, cuando se conecta una batería de corriente continua con voltaje V_0 entre dos placas conductoras paralelas, como en la figura 3-9, las cargas positivas y negativas se acumulan en las placas superior e inferior, respectivamente. El campo **E** está dirigido de las cargas positivas a las negativas, mientras que el potencial aumenta en *dirección opuesta*.

Las líneas de los campos eléctricos son perpendiculares a las líneas y superficies equipotenciales.

En segundo lugar sabemos, a partir de la sección 2-5, donde definimos el gradiente de un campo escalar, que la dirección de ∇V es normal a las superficies con V constante. Por lo tanto, si usamos ***líneas de campo dirigidas*** o ***líneas de flujo*** para indicar la dirección del campo **E**, siempre serán perpendiculares a las ***líneas equipotenciales*** y a las ***superficies equipotenciales.***

■ EJERCICIO 3.6 Determine el trabajo realizado *por* el campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x x - \mathbf{a}_y 2y$ (V/m) para mover una unidad de carga positiva desde la posición $P_1(-2, 0, 0)$ hasta la posición $P_2(5, -1, 3)$. Las distancias están en (m).

RESPUESTA: 9.5 (J).

3-5.1 POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

El potencial eléctrico de un punto a una distancia R de una carga puntual q con respecto al del infinito puede obtenerse fácilmente con la ecuación (3-28):

$$V = -\int_{\infty}^{R} \left(\mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\right)\cdot(\mathbf{a}_R\, dR),$$

de lo cual se obtiene

Potencial electrostático de una carga puntual con respecto al del infinito

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad \text{(V)}.} \tag{3-29}$$

Ésta es una cantidad escalar y depende únicamente de la distancia R, además de q. La diferencia de potencial entre dos puntos P_2 y P_1 a distancias R_2 y R_1, respectivamente, de q es

$$V_{21} = V_{P_2} - V_{P_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right). \tag{3-30}$$

El potencial eléctrico en $\mathbf{R}$ debido a un sistema de n cargas discretas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ localizadas en $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \ldots, \mathbf{R}'_n$ es, por superposición, la suma de los potenciales ocasionados por las cargas individuales:

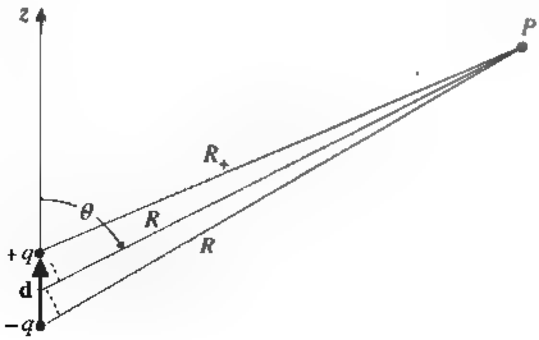
$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_k|} \qquad \text{(V)}.} \tag{3-31}$$

Puesto que ésta es una suma escalar, en general será más fácil determinar $\mathbf{E}$ usando el gradiente negativo de V en lugar de la suma vectorial de la ecuación (3-14)

EJEMPLO 3-7

En la figura 3-10 se muestra un dipolo eléctrico que consiste en dos cargas puntuales iguales y opuestas $+q$ y $-q$, separadas una pequeña distancia d. Determine el potencial V y la intensidad eléctrica $\mathbf{E}$ en un punto arbitrario P a una distancia $R \gg d$ del dipolo.

FIGURA 3-10 Dipolo eléctrico.



SOLUCIÓN

Sean R_+ y R_- las distancias de las cargas $+q$ y $-q$ al punto campo P, respectivamente.

El potencial en P puede obtenerse directamente de la ecuación (3-31).

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right). \tag{3-32}$$

Si $d \ll R$, escribimos

$$R_+ \cong \left(R - \frac{d}{2}\cos\theta\right) \tag{3-33}$$

y

$$R_- \cong \left(R + \frac{d}{2}\cos\theta\right). \tag{3-34}$$

Al sustituir las ecuaciones (3-33) y (3-34) en la ecuación (3-32) tenemos

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2}\cos\theta}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{d\cos\theta}{R^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}\right) \cong \frac{q\,d\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \end{aligned} \tag{3-35}$$

La ecuación (3-35) puede reescribirse como

Determinación del potencial electrostático a partir del momento dipolar eléctrico

$$\boxed{V = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \qquad \text{(V)},} \tag{3-36}$$

donde $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ es el ***momento dipolar eléctrico*** (unidad en el SI: C · m). (Se ha omitido el signo de "aproximadamente" ($\sim$) por cuestiones de sencillez.)

El campo $\mathbf{E}$ puede obtenerse de $-\nabla V$. En coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = -\mathbf{a}_R\frac{\partial V}{\partial R} - \mathbf{a}_\theta\frac{\partial V}{R\,\partial\theta} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\mathbf{a}_R 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \operatorname{sen}\theta). \end{aligned} \tag{3-37}$$

Observe que V y $\mathbf{E}$ son independientes de ϕ, como era de esperarse

■ **EJERCICIO 3.7** Un dipolo eléctrico en el origen tiene momento dipolar $\mathbf{a}_z 0.1$ (nC·m). Calcule V y $\mathbf{E}$ en (a) (0, 0, 5 (m)) y (b) (2(m), $\pi/3$, $\pi/8$).

RESPUESTA: (a) 36 (mV), $\mathbf{a}_z 14.4$ (mV/m); (b) 113 (mV), $\mathbf{a}_R 113 + \mathbf{a}_\theta 97.4$ (mV/m).

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua confinada en una región dada se obtiene integrando la contribución de un elemento de carga sobre toda la región cargada. Para una distribución volumétrica de carga tenemos

Potencial eléctrico debido a distribuciones de carga continuas

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho_v}{R}\, dv' \qquad \text{(V)}.} \tag{3-38}$$

Para una distribución superficial de carga,

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} \frac{\rho_s}{R}\, ds' \qquad \text{(V)};} \tag{3-39}$$

y para una línea de carga,

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \frac{\rho_\ell}{R}\, d\ell' \qquad \text{(V)}.} \tag{3-40}$$

Observe una vez más que las integrales de las ecuaciones (3-38) y (3-39) representan integraciones en tres y dos dimensiones, respectivamente.

EJEMPLO 3-8

Obtenga una fórmula para la intensidad del campo eléctrico en el eje de un disco circular de radio b que tiene una densidad superficial de carga uniforme ρ_s.

SOLUCIÓN

Aunque el disco tiene simetría circular, no podemos visualizar una superficie a su alrededor en la cual la componente normal de **E** tenga magnitud constante; por consiguiente, la ley de Gauss no sirve para resolver este problema. En su lugar usamos la ecuación (3-39). Trabajando con las coordenadas cilíndricas indicadas en la figura 3-11 tenemos

$$ds' = r'dr'\,d\phi'$$

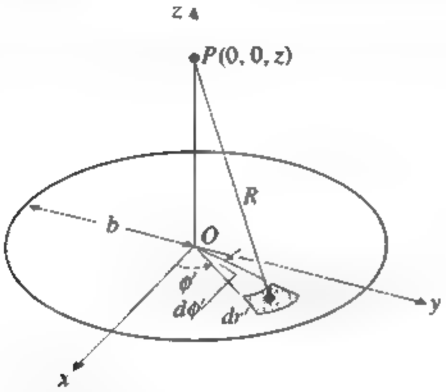


FIGURA 3-11 Disco con carga uniforme (ejemplo 3-8).

y

$$R = \sqrt{z^2 + r'^2}.$$

El potencial eléctrico en el punto $P(0, 0, z)$ con un respecto al potencial en un punto en el infinito es

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}}\, dr'\, d\phi'$$
$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[(z^2 + b^2)^{1/2} - |z|\right], \qquad (3\text{-}41)$$

donde el signo absoluto alrededor de z describe el hecho de que V es lo mismo si z es positivo (un punto por encima del disco) o negativo (un punto debajo del disco). Por consiguiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$
$$= \begin{cases} \mathbf{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 - z(z^2 + b^2)^{-1/2}\right], & z > 0 \qquad (3\text{-}42a) \\ -\mathbf{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 + z(z^2 + b^2)^{-1/2}\right]. & z < 0. \qquad (3\text{-}42b) \end{cases}$$

PREGUNTAS DE REPASO

P.3-1 Escriba la forma diferencial de los postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre.

P.3-2 ¿En qué condiciones será solenoidal e irrotacional una intensidad de campo eléctrico?

P.3-3 Escriba la forma integral de los postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre y enuncie su significado con palabras.

P.3-4 Explique por qué un campo irrotacional se conoce también como campo conservativo.

P.3-5 ¿De qué manera varía la intensidad de campo eléctrico con la distancia para (a) una carga puntual? (b) ¿un dipolo eléctrico?

P.3-6 Enuncie la *ley de Coulomb.*

P.3-7 Enuncie la *ley de Gauss.* ¿En qué condiciones es muy útil la ley de Gauss para determinar la intensidad de campo eléctrico de una distribución de carga?

P.3-8 Describa las formas en que varía con la distancia la intensidad de campo eléctrico de una línea de carga recta, infinitamente larga, y con densidad uniforme.

P.3-9 Si el potencial eléctrico en un punto es cero, ¿también es cero la intensidad de campo eléctrico en ese punto? Explique.

P.3-10 Si la intensidad de campo eléctrico en un punto es cero, ¿también es cero el potencial eléctrico en ese punto? Explique.

COMENTARIOS

1. Al determinar la intensidad de campo eléctrico, **E**, de una distribución de carga, es más sencillo aplicar la ley de Gauss si puede hallarse una superficie gaussiana simétrica que encierre las cargas y sobre la cual la componente normal al campo sea constante.
2. Si no puede hallarse una superficie gaussiana apropiada, es más sencillo hallar primero V (un escalar) y obtener **E** a partir de $-\nabla V$.
3. Las líneas de campo dirigidas (líneas de flujo) siempre son perpendiculares a las líneas y a las superficies equipotenciales.

3-6 MEDIOS MATERIALES EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Conductores, semiconductores y dieléctricos

Hasta ahora sólo hemos analizado el campo eléctrico de las distribuciones de carga estacionarias en el espacio libre o en el aire. A continuación veremos el comportamiento de los campos en medios materiales. Los materiales usualmente se clasifican en tres tipos según sus propiedades eléctricas: ***conductores***, ***semiconductores*** y ***aislantes*** (o ***dieléctricos***). Considerando un modelo atómico básico para un átomo consistente en un núcleo con carga positiva y los electrones orbitando a su alrededor, los electrones en las capas más externas de los átomos de los ***conductores*** están unidos débilmente y emigran con facilidad de un átomo a otro. La mayoría de los metales pertenece a este grupo. Los electrones de los átomos de los ***aislantes*** o dieléctricos están confinados a sus órbitas; en circunstancias normales no pueden liberarse, ni siquiera con la aplicación de un campo eléctrico externo. Las propiedades eléctricas de los ***semiconductores*** están entre las de los conductores y las de los aislantes, ya que poseen un numero relativamente pequeño de cargas que pueden moverse libremente

En términos de la teoría de bandas de los sólidos encontramos que hay bandas de energía permitidas para los electrones, cada una de las cuales consiste en muchos estados de energía discretos y muy poco espaciados. Entre estas bandas de energía puede haber huecos (*gaps*) o regiones prohibidas donde no pueden residir electrones del átomo de un sólido. Los conductores tienen una banda de energía superior parcialmente llena con electrones o un par de bandas superiores que se pueden superponer y que se llenan de forma parcial para que los electrones de estas bandas puedan moverse de una a otra con sólo un pequeño cambio en energía. Los aislantes o dieléctricos son materiales con la banda superior completamente llena, de manera que la conducción no puede ocurrir en condiciones normales debido a la existencia de un gran salto o intervalo de energía a la siguiente banda superior. Si el intervalo de energía de la región prohibida es relativamente pequeño, bastan pequeñas cantidades de energía externa para excitar los electrones de la banda superior llena para que salten a la banda siguiente, dando lugar a la conducción. Estos materiales son semiconductores. La propiedad eléctrica macroscópica de un medio material se caracteriza por un parámetro constitutivo llamado ***conductividad***, que definiremos en el capítulo 4.

3-6.1 CONDUCTORES EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Suponga por el momento que se introducen algunas cargas positivas (o negativas) en el interior de un buen conductor. Se establecerá un campo eléctrico en el conductor y el campo ejercerá una fuerza sobre las cargas y hará que se alejen entre sí. Este movimiento continuará hasta que *todas* las cargas lleguen a la superficie del conductor y se redistribuyan de manera que desaparezcan en el interior tanto la carga como el campo. Por lo tanto,

Dentro de un conductor (en condiciones estáticas)
$\rho_v = 0$ (3-43)
$\mathbf{E} = 0$ (3-44)

La carga libre y la intensidad de campo eléctrico son nulas en el interior de un conductor en condiciones estáticas.

Cuando no hay cargas libres en el interior de un conductor ($\rho_v = 0$), **E** debe ser igual a cero porque, de acuerdo con la ley de Gauss, debe desaparecer el flujo eléctrico total de salida a través de *cualquier* superficie cerrada construida dentro del conductor.

La distribución de carga en la superficie del conductor depende de la forma de la superficie. Es obvio que las cargas no estarían en un estado de equilibrio si existiera una componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico que produjera una fuerza tangencial y moviera las cargas. Por lo tanto, ***en condiciones estáticas, el campo* E *sobre la superficie de un conductor es normal a la superficie en todos los puntos.*** En otras palabras, ***la superficie de un conductor es una superficie equipotencial en condiciones***

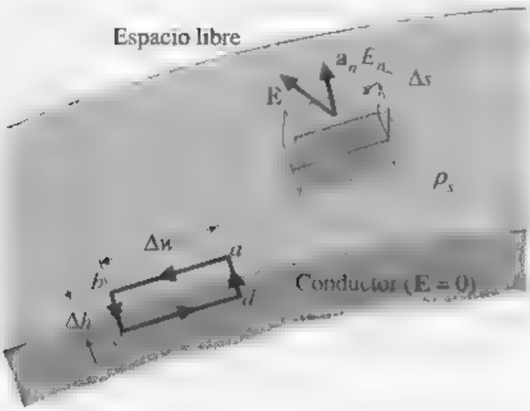


FIGURA 3-12 Superficie de separación conductor-espacio libre.

estáticas. De hecho, puesto que $\mathbf{E} = 0$ en todos los lugares dentro de un conductor, *todo* el conductor tiene el mismo potencial electrostático.

En la figura 3-12 se muestra una superficie de separacón entre un conductor y el espacio libre. Considere el contorno *abcda*, con anchura $ab = cd = \Delta w$ y altura $bc = da = \Delta h$. Los lados *ab* y *cd* son paralelos a la superficie de separación. Al aplicar la ecuación (3-7) con $\Delta h \to 0$ y observar que $\mathbf{E}$ en un conductor es cero, obtenemos

$$\oint_{abcda} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E_t \Delta w = 0$$

o

$$E_t = 0, \tag{3-45}$$

lo cual indica que ***la componente tangencial del campo* E *sobre la superficie de un conductor es cero en condiciones estáticas.*** Para hallar E_n, la componente normal de $\mathbf{E}$ en la superficie del conductor, construimos una superficie gaussiana en forma de delgada caja circular con la cara superior en el espacio libre y la inferior en el conductor donde $\mathbf{E} = 0$. Usando la ecuación (3-6) obtenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_n \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0},$$

o

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \tag{3-46}$$

Por consiguiente, ***la componente normal del campo* E *sobre la frontera conductor-espacio libre es igual a la densidad superficial de carga del conductor dividida por***

El campo eléctrico en la superficie de un conductor en condiciones estáticas es perpendicular a la superficie, la cual es equipotencial.

la permitividad del espacio libre. En resumen, las *condiciones en la frontera* o *condiciones de contorno* en la superficie del conductor son

Condiciones en la frontera en una superficie de separación conductor-espacio libre
$E_t = 0$ (3-45)
$E_n = \dfrac{\rho_s}{\epsilon_0}$ (3-46)

EJEMPLO 3-9

Una carga puntual positiva Q está en el centro de una capa conductora esférica con radio interior R_i y radio exterior R_o. Determine **E** y V como funciones de la distancia radial R

SOLUCIÓN

La geometría del problema se muestra en la figura 3-13(a). Puesto que hay simetría esférica, lo más sencillo es usar la ley de Gauss para determinar **E** y luego hallar V por integración. Hay tres regiones distintas: (a) $R > R_o$, (b) $R_i < R < R_o$ y (c) $R < R_i$. Construiremos superficies gaussianas esféricas apropiadas en estas regiones. Por simetría, se requiere que $\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R$ en las tres regiones.

a) $R > R_o$ (superficie gaussiana S_1):

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E_{R1}4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

o

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \tag{3-47}$$

El campo **E** es el mismo que el de una carga puntual Q sin la presencia de la capa, esta relación ya se dio en la ecuación (3-8). El potencial con respecto al del infinito es

$$V_1 = -\int_\infty^R (E_{R1})dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \tag{3-48}$$

que es el mismo que se obtuvo en la ecuación (3-29).

b) $R_i < R < R_o$ (superficie gaussiana S_2): A partir de la ecuación (3-44) sabemos que

$$E_{R2} = 0. \tag{3-49}$$

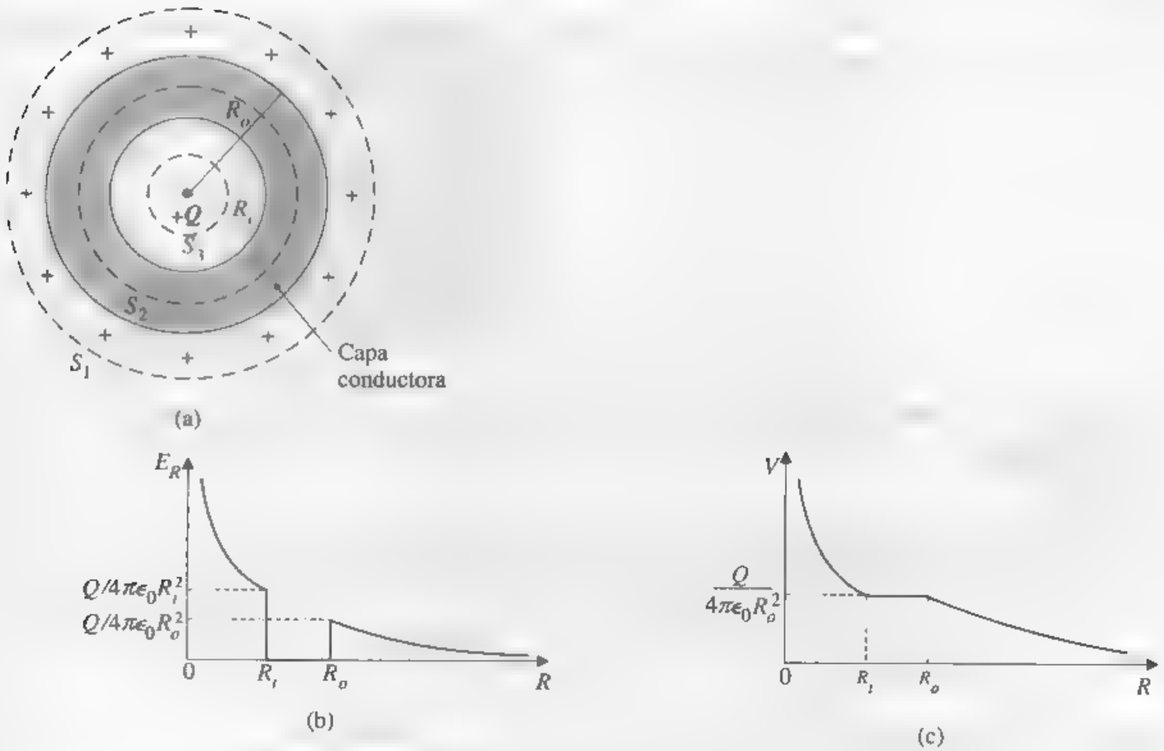


FIGURA 3-13 Intensidad de campo eléctrico y variaciones de potencial de una carga puntual $+Q$ en el centro de una capa conductora (ejemplo 3-9).

Puesto que $\rho_v = 0$ en la capa conductora y dado que la carga total encerrada por la superficie S_2 debe ser cero, se habrá inducido una cantidad de carga negativa igual a $-Q$ en la superficie interior de la capa, en $R = R_i$. (Esto también significa que se induce una cantidad de carga positiva igual a $+Q$ en la superficie exterior de la capa, en $R = R_o$.) La capa conductora es un cuerpo equipotencial. Por lo tanto,

$$V_2 = V_1\Big|_{R=R_o} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o}. \tag{3-50}$$

c) $R < R_i$ (superficie gaussiana S_3) Al aplicar la ley de Gauss se obtiene la misma fórmula para E_{R3} que la de E_{R1} en la ecuación (3-47) para la primera región

$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \tag{3-51}$$

El potencial en la región es

$$V_3 = -\int E_{R3}\, dR + K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + K,$$

donde la constante de integración K se determina al imponer que V_3 en $R = R_i$ sea igual que V_2 en la ecuación (3-50). Tenemos

$$K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i}\right) \tag{3-52}$$

y

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i}\right). \tag{3-53}$$

Las variaciones de E_R y V con respecto a R en las tres regiones están representadas gráficamente en las figuras 3-13(b) y 3-13(c). Observe que la intensidad eléctrica tiene saltos discontinuos, pero el potencial no pierde continuidad. Un salto discontinuo en el potencial significaría una intensidad de campo eléctrico infinita.

El potencial es continuo a través de las fronteras.

■ **EJERCICIO 3.8** Suponga que un tubo de cobre muy largo con radio exterior de 3(cm) y radio interior de 2(cm) rodea una línea de carga de 60(pC/m) situada en su eje. Calcule

a) $\mathbf{E}$ en $r = 1$ (m), 2.5 (cm) y 1.5 (cm), y

b) la diferencia de potencial entre la superficie interior y la exterior del tubo

RESPUESTA: (a) 1.08 (V/m), 0, 72 (V/m); (b) 0 (V).

3-6.2 DIELÉCTRICOS EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Todos los medios materiales están compuestos por átomos con un nucleo con carga positiva rodeado por electrones con carga negativa. Aunque las moléculas de los dieléctricos son neutras a nivel macroscópico, la presencia de un campo eléctrico externo hace que se aplique una fuerza a cada partícula cargada y produce pequeños desplazamientos de las cargas positivas y negativas en direcciones opuestas. Éstas son ***cargas ligadas***. Los desplazamientos, aunque pequeños en comparación con las dimensiones atómicas, *polarizan* un material dieléctrico y crean dipolos eléctricos. Esta situación se ilustra en la figura 3-14 Ya que los dipolos eléctricos tienen potencial eléctrico e intensidad de campo eléctrico no nulos (véase el ejemplo 3-7), es de esperar que los ***dipolos eléctricos inducidos*** modifiquen el campo eléctrico dentro y fuera del material dieléctrico.

Las moléculas de algunos dieléctricos poseen momentos dipolares permanentes, incluso en ausencia de un campo de polarización externo. Estas moléculas usualmente consisten en dos o más átomos diferentes y se denominan ***moléculas polares***, a diferencia de las ***moléculas no polares***, que no tienen momentos dipolares permanentes. Un ejemplo es la molécula de agua, H_2O, que consiste en dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Los átomos no se disponen de manera que la molécula tenga un momento dipolar cero; es decir, los átomos de hidrógeno no se encuentran en lados diametralmente opuestos del átomo de oxígeno.

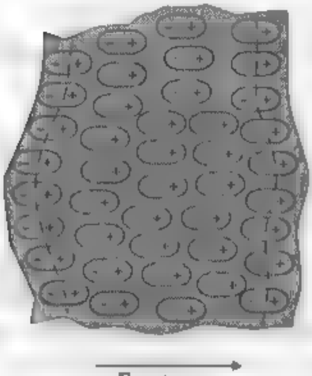


FIGURA 3-14 Corte transversal de un medio dieléctrico polarizado

Los momentos dipolares de las moléculas polares son del orden de 10^{-30} (C·m). Cuando no hay un campo externo, los dipolos individuales de un dieléctrico polar están orientados de forma aleatoria y no producen un momento dipolar neto a nivel macroscópico. Un campo eléctrico aplicado ejercerá un par de torsión sobre los dipolos individuales y tenderá a alinearlos con el campo, de manera similar a la que se muestra en la figura 3-14.

Para analizar el efecto macroscópico de los dipolos inducidos, definimos un ***vector de polarización*** **P** como

El vector de polarización es la densidad de volumen del momento dipolar eléctrico

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_k}{\Delta v} \qquad (\mathrm{C/m^2}), \tag{3-54}$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen y el numerador representa la suma vectorial de los momentos dipolares inducidos que están contenidos en un volumen muy pequeño Δv. El vector **P**, una función puntual promediada, es la *densidad de volumen del momento dipolar eléctrico*. El momento dipolar $d\mathbf{p}$ de un volumen elemental dv' es $d\mathbf{p} = \mathbf{P}\, dv'$, que produce un potencial electrostático (véase la Ec. 3-36)

$$dV = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, dv'. \tag{3-55}$$

Al integrar sobre el volumen V' del dieléctrico se obtiene el potencial debido al dieléctrico polarizado.

Determinación del potencial electrostático a partir del vector de polarización

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R}{R^2}\, dv', \tag{3-56}$$

donde R es la distancia del volumen elemental dv' a un punto campo fijo

Podemos obtener una interpretación física más útil de los efectos de los dipolos eléctricos inducidos si observamos los siguientes efectos de superficie y volumen del vector de polarización **P**.[†]

1. *Densidad superficial de carga de polarización equivalente, ρ_{ps}.*
En la figura 3-14 podemos ver que las moléculas contribuyen de forma efectiva a la distribución de cargas superficiales positivas en la frontera a la derecha y a la distribución de cargas superficiales negativas en la frontera a la izquierda. Puesto que la densidad superficial de carga depende de la densidad de dipolos eléctricos que sobresalen más allá de las líneas punteadas en una superficie, podemos ver que la ***densidad superficial de carga de polarización equivalente*** es

Densidad superficial de carga de polarización equivalente

$$\boxed{\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \qquad (\mathrm{C/m^2}).} \tag{3-57}$$

2. *Densidad volumétrica de carga de polarización equivalente, ρ_{pv}.*
Para una superficie S que limita un volumen V, la carga total neta que sale fuera de V como resultado de la polarización se obtiene integrando la ecuación (3-57). La carga neta *que permanece* dentro del volumen es el *negativo* de esta integral

$$\begin{aligned} Q &= -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \, ds \\ &= \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) \, dv = \int_V \rho_{pv} \, dv, \end{aligned} \tag{3-58}$$

donde hemos aplicado el teorema de la divergencia para convertir la integral de superficie cerrada en una integral de volumen. Podemos definir la ***densidad volumétrica de carga de polarización equivalente*** como

Densidad volumétrica de carga de polarización equivalente

$$\boxed{\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad (\mathrm{C/m^3}).} \tag{3-59}$$

Por lo tanto, cuando no se anula la divergencia de **P**, el dieléctrico polarizado aparenta estar cargado. Sin embargo, como comenzamos con un cuerpo dieléctrico eléctricamente neutro, la carga total del cuerpo tras la polarización debe seguir siendo cero. Este hecho puede verificarse al observar que

$$\begin{aligned} \text{Carga total} &= \oint_S \rho_{ps} \, ds + \int_V \rho_{pv} \, dv \\ &= \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \, ds - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \, dv = 0, \end{aligned}$$

para un cuerpo dieléctrico de forma arbitraria.

[†] Puede hallar una derivación más formal en D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, 2da. ed., subsección 3-7.1, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1989.

Las densidades de carga de polarización ρ_{ps} y ρ_{pv} pueden usarse para determinar los campos de potencial e intensidad eléctrica debidos a un dieléctrico polarizado:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'}\frac{\rho_{ps}}{R}ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_{pv}}{R}dv',$$

relación que es equivalente a la ecuación (3-56). En el caso de campos electrostáticos, $\mathbf{E} = -\nabla V$.

EJEMPLO 3-10

El vector de polarización en una esfera dieléctrica de radio R_0 es $\mathbf{P} = \mathbf{a}_x P_0$. Determine

a) las densidades superficial y volumétrica de carga de polarización equivalentes, y

b) la carga total equivalente sobre la superficie y dentro de la esfera.

SOLUCIÓN

a) La densidad superficial de carga de polarización sobre la superficie ($R = R_0$) de la esfera es

$$\rho_{ps} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R = P_0(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_R)$$
$$= P_0 \operatorname{sen}\theta\cos\phi.$$

La densidad volumétrica de carga de polarización es

$$\rho_{pv} = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\nabla\cdot(\mathbf{a}_x P_0) = 0.$$

b) Carga total en la superficie,

$$Q_s = \oint\rho_{ps}ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_0 \operatorname{sen}\theta\cos\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= 0.$$

Carga total dentro de la esfera,

$$Q_v = \int\rho_{pv}dv = 0.$$

Por lo tanto, la carga total en la esfera es $Q_s + Q_v = 0$, como era de esperarse.

3-7 DENSIDAD DE FLUJO ELÉCTRICO Y CONSTANTE DIELÉCTRICA

Puesto que un dieléctrico polarizado da lugar a una densidad volumétrica de carga equivalente ρ_{pv}, es de esperar que la intensidad de campo eléctrico en un dieléctrico debido a una distribución de fuentes dada sea diferente de la intensidad de campo en

el espacio libre. Específicamente, hay que modificar la divergencia postulada en la ecuación (3-3) para incluir el efecto de ρ_{pv}; es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_v + \rho_{pv}). \tag{3-60}$$

Usando la ecuación (3-59) tenemos

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v. \tag{3-61}$$

Definimos ahora una nueva cantidad fundamental de campo, la ***densidad de flujo eléctrico*** o ***desplazamiento eléctrico***, **D**, de manera que

Definición del desplazamiento eléctrico D

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad (\mathrm{C/m^2}).} \tag{3-62}$$

El uso del vector **D** nos permite escribir una relación de divergencia entre el campo eléctrico y la distribución de *cargas libres* en cualquier medio, sin tener que tratar de manera explícita con el vector de polarización **P** ni con la densidad de carga de polarización ρ_{pv}. Al combinar las ecuaciones (3-61) y (3-62) obtenemos la nueva ecuación

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \qquad (\mathrm{C/m^3}),} \tag{3-63}$$

donde ρ_v es la densidad de volumen de las *cargas libres*. Las ecuaciones (3-63) y (3-64) son las dos ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen la electrostática en cualquier medio. Observe que la permitividad del espacio libre, ϵ_0, no aparece de manera explícita en estas dos ecuaciones.

La forma integral correspondiente de la ecuación (3-63) se obtiene tomando la integral de volumen en ambos lados. Tenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv = \int_V \rho_v\, dv, \tag{3-64}$$

o

Ley de Gauss generalizada, aplicable al espacio libre y a medios dieléctricos

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \qquad (\mathrm{C}).} \tag{3-65}$$

La ecuación (3-65), otra forma de la ***ley de Gauss***, establece que ***el flujo total hacia el exterior del desplazamiento eléctrico (o simplemente, el flujo total eléctrico hacia el exterior) a través de una superficie cerrada es igual a la carga libre total encerrada en dicha superficie.***

Cuando las propiedades dieléctricas del medio son *lineales* e *isótropas*, la polarización es directamente proporcional a la intensidad de campo eléctrico y la constante de proporcionalidad es independiente de la dirección del campo. Escribimos

Susceptibilidad eléctrica

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \tag{3-66}$$

donde χ_e es una cantidad sin dimensiones llamada ***susceptibilidad eléctrica***. Un medio dieléctrico es lineal si χ_e es independiente de E, y homogéneo si χ_e es independiente de las coordenadas espaciales. Si sustituimos la ecuación (3-66) en la ecuación (3-62) obtenemos

Definición de un medio dieléctrico lineal y un medio dieléctrico homogéneo

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} \\ &= \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \qquad (\mathrm{C/m^2}),\end{aligned}} \tag{3-67}$$

donde

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{3-68}$$

Constante dieléctrica (permitividad relativa)

es una cantidad sin dimensiones conocida como ***permitividad relativa*** o ***constante dieléctrica*** del medio. El coeficiente $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ es la ***permitividad absoluta*** (con frecuencia llamada simplemente ***permitividad***) del medio y se mide en farads por metro (F/m). El aire tiene una constante dieléctrica de 1.00059; por lo tanto, su permitividad en general se considera como si fuera la del espacio libre. En la tabla 3-1 y en el apéndice B-3 se presentan las constantes dieléctricas de algunos materiales comunes.

Observe que ϵ_r puede ser una función de las coordenadas espaciales. Si ϵ_r es independiente de la posición, se dice que el medio es ***homogéneo***. Un medio lineal, homogéneo e isótropo se denomina ***medio simple***. La permitividad relativa de un medio simple es una constante. En el caso de materiales ***anisótropos*** (como los cristales), la constante dieléctrica es diferente para distintas direcciones del campo eléctrico y los vectores **D** y **E** tienen direcciones distintas.

Medio simple

TABLA 3-1 CONSTANTES DIELÉCTRICAS Y RIGIDEZ DIELÉCTRICA DE ALGUNOS MATERIALES COMUNES

Material	Constante dieléctrica	Rigidez dieléctrica (V/m)
Aire (presión atmosférica)	1.0	3×10^6
Aceite mineral	2.3	15×10^6
Papel	2–4	15×10^6
Poliestireno	2.6	20×10^6
Caucho	2.3–4.0	25×10^6
Vidrio	4–10	30×10^6
Mica	6.0	200×10^6

3-7.1 RIGIDEZ DIELÉCTRICA

Hemos explicado que un campo eléctrico ocasiona pequeños desplazamientos de las cargas ligadas en un material dieléctrico, dando lugar a la polarización. Si el campo eléctrico es muy fuerte, puede sacar a los electrones de las moléculas. Estos electrones se acelerarán bajo la acción del campo eléctrico, chocarán violentamente con la estructura molecular de la red y ocasionarán dislocaciones y daños permanentes en el material. Puede presentarse el efecto de avalancha de la ionización debido a las colisiones. El material se convertirá en conductor y pueden surgir corrientes muy grandes. Este fenómeno se conoce como ***ruptura dieléctrica***. La intensidad máxima de campo eléctrico que puede resistir un material dieléctrico sin que se presente una ruptura se conoce como ***rigidez dieléctrica*** del material. En la tabla 3-1 se presenta la rigidez dieléctrica aproximada de algunas sustancias comunes No debe confundirse la rigidez dieléctrica de un material con su constante dieléctrica

Rigidez dieléctrica

La rigidez dieléctrica del aire es 3 (kV/mm).

Un número que conviene recordar es la rigidez dieléctrica del aire a la presión atmosférica: 3 (kV/mm). Cuando la intensidad del campo eléctrico excede este valor, se "rompe" el aire; ocurre una ionización masiva y comienzan a aparecer chispas (descarga de efecto corona). La carga tiende a concentrarse en los puntos agudos. Éste es el principio de funcionamiento de un pararrayos, que consiste en una varilla metálica situada en la parte superior de un edifico de gran altura. Cuando una nube con abundancia de cargas eléctricas se aproxima a un edifico alto equipado con un pararrayos conectado a tierra, las cargas de un signo opuesto son atraídas desde la tierra a la punta de la varilla, donde la intensidad de campo eléctrico es máxima. Cuando la intensidad del campo eléctrico excede la rigidez dieléctrica del aire humedo, ocurre la ruptura y se ioniza el aire cerca de la punta, convirtiéndose en conductor. Las cargas eléctricas de la nube se descargan entonces de manera inofensiva a tierra a través de un camino conductor.

Principio de un pararrayos

La intensidad de campo eléctrico en una superficie conductora es mayor en los puntos con mayor curvatura.

En el ejemplo siguiente se ilustra el hecho de que la intensidad de campo eléctrico tiende a ser mayor en un punto cercano a la superficie con curvatura mayor de un conductor cargado.

EJEMPLO 3-11

Considere dos conductores esféricos con radios b_1 y b_2 ($b_2 > b_1$), conectados por un alambre conductor. La distancia de separación entre los conductores es muy grande en comparación con b_2, de manera que puede considerarse que las cargas en los conductores esféricos tienen una distribución uniforme. Se deposita una carga total Q en las esferas Calcule

a) las cargas en las dos esferas, y

b) las intensidades de campo eléctrico en la superficie de las esferas.

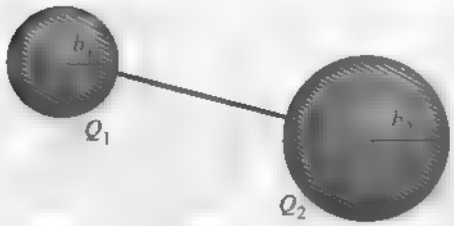


FIGURA 3-15 Dos esferas conductoras conectadas (ejemplo 3-11).

SOLUCIÓN

a) Remítase a la figura 3-15. Puesto que las esferas conductoras tienen el mismo potencial,

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2},$$

o

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

De manera que las cargas en las esferas son directamente proporcionales a sus radios. Sin embargo, como

$$Q_1 + Q_2 = Q,$$

encontramos que

$$Q_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2} Q \qquad \text{y} \qquad Q_2 = \frac{b_2}{b_1 + b_2} Q.$$

b) Las intensidades de campo eléctrico en las superficies de las dos esferas conductoras son

$$E_{1n} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1^2} \qquad \text{y} \qquad E_{2n} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2^2},$$

de manera que

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_2}{b_1}. \tag{3-69}$$

Las intensidades de campo eléctrico son inversamente proporcionales a los radios, siendo mayor la intensidad en la superficie de la esfera menor, que tiene mayor curvatura.

EJEMPLO 3-12

Cuando se usa un cable coaxial para transmitir energía eléctrica, el radio del conductor interior está determinado por la corriente de carga, y el tamaño total por el voltaje y el tipo de material aislante que se utilice. Suponga que el radio del conductor interno es $r_i = 2$ (mm) y que el material aislante es poliestireno. Determine el radio interior, r_o, del conductor externo para que el cable funcione con especificación de voltaje de 10 (kV). Para evitar la ruptura debido a los picos de voltaje ocasionados por relámpagos y otras condiciones anómalas externas, la intensidad máxima de campo eléctrico en el material aislante no debe exceder el 25% de su rigidez dieléctrica.

SOLUCIÓN

En la tabla 3-1 hallamos la constante dieléctrica y la rigidez dieléctrica del poliestireno: 2.6 y 20×10^6 (V/m), respectivamente. La intensidad eléctrica debida a una línea de carga ρ_ℓ es, de acuerdo con la ecuación (3-23),

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}. \tag{3-70}$$

Como el cable deberá soportar una diferencia de potencial de 10^4 V entre los conductores interno y externo, escribimos

$$10^4 = -\int_{r_o}^{r_i} E_r\,dr = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0(2.6)} \ln\frac{r_o}{r_i},$$

o

$$\ln\frac{r_o}{r_i} = \left(\frac{5.2\pi\epsilon_0}{\rho_\ell}\right) \times 10^4. \tag{3-71}$$

Para limitar la intensidad eléctrica a un valor máximo del 25% de 20×10^6, imponemos que, de acuerdo con la ecuación (3-70),

$$\text{Máx } E_r = 0.25 \times (20 \times 10^6) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0(2.6)r_i},$$

o sea

$$\left(\frac{\rho_\ell}{5.2\pi\epsilon_0}\right) = (0.25 \times 20 \times 10^6)r_i = (5 \times 10^6) \times (2 \times 10^{-3})$$
$$= 10^4.$$

Al sustituir el valor anterior en la ecuación (3-71) se obtiene $\ln(r_o/r_i) = 1$ o

$$\ln r_o = 1 + \ln r_i = 1 + \ln(2 \times 10^{-3})$$
$$= 1 - 6.215 = -5.215.$$

Por consiguiente,

$$r_o = 0.0054 \text{ (m) o } 5.4 \text{ (mm)}.$$

■ **EJERCICIO 3.9** Si reemplazara el poliestireno del cable coaxial del ejemplo 3-12 por aire, ¿cuál sería el máximo voltaje de funcionamiento en el cable? (Mantenga la restricción de que la intensidad máxima del campo no debe exceder el 25% de la rigidez dieléctrica del material aislante.)

RESPUESTA: 1.5 (kV).

■ **EJERCICIO 3.10** Si desea que el voltaje de funcionamiento de un cable coaxial lleno de aire con radio $r_i = 2$ (mm) para el conductor interior mantenga el valor de 10 (kV) del ejemplo 3-9, ¿cuál debe ser el valor de r_o?

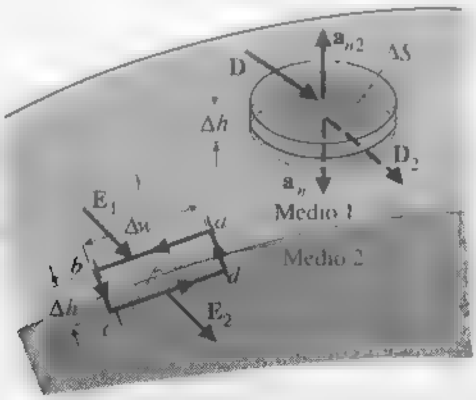
RESPUESTA: 1.571 (m).

3-8 CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA CAMPOS ELECTROSTÁTICOS

Los problemas de electromagnetismo usualmente comprenden medios con distintas propiedades físicas, y es necesario conocer las relaciones de las cantidades de campo en la superficie de separación entre los dos medios. Por ejemplo, quizá queramos determinar cómo cambian los vectores **E** y **D** al cruzar una superficie de separación. Ya sabemos cuáles son las condiciones en la frontera que deben satisfacerse en una superficie de separación conductor-espacio libre (estas condiciones se presentaron en las ecuaciones (3-45) y (3-46)). Consideremos ahora una superficie entre dos medios generales, como se ilustra en la figura 3-16.

Construyamos una trayectoria pequeña *abcda* con lados *ab* y *cd* en el medio 1 y 2, respectivamente, ambos paralelos a la superficie de separación e iguales a Δw. Aplicamos la ecuación (3-7) a esta trayectoria. Si dejamos que los lados *bc* = *da* = Δh se

FIGURA 3-16 Superficie de separación entre dos medios.



aproximen a cero, podemos ignorar sus contribuciones a la integral de línea de **E** a lo largo de la trayectoria. Tenemos

$$\oint_{abcda} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{E}_1\cdot\Delta\mathbf{w} + \mathbf{E}_2\cdot(-\Delta\mathbf{w}) = E_{1t}\Delta w - E_{2t}\Delta w = 0.$$

Por lo tanto,

Condición en la frontera de la componente tangencial de E

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t} \qquad \text{(V/m)},} \tag{3-72}$$

lo cual establece que ***la componente tangencial de un campo* E *es continua a través de una superficie de separación.*** Cuando los medios 1 y 2 son dieléctricos con permitividades ϵ_1 y ϵ_2, respectivamente, tenemos

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}. \tag{3-73}$$

Para hallar una relación entre las componentes normales de los campos en una frontera, construimos una pequeña caja circular con la cara superior en el medio 1 y la inferior en el medio 2, como se ilustra en la figura 3-16. Las caras tienen un área ΔS y la altura de la caja, Δh, es muy pequeña. Al aplicar a la caja la ley de Gauss, ecuación (3-65), tenemos

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} &= (\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{a}_{n2} + \mathbf{D}_2\cdot\mathbf{a}_{n1})\Delta S\\ &= \mathbf{a}_{n2}\cdot(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\Delta S\\ &= \rho_s\Delta S,\end{aligned} \tag{3-74}$$

donde hemos usado la relación $\mathbf{a}_{n2} = -\mathbf{a}_{n1}$. Los vectores unitarios $\mathbf{a}_{n1}$ y $\mathbf{a}_{n2}$ son normales y dirigidos *hacia afuera* de los medios 1 y 2, respectivamente. A partir de la ecuación (3-74) obtenemos

$$\boxed{\mathbf{a}_{n2}\cdot(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s,} \tag{3-75a}$$

o

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \qquad (\text{C/m}^2),} \tag{3-75b}$$

donde la normal unitaria de referencia va hacia afuera del medio 2.

Condición en la frontera de la componente normal de D

La ecuación (3-75b) establece que ***la componente normal del campo* D *es discontinua a través de una superficie de separación cuando existe una carga superficial, y que la cantidad de la discontinuidad es igual a la densidad superficial de carga.*** Si el medio 2 es un conductor, $\mathbf{D}_2 = 0$ y la ecuación (3-75b) se convierte en

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s, \tag{3-76}$$

que se reduce a la ecuación (3-46) cuando el medio 1 es el espacio libre.

Cuando dos dieléctricos están en contacto *sin cargas libres* en la superficie de separación, $\rho_s = 0$ y tenemos

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{3-77}$$

o sea

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}. \tag{3-78}$$

En resumen, las condiciones en la frontera que deben satisfacer los campos eléctricos estáticos son:

Condiciones en la frontera para campos electrostáticos

Componentes tangenciales:	$E_{1t} = E_{2t}$	(3-79)
Componentes normales:	$\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s.$	(3-80)

■ **EJERCICIO 3.11** Enuncie y explique las condiciones en la frontera que debe satisfacer el potencial eléctrico en una superficie de separación entre dieléctricos perfectos con constantes dieléctricas ϵ_{r1} y ϵ_{r2}.

RESPUESTA: $\epsilon_{r1}\, \partial V_1/\partial n = \epsilon_{r2} \partial V_2/\partial n,\ V_1 = V_2.$

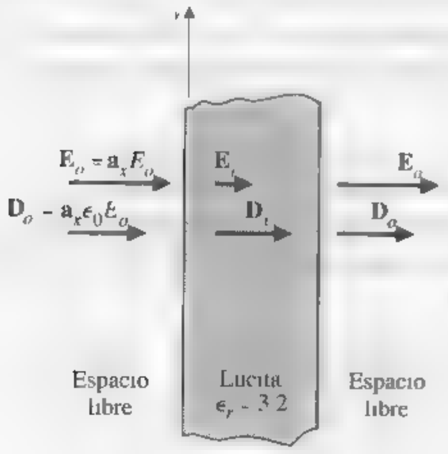
EJEMPLO 3-13

Se introduce perpendicularmente una lámina de lucita ($\epsilon_r = 3.2$) en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_o = \mathbf{a}_x E_o$ en el espacio libre. Determine $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{D}_i$ y $\mathbf{P}_i$ dentro de la lucita.

SOLUCIÓN

Suponemos que la introducción de la lámina de lucita no perturba el campo eléctrico uniforme original $\mathbf{E}_o$. La situación se ilustra en la figura 3-17. Puesto que las

FIGURA 3-17 Lámina de lucita en un campo eléctrico uniforme (ejemplo 3-13).



superficies de separación son perpendiculares al campo eléctrico, sólo tenemos que considerar las componentes de campo normales. No hay cargas libres.

La condición en la frontera de la ecuación (3-77) para la superficie de separación izquierda nos indica

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x D_i = \mathbf{a}_x D_o,$$

o sea

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x \epsilon_0 E_o.$$

No hay cambio en la densidad de flujo eléctrico a través de la superficie de separación. La intensidad de campo eléctrico en la lámina de lucita es

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_i = \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_r}\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x \frac{E_o}{3.2}.$$

Por consiguiente, el efecto de la lámina de lucita es reducir la intensidad eléctrica. El vector de polarización es cero fuera de la lámina de lucita ($\mathbf{P}_o = 0$), dentro de ésta,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i &= \mathbf{D}_i - \epsilon_0 \mathbf{E}_i = \mathbf{a}_x\left(1 - \frac{1}{3.2}\right)\epsilon_0 E_o \\ &= \mathbf{a}_x 0.6875 \epsilon_0 E_o \qquad (\text{C/m}^2).\end{aligned}$$

Es evidente que una aplicación similar de la condición en la frontera (3-77) en la superficie de separación derecha dará los valores originales $\mathbf{E}_o$ y $\mathbf{D}_o$ en el espacio libre a la derecha de la lámina de lucita.

¿Cambiaría la solución a este problema si el campo eléctrico original no fuera uniforme, es decir, si $\mathbf{E}_o = \mathbf{a}_x E(y)$?

EJEMPLO 3-14

Dos medios dieléctricos con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 están separados por una frontera libre de cargas, como se muestra en la figura 3-18. La intensidad de campo eléctrico en el punto P_1 del medio 1 tiene magnitud E_1 y forma un ángulo α_1 con la normal. Determine la magnitud y la dirección de la intensidad de campo eléctrico en el punto P_2 del medio 2.

SOLUCIÓN

Se requieren dos ecuaciones para resolver las dos incógnitas: E_{2t} y E_{2n}. Una vez determinados E_{2t} y E_{2n} se obtienen directamente E_2 y α_2. A partir de las ecuaciones (3-72) y (3-77) tenemos

$$E_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = E_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \tag{3-81}$$

y

$$\epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1. \tag{3-82}$$

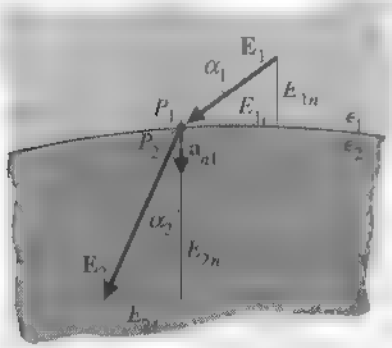


FIGURA 3-18 Condiciones en la frontera en la superficie de separación entre dos medios dieléctricos (ejemplo 3-14).

Al dividir la ecuación (3-81) por la ecuación (3-82) se obtiene

$$\boxed{\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.} \tag{3-83}$$

La magnitud de $\mathbf{E}_2$ es

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \operatorname{sen} \alpha_2)^2 + (E_2 \cos \alpha_2)^2} \\ &= \left[(E_1 \operatorname{sen} \alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

o sea

$$\boxed{E_2 = E_1 \left[\operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2}.} \tag{3-84}$$

¿Puede determinar si ϵ_1 es mayor o menor que ϵ_2 con sólo examinar la figura 3-18?

Si el medio 2 es un conductor, no puede haber un campo eléctrico en el medio 2 en condiciones estáticas, y $\mathbf{E}_1$ en la frontera únicamente tiene una componente normal ($\alpha_1 = 0$). Tenemos $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_n E_{1n} = \mathbf{a}_n D_{1n}/\epsilon_1 = \mathbf{a}_n \rho_s/\epsilon_1$, donde ρ_s es la densidad superficial de carga y $\mathbf{a}_n$ es la normal hacia afuera de la superficie del conductor

■ **EJERCICIO 3.12** Suponga que dos medios dieléctricos isótropos homogéneos con constantes dieléctricas $\epsilon_{r1} = 3$ y $\epsilon_{r2} = 2$ están separados por el plano *xy*. En un punto común, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y 5 - \mathbf{a}_z 4$. Encuentre $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{D}_2$, α_1 y α_2.

RESPUESTA: $\mathbf{D}_2 = 2\epsilon_0 \mathbf{E}_2 = 2\epsilon_0(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y 5 - \mathbf{a}_z 6)$, 51.9°, 40.4°.

PREGUNTAS DE REPASO

P.3-11 ¿Por qué no hay cargas libres en el interior de un buen conductor en condiciones estáticas?

P.3-12 Defina el *vector de polarización.* ¿Cuál es su unidad en el SI?

P.3-13 ¿Qué son las *densidades de carga de polarización*? ¿Cuáles son las unidades en el SI de $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ y $\nabla \cdot \mathbf{P}$?

P.3-14 ¿Qué es un *medio simple*?

P.3-15 Defina el *vector desplazamiento eléctrico.* ¿Cuál es su unidad en el SI?

P.3-16 Defina la *susceptibilidad eléctrica.* ¿Cuál es su unidad?

P.3-17 ¿Cuál es la diferencia entre la *constante dieléctrica* y la *rigidez dieléctrica*?

P.3-18 Explique el principio de funcionamiento de un pararrayos.

P.3-19 ¿Cuáles son las condiciones en la frontera generales de **E** y **D** en la superficie de separación de dos medios dieléctricos diferentes con constantes dieléctricas ϵ_{r1} y ϵ_{r2}?

P.3-20 ¿Cuáles son las condiciones en la frontera de los campos electrostáticos en la superficie de separación entre un conductor y un dieléctrico con permitividad ϵ?

P.3-21 ¿Cuál es la condición en la frontera del potencial electrostático en la superficie de separación entre dos medios dieléctricos distintos?

COMENTARIOS

1. El campo **E** en el interior de un conductor es cero en condiciones estáticas
2. La superficie de un conductor es equipotencial en condiciones estáticas y el campo **E** es normal a la superficie en todos sus puntos.
3. El potencial eléctrico es continuo en la superficie de separación entre dos medios dieléctricos diferentes.
4. No confunda la constante dieléctrica de un medio, ϵ_r, son su permitividad, ϵ. La primera no tiene dimensiones; la unidad en el SI de la segunda es (F/m).

3-9 CAPACITANCIAS Y CONDENSADORES

En la sección 3-6 vimos que un conductor en un campo eléctrico estático es un cuerpo equipotencial y que las cargas depositadas en un conductor se distribuirán sobre su superficie de manera que desaparezca el campo eléctrico en su interior. Suponga que el potencial debido a una carga Q es V. Si se aumentara la carga total en un factor k se incrementaría la densidad superficial de carga ρ_s en el mismo factor en todos los puntos sin afectar la distribución de carga, ya que el conductor sigue siendo un cuerpo equipotencial en una situación estática. De la ecuación (3-39) podemos llegar a la conclusión de que *el potencial de un conductor aislado es directamente proporcional a su carga total. Esto también puede verse del hecho* de que al aumentar V en un factor

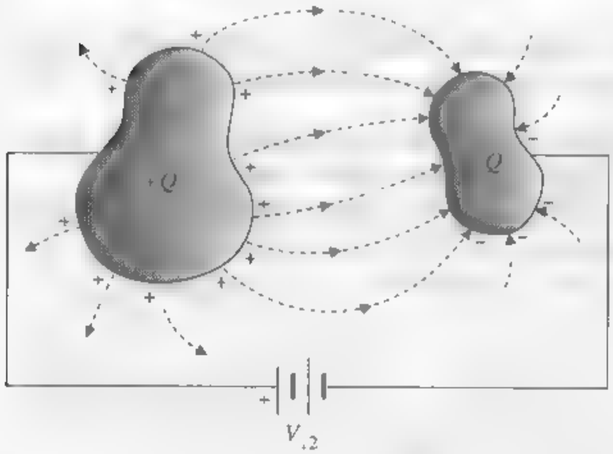


FIGURA 3-19 Un condensador de dos conductores.

k se incrementa $\mathbf{E} = -\nabla V$ en el mismo factor. Sin embargo, de la ecuación (3-46), $\mathbf{E} = \mathbf{a}_n\rho_s/\epsilon_0$; se desprende entonces que ρ_s, y por tanto la carga total Q, también aumentan en un factor de k. Por consiguiente, la razón Q/V no cambia. Escribimos

$$\boxed{Q = CV,} \tag{3-85}$$

donde la constante de proporcionalidad C se denomina **capacitancia** del cuerpo conductor aislado. Su unidad en el SI es el coulomb por volt o farad (F).

El **condensador** (o **capacitor**) es de gran importancia en la práctica y consiste en dos conductores separados por el espacio libre o por un medio dieléctrico. Los conductores pueden ser de forma arbitraria, como en la figura 3-19. Cuando se conecta una fuente de voltaje de corriente continua entre los conductores, ocurre una transferencia de carga que produce una carga $+Q$ en un conductor y $-Q$ en el otro. En la figura 3-19 se muestran varias líneas de campo eléctrico que se originan de las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. Observe que las líneas de campo son perpendiculares a las superficies de los conductores, las cuales son superficies equipotenciales. Podemos aplicar la ecuación (3-85) en esta situación si consideramos que V es la diferencia de potencial entre los dos conductores, V_{12}. Es decir,

Definición de la capacitancia

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{12}} \quad \text{(F).}} \tag{3-86}$$

La capacitancia de un condensador es una propiedad física de un sistema de dos conductores. Depende de la geometría del condensador y de la permitividad del medio

Podemos determinar la capacitancia C entre dos conductores a partir de la ecuación (3-86), usando el procedimiento siguiente:

Procedimiento para determinar C

1. Elija un sistema de coordenadas apropiado para la geometría especificada.
2. Suponga cargas $+Q$ y $-Q$ en los conductores.
3. Encuentre $\mathbf{E}$ a partir de Q con la ecuación (3-76), la ley de Gauss u otras relaciones.
4. Encuentre V_{12} calculando

   $$V_{12} = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\ell$$

   desde conductor que tiene $-Q$ hasta el conductor que tiene $+Q$.
5. Determine C calculando la razón Q/V_{12}

EJEMPLO 3-15

Un condensador de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas de área S separadas por una distancia uniforme d. El espacio entre las placas se llena con un dieléctrico de permitividad constante ϵ. Determine la capacitancia

SOLUCIÓN

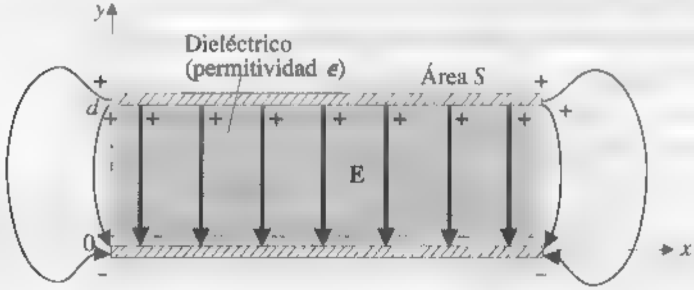
En la figura 3-20 se muestra un corte transversal del condensador. El sistema de coordenadas apropiado para este ejemplo es el cartesiano. Siguiendo el procedimiento previamente descrito, colocamos cargas $+Q$ y $-Q$ en las placas conductoras superior e inferior, respectivamente. Suponemos que las cargas se distribuyen de manera uniforme en las placas conductoras, con densidades superficiales $+\rho_s$ y $-\rho_s$, donde

$$\rho_s = \frac{Q}{S}.$$

A partir de la ecuación (3-76) tenemos

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \frac{\rho_s}{\epsilon} = -\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S},$$

FIGURA 3-20 Corte transversal de un condensador de placas paralelas (ejemplo 3-15)



que es constante en el dieléctrico si se ignora el efecto marginal del campo eléctrico en los bordes de las placas. Entonces,

$$V_{12} = -\int_{y=0}^{y=d} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_0^d \left(-\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S}\right)\cdot(\mathbf{a}_y\, dy) = \frac{Q}{\epsilon S} d.$$

Por consiguiente, *para un condensador de placas paralelas,*

Capacitancia de un condensador de placas paralelas

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{12}} = \epsilon \frac{S}{d},} \tag{3-87}$$

que es independiente de Q y V_{12}.

■ **EJERCICIO 3.13** Determine la capacitancia del condensador de placas paralelas de la figura 3-20 comenzando con una diferencia de potencial supuesta V_{12} entre las placas superior e inferior, para luego determinar Q y calcular la razón Q/V_{12}.

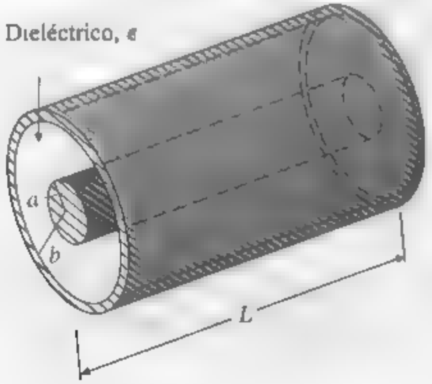
EJEMPLO 3-16

Un condensador cilíndrico, ilustrado en la figura 3-21, consiste en un conductor interno con radio a y un conductor externo con radio interior b El espacio entre los conductores está lleno de un dieléctrico con permitividad ϵ y la longitud del condensador es L Determine la capacitancia del condensador.

SOLUCIÓN

Para este problema usamos coordenadas cilíndricas. Primero suponemos cargas $+Q$ y $-Q$ en la superficie del conductor interno y la superficie interna del conductor externo, respectivamente. El campo **E** del dieléctrico puede obtenerse aplicando la ley

FIGURA 3-21 Condensador cilíndrico (ejemplos 3-16 y 3-19).



de Gauss a la superficie gaussiana cilíndrica en el dieléctrico $a < r < b$. Si observamos que $\rho_\ell = Q/L$, tenemos, a partir de la ecuación (3-23),

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}. \tag{3-88}$$

Ignoramos una vez más los efectos marginales del campo cerca de los bordes de los conductores. La diferencia de potencial entre los conductores interno y externo es

$$\begin{aligned} V_{ab} &= -\int_{r=b}^{r=a} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_b^a \left(\mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}\right)\cdot(\mathbf{a}_r\, dr) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \tag{3-89}$$

Por lo tanto, *para un condensador cilíndrico,*

Capacitancia de un condensador cilíndrico

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}.} \tag{3-90}$$

■ **EJERCICIO 3.14** Suponga que la Tierra es una esfera conductora de gran tamaño (radio = 6.37×10^3 km) rodeada por aire. Encuentre su capacitancia referida al infinito.

RESPUESTA: 7.08×10^{-4} (F).

3-10 ENERGÍA Y FUERZAS ELECTROSTÁTICAS

En la sección 3-5 indicamos que el potencial eléctrico en un punto de un campo eléctrico es el trabajo necesario para traer una unidad de carga positiva desde el infinito (potencial de referencia cero) a dicho punto. Para traer una carga Q_2 (lentamente, de manera que puedan ignorarse la energía cinética y los efectos de radiación) desde el infinito *contra* el campo creado por una carga Q_1 en el espacio libre hasta una distancia R_{12}, la cantidad de trabajo necesaria es

$$W_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}}. \tag{3-91}$$

Puesto que los campos electrostáticos son conservativos, W_2 es independiente de la trayectoria que sigue Q_2. Otra forma de la ecuación (3-91) es

$$W_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_1. \tag{3-92}$$

Este trabajo se almacena como energía potencial en el conjunto de las dos cargas. Combinando las ecuaciones (3-91) y (3-92) podemos escribir

$$W_2 = \tfrac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2). \tag{3-93}$$

Suponga ahora que se trae otra carga Q_3 desde el infinito hasta un punto que está a una distancia R_{13} de Q_1 y R_{23} de Q_2; se necesita un trabajo adicional igual a

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}}\right). \tag{3-94}$$

La suma de ΔW en la ecuación (3-94) y W_2 en la ecuación (3-91) es la energía potencial, W_3, almacenada en el conjunto de las tres cargas Q_1, Q_2 y Q_3. Es decir,

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{R_{23}}\right). \tag{3-95}$$

Podemos reescribir W_3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_3 = \frac{1}{2}\bigg[& Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}}\right) + Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}}\right) \\ & + Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}}\right)\bigg] \\ = {} & \tfrac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3). \end{aligned} \tag{3-96}$$

En la ecuación (3-96), V_1, el potencial en la posición de Q_1, se debe a las cargas Q_2 y Q_3; es *diferente* de V_1 en la ecuación (3 92), para el caso de dos cargas De forma similar, V_2 y V_3 son los potenciales de Q_2 y Q_3, respectivamente, en el conjunto de tres cargas

Si extendemos este procedimiento para incorporar cargas adicionales, llegamos a la siguiente expresión general de la energía potencial de un grupo de N cargas puntuales discretas en reposo. (El propósito del subíndice e en W_e es indicar que la energía es de naturaleza eléctrica.) Tenemos

Energía eléctrica almacenada en un sistema de cargas puntuales discretas

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \qquad \text{(J)},} \tag{3-97}$$

donde V_k, el potencial eléctrico en Q_k, se debe a las demás cargas.

La unidad en el SI de la energía, el ***joule*** (J), es demasiado grande para usarse en la física de partículas elementales, de manera que es más conveniente medir la energía en función de una unidad mucho más pequeña, llamada ***electrón-volt*** (eV). Un electrón-volt es la energía o el trabajo necesario para mover un electrón en contra de una diferencia de potencial de un volt.

Relación entre un joule y un electrón-volt

$$1\ \text{(eV)} = (1.60 \times 10^{-19}) \times 1 = 1.60 \times 10^{-19} \qquad \text{(J)}. \tag{3-98}$$

La energía en (eV) es en esencia la que se expresa en (J) por unidad de carga electrónica.

■ EJERCICIO 3.15 Convierta a joules la energía cinética de 2 (TeV) del haz de protones de un acelerador de partículas de alta energía muy poderoso.

RESPUESTA: 3.20×10^{-7} (J)

■ **EJERCICIO 3.16** Determine la cantidad de energía necesaria para situar tres cargas puntuales, −1 (μC), 2 (μC) y 3 (μC), en los vértices de un triángulo equilátero con lados de 10 (cm) en el espacio libre.

RESPUESTA: 0.09 (J).

EJEMPLO 3-17

Encuentre la energía necesaria para formar una esfera de carga uniforme con radio b y densidad volumétrica de carga ρ_v.

SOLUCIÓN

Debido a la simetría, lo más sencillo es suponer que la esfera de carga se forma a partir de una sucesión de capas esféricas de grosor dR. Para el radio R ilustrado en la figura 3-22, el potencial es

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\epsilon_0 R},$$

donde Q_R es la carga total contenida en una esfera de radio R:

$$Q_R = \rho_v \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

La carga diferencial en la capa esférica de grosor dR es

$$dQ_R = \rho_v 4\pi R^2\, dR,$$

y el trabajo o la energía para llegar a dQ_R es

$$dW_e = V_R\, dQ_R = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho_v^2 R^4\, dR.$$

Por consiguiente, el trabajo o la energía total para formar una esfera de carga uniforme de radio b y densidad de carga ρ_v es

$$W_e = \int dW_e = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho_v^2 \int_0^b R^4\, dR = \frac{4\pi\rho_v^2 b^5}{15\epsilon_0} \qquad \text{(J)}. \tag{3-99}$$

En función de la carga total

$$Q = \rho_v \frac{4\pi}{3} b^3,$$

tenemos

$$W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 b} \qquad \text{(J)}. \tag{3-100}$$

La ecuación (3-100) nos indica que la energía es directamente proporcional al cuadrado de la carga total. La esfera de carga de la figura 3-22 puede ser, por ejemplo, una nube de electrones.

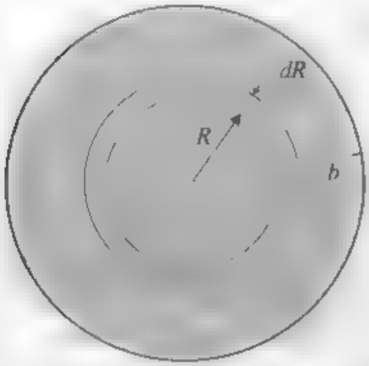


FIGURA 3-22 Formación de una esfera de carga uniforme (ejemplo 3-17)

Es necesario modificar la fórmula de W_e de la ecuación (3-97) para cargas discretas si existe una distribución de carga continua con densidad ρ_v. Para no tener que pasar por una demostración aparte, sustituimos Q_k por $\rho_v\,dv$ y la sumatoria por una integración, para obtener

Energía eléctrica almacenada en una distribución de carga continua

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho_v V\,dv \qquad \text{(J).}} \tag{3-101}$$

En la ecuación (3-101), V es el potencial en el punto donde la densidad volumétrica de carga es ρ_v, y V' es el volumen de la región donde existe ρ_v. Observe que el valor de W_e en la ecuación (3-101) incluye el trabajo (energía propia) necesario para formar la distribución de cargas macroscópicas, ya que es la energía de la interacción entre cada elemento de carga infinitesimal y todos los otros elementos de carga infinitesimales.

3-10.1 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA EN TÉRMINOS DE CANTIDADES DE CAMPO

La expresión de la energía electrostática de una distribución de carga en la ecuación (3-101) contiene la densidad de carga fuente ρ_v y la función de potencial V. En muchos casos es más conveniente contar con una expresión de W_e en términos de las cantidades de campo **E** o **D**, sin tener que conocer ρ_v de manera explícita. Para ello, sustituimos ρ_v por $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en la ecuación (3-101):

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} (\nabla \cdot \mathbf{D})V\,dv. \tag{3-102}$$

Después, usando la identidad vectorial (Prob. P.2-25), ecuación (2-114),

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V\nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla V, \tag{3-103}$$

podemos escribir la ecuación (3-102) como

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \nabla\cdot(V\mathbf{D})\,dv - \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\cdot\nabla V\,dv$$
$$= \frac{1}{2}\oint_{S'} V\mathbf{D}\cdot\mathbf{a}_n\,ds + \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv, \tag{3-104}$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para cambiar la primera integral de volumen por una integral de superficie cerrada, y hemos sustituido $\mathbf{E}$ por $-\nabla V$ en la segunda integral de volumen. Puesto que V' puede ser cualquier volumen que incluya todas las cargas, podemos elegirlo de manera que sea una esfera muy grande con radio R. Conforme $R \to \infty$, el potencial eléctrico V y la magnitud del desplazamiento eléctrico D disminuyen según $1/R$ y $1/R^2$, respectivamente.† El área de la superficie limitadora S' aumenta a razón de R^2. Por lo tanto, la integral de superficie de la ecuación (3-104) decrece al menos con una razón de $1/R$ y desaparecerá conforme $R \to \infty$. De esta manera, sólo nos queda la segunda integral del lado derecho de la ecuación (3-104):

Energía eléctrica en términos de E y D

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv \qquad \text{(J)}.} \tag{3-105}$$

Usando la relación $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ para un medio lineal e isótropo, podemos escribir W_e exclusivamente en términos de $\mathbf{E}$.

Energía eléctrica en términos de E y ε

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \epsilon E^2\,dv \qquad \text{(J)}.} \tag{3-106}$$

También podemos definir la ***densidad de energía electrostática*** w_e de manera que su integral de volumen sea igual a la energía electrostática total:

$$W_e = \int_{V'} w_e\,dv, \tag{3-107}$$

donde

$$w_e = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad \text{(J/m}^3\text{)}. \tag{3-108}$$

EJEMPLO 3-18

En la figura 3-23, un condensador de placas paralelas con área S y separación d se carga con un voltaje V. La permitividad del dieléctrico es ϵ. Encuentre la energía electrostática almacenada.

† Para cargas puntuales, $V \propto 1/R$ y $D \propto 1/R^2$; para dipolos, $V \propto 1/R^2$ y $D \propto 1/R^3$.

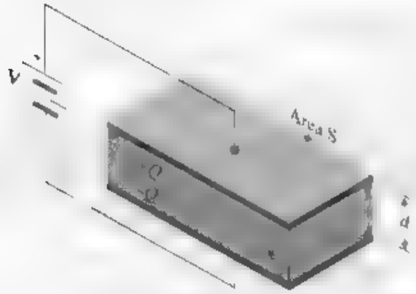


FIGURA 3-23

SOLUCIÓN

Con la fuente de corriente continua (baterías) conectada en la forma ilustrada, las placas superior e inferior tienen carga positiva y negativa, respectivamente. Si ignoramos los efectos marginales del campo en los bordes, el campo eléctrico en el dieléctrico es uniforme (sobre la placa) y constante (a través del dieléctrico) y tiene una magnitud de

$$E = \frac{V}{d}.$$

Utilizando la ecuación (3-106), tenemos

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \epsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 (Sd) = \frac{1}{2}\left(\epsilon\frac{S}{d}\right)V^2. \tag{3-109}$$

La cantidad entre paréntesis en la última expresión, $\epsilon S/d$, es la capacitancia del condensador de placas paralelas (véase la Ec 3-87) Por consiguiente,

Energía eléctrica almacenada en un condensador

$$\boxed{W_e = \tfrac{1}{2}CV^2 \qquad \text{(J)}.} \tag{3-110}$$

En el ejemplo siguiente se ilustra la forma de usar la ecuación (3-110) junto con la ecuación (3-106) para determinar capacitancias.

EJEMPLO 3-19

Utilice las fórmulas de energía (3-106) y (3-110) para hallar la capacitancia de un condensador cilíndrico que tiene una longitud L, un conductor interior de radio a, un conductor externo con radio interior b y un dieléctrico con permitividad ϵ, como se muestra en la figura 3-21.

SOLUCIÓN

Al aplicar la ley de Gauss, sabemos que

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}, \qquad a < r < b.$$

La energía electrostática almacenada en la región dieléctrica es, a partir de la ecuación (3-106),

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\int_a^b \epsilon\left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L r}\right)^2 (L2\pi r\, dr) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \tag{3-111}$$

Por otra parte, podemos expresar W_e en función de la capacitancia C. A partir de las ecuaciones (3-110) y (3-111) tenemos

$$W_e = \frac{C}{2}\left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Despejando C obtenemos

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)},$$

lo mismo que se obtuvo en la ecuación (3-90).

■ **EJERCICIO 3.17** Se conectan en serie dos condensadores con capacitancias de 20 (μF) y 40 (μF) a una batería de 60 (V). Calcule la energía almacenada en cada condensador

RESPUESTA: 16 (mJ), 8 (mJ).

3-10.2 FUERZAS ELECTROSTÁTICAS

La ley de Coulomb rige la fuerza entre dos cargas puntuales. En un sistema más complejo de cuerpos cargados sería muy tedioso usar la ley de Coulomb para determinar la fuerza ejercida sobre uno de los cuerpos por las cargas de los demás. Esta situación se presenta incluso en el sencillo caso de la determinación de la fuerza entre las placas de un condensador de placas paralelas cargado. A continuación analizaremos un método para calcular la fuerza sobre un objeto en un sistema de cargas a partir de la energía electrostática del sistema. Este método se basa en el ***principio de desplazamiento virtual***.

Consideraremos un *sistema aislado* de cuerpos conductores cargados y dieléctricos separados entre sí sin conexión con el mundo exterior. Las cargas de los cuerpos son constantes. Imagine que las fuerzas electrostáticas han desplazado uno de los cuerpos

una distancia diferencial $d\boldsymbol{\ell}$ (un desplazamiento virtual). El trabajo mecánico realizado *por el sistema* sería

$$dW = \mathbf{F}_Q \cdot d\boldsymbol{\ell}, \tag{3-112}$$

donde $\mathbf{F}_Q$ es la fuerza eléctrica total que actúa sobre el cuerpo en las condiciones de cargas constantes. Puesto que se trata de un sistema aislado sin suministro externo de energía, este trabajo mecánico debe realizarse a expensas de la energía electrostática almacenada; es decir,

$$dW = -dW_e = \mathbf{F}_Q \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{3-113}$$

En la ecuación (2.51) de la sección 2-5 se observa que el cambio diferencial de un escalar ocasionado por un cambio en posición $d\boldsymbol{\ell}$ es el producto punto del gradiente del escalar y $d\boldsymbol{\ell}$; escribimos entonces

$$dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{3-114}$$

Puesto que $d\boldsymbol{\ell}$ es arbitrario, comparando las ecuaciones (3-113) y (3 114) tenemos la siguiente relación.

Determinación de la fuerza electrostática sobre cuerpos cargados, usando el método del desplazamiento virtual

$$\boxed{\mathbf{F}_Q = \quad \nabla W_e \qquad \text{(N)}.} \tag{3-115}$$

La ecuación vectorial (3-115) es en realidad tres ecuaciones en el espacio tridimensional. Por ejemplo, la fuerza en la dirección x en coordenadas cartesianas es

$$(F_Q)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x}. \tag{3-116}$$

El procedimiento es similar para las otras direcciones.

EJEMPLO 3-20

Determine la fuerza sobre las placas conductoras de un condensador de placas paralelas cargado, cuyas placas tienen un área S y están separadas una distancia x por aire.

SOLUCIÓN

Suponemos que hay cargas fijas $\pm Q$ en las placas y usamos la ecuación (3-110) para escribir la energía eléctrica almacenada como

$$W_e = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV. \tag{3-117}$$

Si ignoramos el efecto marginal, existe una intensidad de campo eléctrico constante $\mathbf{E}$ entre las placas, donde

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_x \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = -\mathbf{a}_x \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \tag{3-118}$$

La diferencia de potencial V entre las placas superior e inferior es

$$V = -\int_{\substack{\text{Placa}\\ \text{inferior}}}^{\substack{\text{Placa}\\ \text{superior}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_x \, dx = \frac{Q}{\epsilon_0 S} x. \tag{3-119}$$

Al sustituir en la ecuación (3-117) el valor de V obtenido en la ecuación (3-119), para luego usar la ecuación (3-116), obtenemos

$$(F_Q)_x = -\frac{Q}{2}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}. \tag{3-120}$$

El signo negativo de la ecuación (3-120) indica que la fuerza es opuesta a la dirección de incremento de x.

PREGUNTAS DE REPASO

P.3-22 Defina la *capacitancia* y un *condensador*.

P.3-23 Escriba la fórmula de capacitancia de un condensador de placas paralelas de área S donde las placas están separadas por un medio con constante dieléctrica ϵ_r y espesor d

P.3-24 ¿Cuál es la definición de un *electrón-volt*? ¿Cómo se compara con un joule?

P.3-25 Escriba la expresión de la energía electrostática en términos de **E**

P.3-26 Analice el significado y el uso del *principio del desplazamiento virtual*

COMENTARIOS

1. La capacitancia de un condensador es independiente de la carga en los conductores y de la diferencia de potencial entre ellos.
2. La energía electrostática almacenada en un sistema de cargas discretas puede ser positiva o negativa.
3. La ecuación (3-105) para la energía es válida para un medio general, pero la ecuación (3-106) sólo se aplica a un medio lineal e isótropo.
4. Es posible demostrar que la fórmula de la energía electrostática almacenada dada por la ecuación (3-110) no sólo es válida para condensadores de placas paralelas, sino también para cualquier sistema de dos conductores.

3-11 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS CON VALORES EN LA FRONTERA

En este capítulo hemos visto técnicas para determinar la intensidad de campo eléctrico, el potencial eléctrico y la densidad de flujo eléctrico de distribuciones de carga. Sin embargo, en muchos problemas prácticos no se conoce la distribución de carga exacta en todos los puntos y no es posible aplicar de forma directa las fórmulas desarrolladas hasta ahora. Por ejemplo, si se especifican las cargas en ciertos puntos discretos

del espacio y los potenciales de algunos cuerpos conductores, es bastante difícil hallar la distribución de las cargas superficiales en los cuerpos conductores o la intensidad del campo eléctrico en el espacio. En esta sección analizaremos algunos métodos para resolver problemas en los que se especifican las condiciones en la frontera conductor-espacio libre (o dieléctrico). Estos tipos de problemas se conocen como ***problemas con valores en la frontera (o con condiciones de contorno)***. Primero formularemos las ecuaciones diferenciales que rigen el potencial eléctrico en una situación electrostática.

3-11.1 ECUACIONES DE POISSON Y DE LAPLACE

En la sección 3-7 señalamos que las ecuaciones (3-63) y (3-4) son las ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen la electrostática en cualquier medio. A continuación repetimos estas ecuaciones:

Ec. (3-63): $$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v. \tag{3-121}$$

Ec. (3-4): $$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{3-122}$$

La naturaleza irrotacional de **E**, indicada por la ecuación (3-122), nos permite definir un potencial eléctrico escalar V, como en la ecuación (3-26).

Ec. (3-26): $$\mathbf{E} = -\nabla V. \tag{3-123}$$

En un medio lineal e isótropo, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ y la ecuación (3-121) se convierte en

$$\nabla \cdot \epsilon\mathbf{E} = \rho_v. \tag{3-124}$$

Al sustituir la ecuación (3-123) en la ecuación (3-124) se obtiene

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v. \tag{3-125}$$

donde ϵ puede ser una función de la posición. En el caso de un medio simple (es decir, un medio que también es homogéneo), ϵ es constante y puede sacarse de la operación de divergencia. De esta manera tenemos

Ecuación de Poisson en forma de operador

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}.} \tag{3-126}$$

En la ecuación (3-126) se ha introducido un operador nuevo, ∇^2 (del cuadrado), el ***operador laplaciano*** que representa "la divergencia del gradiente de" o $\nabla \cdot \nabla$. La ecuación (3-126) se conoce como ***ecuación de Poisson***. En coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

y la ecuación (3-126) se convierte en

Ecuación de Poisson en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho_v}{\epsilon} \qquad (\mathrm{V/m^2}).} \tag{3-127}$$

De forma similar, podemos usar las ecuaciones (2-70) y (2-57) para verificar las siguientes expresiones de $\nabla^2 V$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 V=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{3-128}$$

Coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{R^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \tag{3-129}$$

La resolución de la ecuación de Poisson en tres dimensiones sujeta a condiciones en la frontera prescritas normalmente no es una tarea sencilla

En aquellos puntos de un medio simple donde no hay cargas libres, $\rho_v = 0$ y la ecuación (3-126) se reduce a

Ecuación de Laplace en forma de operador

$$\boxed{\nabla^2 V = 0,} \tag{3-130}$$

que se conoce como ***ecuación de Laplace***. La ecuación de Laplace ocupa un lugar muy importante en el electromagnetismo. En coordenadas cartesianas tenemos

Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{3-131}$$

3-11.2 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS CARTESIANAS

El caso más sencillo es cuando V es una función de una sola coordenada. Ilustraremos esta situación con un ejemplo.

EJEMPLO 3-21

Dos placas conductoras paralelas están separadas por una distancia d y se mantienen a potenciales de 0 y V_0, como se ilustra en la figura 3-24. La región entre las placas está llena con una distribución continua de electrones que tiene densidad volumétrica de carga $\rho_v = -\rho_0 y/d$. Suponga que el efecto marginal en los bordes es insignificante y determine

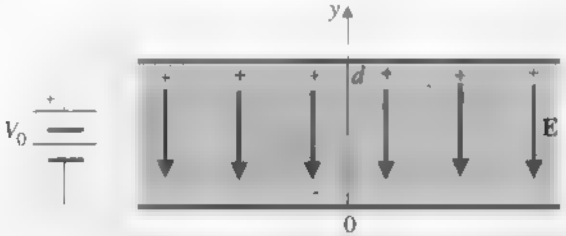


FIGURA 3-24 Condensador de placas paralelas (ejemplo 3-21).

a) el potencial en cualquier punto entre las placas, y
b) las densidades superficiales de carga en las placas.

SOLUCIÓN

a) La ecuación determinante es la ecuación de Poisson (3-127), que se simplifica a

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 d}y. \tag{3-132}$$

Al integrar dos veces la ecuación (3-132) tenemos

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d}y^3 + C_1 y + C_2. \tag{3-133}$$

Las condiciones en la frontera sobre las dos placas conductoras son:

En $y = 0$, $\quad V = 0 = C_2$.

En $y = d$, $\quad V = V_0 = \dfrac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} + C_1 d, \qquad C_1 = \dfrac{V_0}{d} - \dfrac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}$.

Al sustituir los valores anteriores de C_1 y C_2 en la ecuación (3-133) obtenemos la solución de la ecuación de Poisson (3-132).

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d}y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}\right)y. \tag{3-134}$$

La intensidad de campo eléctrico es $-\nabla V$.

$$\mathbf{E}(y) = -\mathbf{a}_y\frac{\partial V}{\partial y} = -\mathbf{a}_y\left[\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d}y^2 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}\right)\right]. \tag{3-135}$$

b) Las densidades superficiales de carga sobre las placas conductoras pueden determinarse de la condición en la frontera expresada por la ecuación (3-46)
En la placa inferior, $y = 0$.

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_y, \qquad \rho_{sl} = \epsilon_0 E_{yl} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6}.$$

En la placa superior, $y = d$.

$$\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_y, \qquad \rho_{su} = -\epsilon_0 E_{yu} = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{3}.$$

En este caso, $\rho_{su} \neq -\rho_{st}$ y ya no tiene sentido calcular la capacitancia.

■ **EJERCICIO 3.18** Demuestre que las siguientes funciones de potencial satisfacen la ecuación bidimensional de Laplace:

a) Ae^{-kx} sen ky, y

b) $A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a-y)\right]$,

donde A, k, a y b son constantes.

3-11.3 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

La ecuación de Laplace para el potencial eléctrico escalar V en coordenadas cilíndricas es, a partir de la ecuación (3-128)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{3-136}$$

Es bastante complicado obtener una solución general de la ecuación (3-136). En aquellos casos donde hay simetría cilíndrica ($\partial^2 V/\partial\phi^2 = 0$) y la dimensión longitudinal es muy grande en comparación con el radio ($\partial^2 V/\partial z^2 \cong 0$); la ecuación (3-136) se reduce a

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0, \tag{3-137}$$

y V es función únicamente de la dimensión radial r. La ecuación (3-137) puede integrarse dos veces para dar

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2, \tag{3-138}$$

donde las constantes de integración C_1 y C_2 están determinadas por las condiciones en la frontera de los problemas.

■ **EJERCICIO 3.19** El radio del conductor interno de un largo cable coaxial es a. El radio interior del conductor externo es b. Si los conductores interior y exterior se mantienen a potenciales de V_0 y 0, respectivamente, determine el potencial eléctrico y la intensidad de campo eléctrico en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace

RESPUESTA: $V = V_0 \ln(b/r)/\ln(b/a)$, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r V_0/r \cdot \ln(b/a)$.

Si el problema es tal que el potencial eléctrico sólo cambia en la dirección circunferencial y no en las direcciones r y z, la ecuación (3-136) se reduce a

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \tag{3-139}$$

Ilustraremos este caso en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3-22

Dos planos conductores aislados infinitos que se mantienen a potenciales de 0 y V_0 constituyen una configuración en forma de cuña, como se ilustra en la figura 3-25. Determine las distribuciones de potencial en las regiones:

a) $0 < \phi < \alpha$, y

b) $\alpha < \phi < 2\pi$.

SOLUCIÓN

Tenemos $\partial V/\partial r = 0$ y $\partial V/\partial z = 0$. Puesto que se excluye la región en $r = 0$, la ecuación (3-139) se convierte en

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0. \tag{3-140}$$

V sólo depende de ϕ y puede obtenerse de la ecuación (3-140) integrando dos veces

$$V(\phi) = K_1\phi + K_2. \tag{3-141}$$

Las dos constantes de integración, K_1 y K_2, se determinan de las condiciones en la frontera.

a) Para $0 \leq \phi \leq \alpha$:

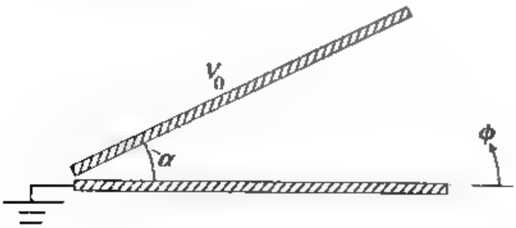
En $\alpha = 0$, $\quad V(0) = 0 = K_2$. (3-142a)

En $\phi = \alpha$, $\quad V(\alpha) = V_0 = K_1\alpha, \quad K_1 = V_0/\alpha$. (3-142b)

Por lo tanto, de la ecuación (3-141),

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\alpha}\phi, \qquad 0 \leq \phi \leq \alpha. \tag{3-143}$$

FIGURA 3-25 Dos planos conductores aislados infinitos, mantenidos a potenciales constantes (ejemplo 3-22).



b) Para $\alpha \leq \phi \leq 2\pi$:

En $\phi = \alpha$, $\quad V(\alpha) = \alpha K_1 + K_2.$ (3–144a)

En $\phi = 2\pi$, $\quad V(2\pi) = 2\pi K_1 + K_2.$ (3–144b)

Resolviendo las ecuaciones (3-144a) y (3-144b) tenemos

$$K_1 = -\frac{V_0}{2\pi - \alpha} \tag{3-145a}$$

y

$$K_2 = \frac{2\pi V_0}{2\pi - \alpha}. \tag{3-145b}$$

Finalmente, de la ecuación (3-141) obtenemos

$$V(\phi) = \frac{V_0}{2\pi - \alpha}(2\pi - \phi), \qquad \alpha \leq \phi \leq 2\pi. \tag{3-146}$$

3-11.4 Problemas con valores en la frontera en coordenadas esféricas

Podemos obtener las ecuaciones de Poisson y Laplace para el potencial eléctrico escalar V en coordenadas esféricas usando la ecuación (3-129). En el ejemplo siguiente se analizará un caso unidimensional simplificado.

Ejemplo 3-23

Los radios interior y exterior de dos delgadas capas esféricas conductoras y concéntricas son R_i y R_o, respectivamente. El espacio entre las capas esta lleno con un material aislante. La capa interior se mantiene a un potencial V_1 y la exterior a V_2 Determine la distribución de potencial en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace.

Solución

Puesto que la situación presentada en la figura 3-26 tiene simetría esférica, el potencial eléctrico es independiente de θ y ϕ. Al sustituir la ecuación (3-129) simplificada en la ecuación (3-130) se obtiene la siguiente ecuación unidimensional de Laplace.

$$\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = 0. \tag{3-147}$$

Al integrar una vez la ecuación (3-147) con respecto a R se tiene

$$\frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2}. \tag{3-148}$$

Una segunda integración produce

$$V = -\frac{C_1}{R} + C_2. \tag{3-149}$$

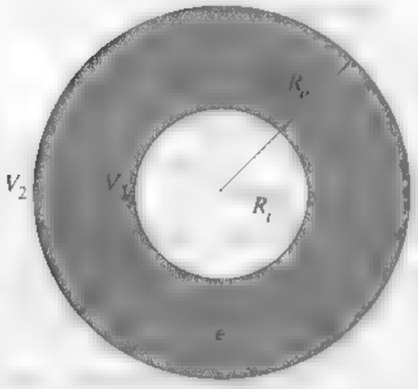


FIGURA 3-26 Dos capas conductoras concéntricas mantenidas a potenciales constantes (ejemplo 3-23).

Las dos constantes de integración, C_1 y C_2, se determinan a partir de las condiciones en la frontera en las dos capas conductoras.

En $R = R_i$,

$$V_1 = -\frac{C_1}{R_i} + C_2. \tag{3-150a}$$

En $R = R_o$,

$$V_2 = -\frac{C_1}{R_o} + C_2. \tag{3-150b}$$

La solución de las ecuaciones (3-150a) y (3-150b) nos da

$$C_1 = -\frac{R_o R_i (V_1 - V_2)}{R_o - R_i} \tag{3-151a}$$

y

$$C_2 = \frac{R_o V_2 - R_i V_1}{R_o - R_i}. \tag{3-151b}$$

Por lo tanto, la distribución de potencial entre las dos capas es, utilizando las ecuaciones (3-149), (3-151a) y (3-151b),

$$V(R) = \frac{1}{R_o - R_i}\left[\frac{R_i R_o}{R}(V_1 - V_2) + R_o V_2 - R_i V_1\right], \quad R_i \le R \le R_o. \tag{3-152}$$

Podemos observar en la ecuación (3-152) que V es independiente de la constante dieléctrica del material aislante

■ **EJERCICIO 3.20** Encuentre la distribución de potencial en la región $R \geqslant R_o$ del ejemplo 3-23.

RESPUESTA: $V = R_o V_2 / R$.

3-11.5 MÉTODO DE IMÁGENES

El método de imágenes simplifica la resolución de ciertos problemas.

Hay una clase de problemas de electrostática con condiciones en la frontera que al parecer son difíciles de satisfacer si se resolviera de forma directa la ecuación de Poisson o de Laplace que las rige, pero las condiciones sobre las superficies limitadoras de estos problemas pueden establecerse mediante ***cargas imagen*** adecuadas, pudiéndose entonces determinar las distribuciones de potencial de forma bastante sencilla. Este método de sustituir las superficies limitadoras por cargas imagen apropiadas, en lugar de intentar una resolución formal de la ecuación de Poisson o de Laplace, se conoce como ***método de imágenes***.

Teorema de unicidad

Antes de analizar el método de imágenes, es importante saber que ***una solución de la ecuación de Poisson*** (de la cual la ecuación de Laplace es un caso especial) ***que satisface un conjunto de condiciones en la frontera (o de contorno) es una solución única***. Este enunciado se conoce como ***teorema de unicidad***. Debido al teorema de unicidad, la solución de un problema electrostático que satisface un conjunto de condiciones en la frontera es *la única solución posible*, sin importar el método con el cual se obtenga la solución. Incluso una solución obtenida por estimaciones realizadas de forma inteligente será la única correcta. El teorema de unicidad puede demostrarse formalmente,† pero aquí simplemente aceptaremos su veracidad

A continuación analizaremos varias aplicaciones importantes del método de imágenes.

A. *Cargas puntuales cercanas a planos conductores*

Ilustraremos este tipo de problemas con un ejemplo.

EJEMPLO 3-24

Una carga positiva Q está situada a una distancia d sobre un gran plano conductor conectado a tierra (potencial cero), como se muestra en la figura 3-27(a). Calcule (a) el potencial en un punto arbitrario $P(x, y, z)$ de la región $y > 0$ y (b) la distribución de carga inducida sobre la superficie del plano conductor.

SOLUCIÓN

a) Un procedimiento formal para la resolución de este problema requeriría resolver la ecuación de Poisson en la región $y > 0$ sujeta a la condición en la frontera $V = 0$ en $y = 0$ y en el infinito. Es bastante difícil obtener de

† Véase, por ejemplo, D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, 2da. ed., págs. 158-159. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1989.

Imagen de una carga puntual cerca de un gran plano conductor

forma directa esta solución. Por otra parte, si eliminamos el plano conductor y lo sustituimos por una carga puntual imagen $-Q$ en $y = -d$, como se muestra en la figura 3-27(b), no cambiarían ni la situación en la región $y > 0$ ni las condiciones en la frontera. Observando la figura 3-27(b) podemos escribir el potencial en un punto $P(x, y, z)$ debido a las dos cargas.

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}}\right], \quad y \geqslant 0; \tag{3-153a}$$

y

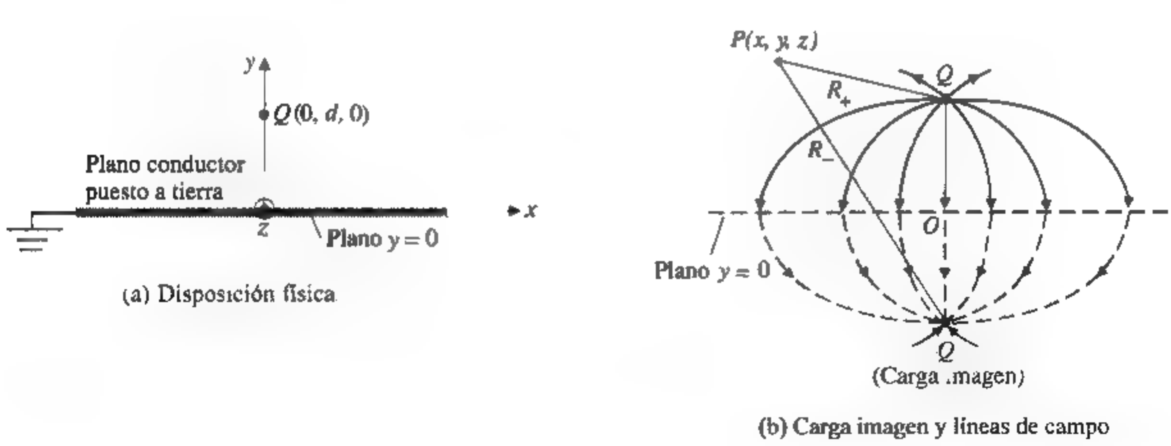
$$V(x, y, z) = 0, \quad y \leqslant 0. \tag{3-153b}$$

Puesto que se satisfacen las condiciones en la frontera especificadas, las ecuaciones (3-153a) y (3-153b) representan la solución correcta, en virtud del teorema de unicidad.

b) Para hallar la distribución de carga inducida sobre la superficie conductora, primero se determina la intensidad de campo eléctrico. A partir de la ecuación (3-153a) tenemos

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y(y-d) + \mathbf{a}_z z}{[x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y(y+d) + \mathbf{a}_z z}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{3/2}}\right\},$$
$$y \geqslant 0. \tag{3-154}$$

FIGURA 3-27 Carga puntual y plano conductor puesto a tierra (ejemplo 3-24).



La densidad superficial de carga inducida es, a partir de las ecuaciones (3-46) y (3-154),

$$\rho_s = \epsilon_0 E_y \Big|_{y=0} = -\frac{Qd}{2\pi(x^2 + d^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{3-155}$$

Debemos subrayar que el método de imágenes únicamente puede usarse para determinar los campos en la región donde *no* se encuentran las cargas imagen. Por ello, en el ejemplo 3-24 *no* podemos usar las cargas puntuales $+Q$ y $-Q$ para calcular V o $\mathbf{E}$ en la región $y < 0$. De hecho, tanto V como $\mathbf{E}$ son nulos en la región $y < 0$.

■ **EJERCICIO 3.21** Encuentre la cantidad total de carga inducida en la superficie del plano conductor infinito del ejemplo 3-24.

RESPUESTA: $-Q$.

B. *Línea de carga cercana a un cilindro conductor paralelo*

Consideremos ahora el problema de una línea de carga ρ_ℓ (C/m) situada a una distancia d del eje de un cilindro circular conductor paralelo de radio a. Se supone que tanto la línea de carga como el cilindro conductor son infinitamente largos. En la figura 3-28(a) se muestra un corte transversal de esta disposición Antes de atacar el problema por el método de imágenes hay que señalar lo siguiente: (a) La imagen debe ser una línea de carga paralela dentro del cilindro para que la superficie cilíndrica en r a sea equipotencial. Llamemos a esta línea de carga imagen ρ_i. (2) Debido a la simetría con respecto a la línea OP, la línea de carga imagen debe estar en algún lugar a lo largo de OP, digamos en el punto P_i, que está a una distancia d_i del eje (Fig. 3-28b). Debemos determinar dos incógnitas: ρ_i y d_i.

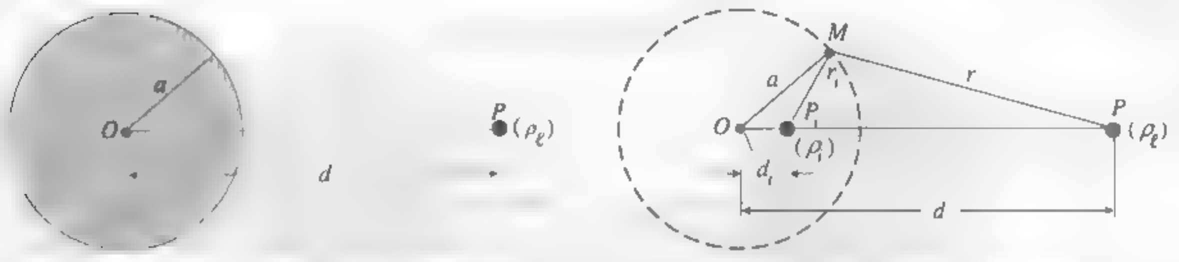
Como primer paso, supongamos que

Línea de carga imagen

$$\boxed{\rho_i = -\rho_\ell.} \tag{3-156}$$

En esta etapa, la ecuación (3-156) es sólo una solución de prueba (una estimación inteligente) y no tenemos la seguridad de que sea válida. Usaremos esta solución de prueba hasta descubrir que no satisface las condiciones en la frontera. Sin embargo, si la ecuación (3-156) conduce a una solución que satisface todas las condiciones en la frontera, entonces será la única solución, debido al teorema de unicidad. Nuestro siguiente trabajo será ver si podemos determinar d_i.

El potencial eléctrico a la distancia r de una línea de carga con densidad ρ_ℓ puede determinarse integrando la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ dada por la ecuación (3-23):



(a) Línea de carga y cilindro conductor paralelo

(b) Línea de carga y su imagen

FIGURA 3-28 Corte transversal de una línea de carga y su imagen en un cilindro circular conductor paralelo.

$$V = -\int_{r_0}^{r} E_r\, dr = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\,dr = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}. \tag{3-157}$$

Observe que el punto de referencia del potencial cero, r_0, no puede estar en infinito, ya que si asignamos $r_0 = \infty$ en la ecuación (3-157), V sería infinito en todos los demás puntos. Dejemos r_0 sin especificar por el momento. El potencial en un punto sobre o fuera de la superficie del cilindro se obtiene sumando las contribuciones de ρ_ℓ y ρ_i. Específicamente, para un punto M sobre la superficie del cilindro presentado en la figura 3-28(b) tenemos

$$V_M = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_i} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_i}{r}. \tag{3-158}$$

Por cuestiones de sencillez, en la ecuación (3-158) hemos elegido como punto de referencia de potencial cero un punto equidistante de ρ_ℓ y ρ_i, para que se cancelen los términos $\ln r_0$. De no haberlo hecho, sería necesario incluir un término constante en el lado derecho de la ecuación (3-158), aunque no afectaría lo que sigue. Las superficies equipotenciales están especificadas por

$$\frac{r_i}{r} = \text{constante}. \tag{3-159}$$

Para que una superficie equipotencial coincida con la superficie cilíndrica ($\overline{OM} = a$), el punto P_i debe estar situado de manera que los triángulos OMP_i y OPM sean similares. Estos triángulos ya tienen un ángulo común, $\angle MOP_i$. Debemos elegir el punto P_i de manera que $\angle OMP_i = \angle OPM$. Tenemos

$$\frac{\overline{P_iM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}},$$

o

$$\frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d} = \text{constante}. \tag{3-160}$$

De la ecuación (3-160) podemos ver que si

$$\boxed{d_i = \frac{a^2}{d}} \tag{3-161}$$

la línea de carga imagen $-\rho_\ell$, junto con ρ_ℓ, hará que la superficie cilíndrica punteada de la figura 3-28(b) sea equipotencial. Si el punto M cambia de posición en el círculo punteado, también cambiarán r_i y r; sin embargo, su razón sigue siendo una constante igual a a/d. El punto P_i se denomina ***punto inverso*** de P con respecto a un círculo de radio a.

La línea de carga imagen $\rho_i = -\rho_\ell$ puede entonces sustituir a la superficie cilíndrica conductora y podemos determinar V y $\mathbf{E}$ en cualquier punto *fuera de la superficie* a partir de las líneas de carga ρ_ℓ y $-\rho_\ell$. Por simetría, vemos que la superficie cilíndrica paralela que rodea a la línea de carga original ρ_ℓ, con radio a y eje a una distancia d_i a la derecha de P, también es una superficie equipotencial. Esta observación nos permite calcular la capacitancia por unidad de longitud de una línea de transmisión abierta formada por dos conductores paralelos de sección transversal circular.

EJEMPLO 3-25

Determine la capacitancia por unidad de longitud entre dos largos alambres conductores circulares paralelos de radio a. Los ejes de los alambres están separados una distancia D.

SOLUCIÓN

Remítase al corte transversal de la línea de trasmisión de dos alambres que se muestra en la figura 3-29. Las superficies equipotenciales de los dos alambres pueden considerarse como generadas por un par de líneas de carga $+\rho_\ell$ y $-\rho_\ell$ separadas por una distancia $(D - 2d_i) = d - d_i$. La diferencia de potencial entre los dos alambres es la que existe entre dos puntos cualesquiera de los alambres respectivos. Denotemos con los subíndices 1 y 2 los alambres que rodean a las líneas de carga equivalentes $+\rho_\ell$ y $-\rho_\ell$, respectivamente. A partir de las ecuaciones (3-158) y (3-160) tenemos

$$V_2 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

y, de manera similar,

$$V_1 = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}.$$

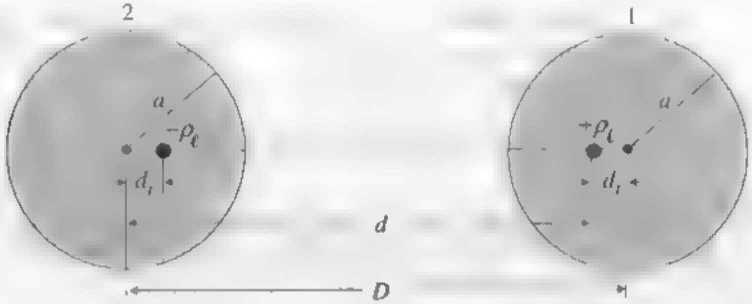


FIGURA 3-29 Corte transversal de una línea de transmisión de dos alambres y líneas de carga equivalentes (ejemplo 3-25).

Observamos que V_1 es una cantidad positiva, mientras que V_2 es negativa porque $a < d$. La capacitancia por unidad de longitud es

$$C = \frac{\rho_\ell}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}, \tag{3-162}$$

donde

$$d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d},$$

de donde obtenemos†

$$d = \tfrac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}). \tag{3-163}$$

Si usamos la ecuación (3-163) en la ecuación (3-162) tenemos

Capacitancia por unidad de longitud de alambres paralelos

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1}\right]} \quad \text{(F/m)}.} \tag{3-164}$$

Como

$$\ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] = \cosh^{-1}x \text{ para } x > 1,$$

la ecuación (3-164) puede escribirse alternativamente como

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad \text{(F/m)}.} \tag{3-165}$$

† La otra solución, $d = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - 4a^2})$ se descarta porque normalmente D y d son mucho mayores que a.

Cuando el diámetro de los alambres es muy pequeño en comparación con la distancia que los separa, $(D/2a) \gg 1$, la ecuación (3-164) se simplifica a

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(D/a)} \qquad \text{(F/m)}.} \tag{3-166}$$

■ **EJERCICIO 3.22** Una larga línea de transmisión de energía, de 2 (cm) de radio, es paralela a la tierra y está situada a 10 (m) sobre ésta. Suponiendo que la tierra es un plano conductor infinito, encuentre la capacitancia por metro de línea con respecto a la tierra.

RESPUESTA: 8.04 (pF/m).

PREGUNTAS DE REPASO

P.3-27 Escriba en notación vectorial las ecuaciones de Poisson y de Laplace para un medio simple.

P.3-28 Escriba las ecuaciones de Poisson y de Laplace en coordenadas cartesianas para un medio simple.

P.3-29 Si $\nabla^2 U = 0$, ¿por qué no sale que U sea idénticamente cero?

P.3-30 Se aplica un voltaje fijo a un condensador de placas paralelas

a) ¿La intensidad de campo eléctrico depende de la permitividad del medio en el espacio entre las placas?

b) ¿La densidad de flujo eléctrico depende de la permitividad del medio? Explique

P.3-31 Suponga que se depositan cargas fijas $+Q$ y $-Q$ sobre las placas de un condensador de placas paralelas aislado.

a) ¿La intensidad de campo eléctrico depende de la permitividad del medio en el espacio entre las placas?

b) ¿La densidad de flujo eléctrico depende de la permitividad del medio? Explique.

P.3-32 Enuncie con palabras el *teorema de unicidad de la electrostática.*

P.3-33 ¿Cuál es la imagen de una nube esférica de electrones con respecto a un plano conductor infinito?

P.3-34 ¿Cuál es la imagen de una línea de carga infinitamente larga con densidad ρ_ℓ con respecto a un cilindro circular conductor paralelo?

P.3-35 ¿Cuál es la superficie de potencial cero de la línea de transmisión de dos alambres de la figura 3-29?

COMENTARIOS

1. La ecuación de Poisson (3-126) y la ecuación de Laplace (3-130) no son válidas si el medio es no lineal, no homogéneo o anisótropo.
2. El método de imágenes *sólo* puede usarse para determinar los campos en la región donde *no* se localizan las cargas imagen.

RESUMEN

Este capítulo estudia los campos eléctricos estáticos de cargas en reposo y que no cambian con el tiempo. Tras definir la intensidad de campo eléctrico **E** como la fuerza por unidad de carga,

- presentamos los dos postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre que especifican la divergencia y el rotacional de **E**;
- derivamos la ley de Coulomb y la ley de Gauss, lo que nos permitió determinar el campo eléctrico debido a distribuciones de carga discretas y continuas;
- presentamos el concepto del potencial eléctrico escalar;
- consideramos el efecto de los medios materiales en un campo eléctrico estático;
- analizamos el efecto macroscópico de los dipolos inducidos, hallando las densidades de carga de polarización equivalentes;
- definimos la densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico, **D**, y la constante dieléctrica;
- analizamos las condiciones en la frontera de los campos eléctricos estáticos;
- definimos la capacitancia y explicamos el procedimiento para determinarla;
- encontramos las fórmulas de la energía electrostática almacenada,
- usamos el principio del desplazamiento virtual para calcular la fuerza sobre un objeto en un sistema cargado;
- presentamos las ecuaciones de Poisson y de Laplace e ilustramos el método de resolución de problemas simples, y
- explicamos el método de imágenes para resolver problemas electrostáticos con valores en la frontera.

PROBLEMAS

P.3-1 El osciloscopio de rayos catódicos (ORC) de la figura 3-2 se usa para medir el voltaje aplicado a las placas de desviación paralelas.

a) Suponiendo que no hay rupturas en el aislamiento, ¿cuál es el voltaje máximo que puede medirse si la distancia de separación entre las placas es h?

b) ¿Cuál es la restricción de L si el diámetro de la pantalla es D?

c) ¿Qué puede hacerse con una geometría fija para duplicar el voltaje máximo que puede medir el ORC?

P.3-2 Tres cargas puntuales de 2 (μC) están situadas en el aire, en los vértices de un triángulo equilátero de 10 (cm) de lado. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza experimentada por cada carga.

P.3-3 Dos cargas puntuales, Q_1 y Q_2, están situadas en (0, 5, −1) y (0, −2, 6), respectivamente. Determine la relación entre Q_1 y Q_2 para que la fuerza total ejercida sobre una carga de prueba en el punto $P(0, 2, 3)$

a) no tenga componente en y, y

b) no tenga componente en z.

P.3-4 Tres cargas puntuales $Q_1 = -9$ (μC), $Q_2 = 4$ (μC) y $Q_3 = -36$ (μC) se disponen en una línea recta. La distancia entre Q_1 y Q_3 es 9 (cm). Se sabe que se puede seleccionar una posición para Q_2 de forma que todas las cargas experimenten una fuerza nula. Determine esa posición.

P.3-5 En el ejemplo 3-8, determine la posición del punto P en el eje z más allá del cual el disco puede considerarse como carga puntual si el error en el cálculo de **E** no es mayor que el 1%.

P.3-6 Una línea de carga de densidad uniforme ρ_ℓ forma un círculo de radio b que yace en el plano xy en el aire, con su centro en el origen.

a) Encuentre la intensidad de campo eléctrico **E** en el punto $(0, 0, h)$

b) ¿Con qué valor de h en el apartado (a) se obtendrá la **E** máxima? ¿Cuál es este máximo?

c) Explique por qué **E** tiene un máximo en esa posición.

P.3-7 Una línea de carga con densidad uniforme ρ_ℓ forma un semicírculo de radio b en la mitad superior del plano xy. Determine la magnitud y la dirección de la intensidad de campo eléctrico en el centro del semicírculo.

P.3-8 Una distribución esférica de carga $\rho = \rho_0[1 - (R^2/b^2)]$ existe en la región $0 \leq R \leq b$. Esta distribución de carga está rodeada concéntricamente por una capa conductora de radio interior R_i ($> b$) y radio exterior R_o. Determine **E** en todos los puntos.

P.3-9 Dos superficies cilíndricas coaxiales de longitud infinita, $r = a$ y $r = b$ ($b > a$), tienen densidades superficiales de carga ρ_{sa} y ρ_{sb}, respectivamente.

a) Determine **E** en todos los puntos.

b) ¿Cuál debe ser la relación entre a y b para que **E** se anule para $r > b$?

P.3-10 Determine el trabajo realizado para mover una carga de +5 (μC) de $P_1(1, 2, -4)$ a $P_2(-2, 8, -4)$ en el campo $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$

a) a lo largo de la parábola $y = 2x^2$, y

b) a lo largo de la línea recta que une P_1 y P_2.

P.3-11 Repita el problema P.3-10 para el campo $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x y - \mathbf{a}_y x$.

P.3-12 Una línea de carga finita de longitud L tiene una densidad lineal de carga uniforme ρ_ℓ y es coincidente con el eje x.

a) Determine V en el plano que divide en dos partes iguales a la línea de carga.

b) Determine **E** directamente de ρ_ℓ aplicando la ley de Coulomb

c) Compruebe la respuesta del apartado (b) con $-\nabla V$.

P.3-13 La polarización en un cubo dieléctrico de lados L, centrado en el origen, está expresada por $\mathbf{P} = P_0(\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z)$.

a) Determine las densidades superficial y volumetrica de carga ligada

b) Demuestre que la carga total ligada es cero.

P.3-14 El vector de polarización en una esfera dieléctrica de radio b es $\mathbf{P} = \mathbf{a}_x P_0$.

a) Determine las densidades superficial y volumétrica de carga ligada.

b) Demuestre que la carga total ligada es cero.

P.3-15 El eje de un largo tubo dieléctrico, con radio interior r_i y radio exterior r_o, coincide con el eje z. Existe un vector de polarización $\mathbf{P} = P_0(\mathbf{a}_x 3x + \mathbf{a}_y 4y)$ en el dieléctrico.

a) Determine las densidades superficial y volumétrica de carga ligada.

b) Demuestre que la carga total ligada es cero.

P.3-16 Una carga puntual positiva Q está en el centro de una capa dieléctrica esférica con radio interior R_i y radio exterior R_o. La constante dieléctrica de la capa es ϵ_r. Determine $\mathbf{E}$, V, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{P}$ como funciones de la distancia radial R.

P.3-17 Resuelva los siguientes problemas.

a) Determine el voltaje de ruptura de un condensador de placas paralelas, suponiendo que las placas conductoras están separadas 50 (mm) y que el medio entre ellas es aire

b) Determine el voltaje de ruptura si el espacio entre las placas conductoras está lleno de plexiglás, que tiene una constante dieléctrica de 3 y rigidez dieléctrica de 20 (kV/mm).

c) Si se introduce una lámina de plexiglás de 10 (mm) de grosor, ¿cuál es el voltaje máximo que puede aplicarse a las placas sin llegar a la ruptura?

P.3-18 Suponga que el plano $z = 0$ separa dos regiones dieléctricas sin perdidas con $\epsilon_{r1} = 2$ y $\epsilon_{r2} = 3$. Si sabemos que $\mathbf{E}_1$ en la región 1 es $\mathbf{a}_x 2y - \mathbf{a}_y 3x + \mathbf{a}_z(5 + z)$, ¿qué sabemos también de $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{D}_2$ en la región 2? ¿Podemos determinar $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{D}_2$ en cualquier punto de la región 2? Explique.

P.3-19 Pueden usarse lentes dieléctricas para colimar campos electromagnéticos. En la figura 3-30, la superficie izquierda de la lente es la de un cilindro circular y la superficie derecha es un plano. Si $\mathbf{E}_1$ en el punto $P(r_o, 45°, z)$ de la región 1 es $\mathbf{a}_r 5 - \mathbf{a}_\phi 3$, ¿cuál debe ser la constante dieléctrica de la lente para que $\mathbf{E}_3$ en la región 3 sea paralelo al eje x?

P.3-20 El espacio entre las placas paralelas de área S de un condensador está relleno con un dieléctrico cuya permitividad varía linealmente de ϵ_1 en una placa ($y = 0$) a ϵ_2 en la otra ($y = d$). Ignore el efecto marginal y calcule la capacitancia.

P.3-21 Suponga que el conductor exterior del condensador cilíndrico del ejemplo 3-16 está puesto a tierra y que el conductor interior se mantiene a un potencial V_0.

a) Determine la intensidad de campo eléctrico, $\mathbf{E}(a)$, en la superficie del conductor interior.

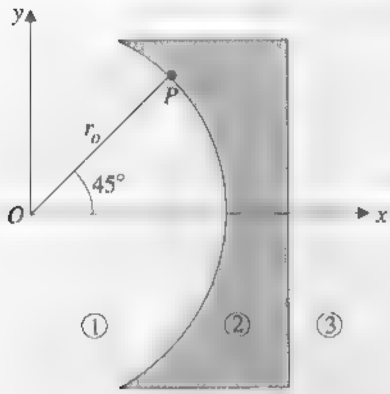


FIGURA 3-30 Lente dieléctrica (Prob. P.3-19).

b) Manteniendo fijo el radio interior, b, del conductor externo, determine a de manera que se minimice $E(a)$.

c) Determine este mínimo $E(a)$.

d) Determine la capacitancia en las condiciones del apartado (b).

P.3-22 El radio del núcleo y el radio interior del conductor exterior de una línea de transmisión coaxial muy larga son r_i y r_o, respectivamente. El espacio entre los conductores está relleno con dos capas coaxiales de dieléctricos. Las constantes dieléctricas de éstos son ϵ_{r1} para $r_i < r < b$ y ϵ_{r2} para $b < r < r_o$. Determine la capacitancia por unidad de longitud.

P.3-23 Un condensador esférico consiste en una esfera conductora interior con radio R_i y un conductor exterior con pared interior esférica de radio R_o. El espacio entre los conductores está lleno con un dieléctrico de permitividad ϵ. Determine la capacitancia.

P.3-24 Se conectan tres condensadores de 1 (μF), 2 (μF) y 3 (μF) a una fuente de 120 volts, de la forma que se muestra en la figura 3-31. Calcule la energía eléctrica almacenada en cada condensador.

P.3-25 Calcule la energía gastada en mover una carga puntual de 500 (pC) de $P_1(2, \pi/3, -1)$ a $P_2(4, -\pi/2, -1)$ en un campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r 6r \operatorname{sen} \phi + \mathbf{a}_\phi 3r \cos \phi$ (V/m),

a) haciendo primero el movimiento de $\phi = \pi/3$ a $-\pi/2$ en $r = 2$ y luego de $r = 2$ a 4 en $\phi = -\pi/2$, y

b) haciendo primero el movimiento de $r = 2$ a 4 en $\phi = \pi/3$ y luego de $\phi = \pi/3$ a $-\pi/2$ en $r = 4$.

P.3-26 Use el método del desplazamiento virtual para calcular la fuerza entre el conductor interior (radio a) y el exterior (radio b) que tienen cargas $+Q$ y $-Q$,

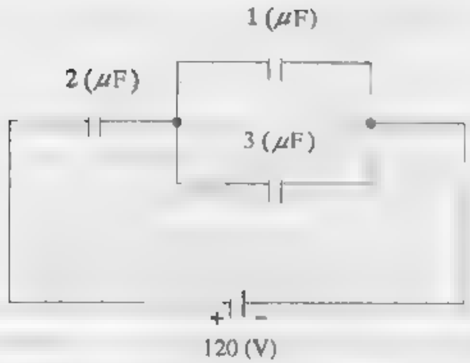


FIGURA 3-31 Condensadores conectados a una batería (Prob. P.3-24)

respectivamente, de un condensador coaxial de longitud L. La permitividad del material aislante es ϵ.

SUGERENCIA: Suponga primero que los radios interior y exterior son a y $a + r$, respectivamente; después diferencie con respecto a r.

P.3-27 Un condensador de placas paralelas de anchura w, longitud L y separación d tiene entre las placas una lámina de dieléctrico sólido de permitividad ϵ. El condensador se carga a un voltaje V_0 usando una batería, como se muestra en la figura 3-32. Suponiendo que se retira la lámina dieléctrica a la posición indicada en la figura y que después se abre el interruptor, determine la fuerza que actúa sobre la lámina.

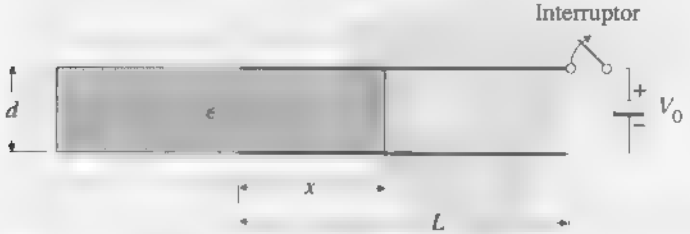


FIGURA 3-32 Condensador de placas paralelas parcialmente lleno (Prob. P.3-27)

P.3-28 Las placas conductoras superior e inferior de un condensador de placas paralelas muy grande están separadas una distancia d y se mantienen a potenciales de V_0 y 0, respectivamente. Sobre la placa inferior se coloca una lámina dieléctrica con constante dieléctrica de 6.0 y grosor uniforme de $0.8d$. Suponga que el efecto marginal es insignificante y determine lo siguiente resolviendo la ecuación de Laplace.

a) el potencial y la distribución de campo eléctrico dentro de la lámina de dieléctrico,

b) el potencial y la distribución de campo eléctrico en el espacio de aire entre la lámina de dieléctrico y la placa superior, y

c) las densidades superficiales de carga en las placas superior e inferior

P.3-29 Suponga que el espacio entre los conductores interior y exterior de una larga estructura cilíndrica coaxial está lleno con una nube de electrones cuya densidad volumétrica de carga es $\rho_v = A/r$ para $a < r < b$, donde a y b son los radios de los conductores interior y exterior, respectivamente. El conductor interior se mantiene a un potencial V_0 y el conductor exterior está puesto a tierra. Determine la diferencia de potencial en la región $a < r < b$ resolviendo la ecuación de Poisson.

P.3-30 Si el espacio entre los conductores interior y exterior de la estructura coaxial del problema P.3-29 es el espacio libre, determine la expresión de $V(r)$ en la región $a \leq r \leq b$ resolviendo la ecuación de Laplace. Después obtenga a partir de $V(r)$ las densidades superficiales de carga de los conductores y la capacitancia por unidad de longitud de la estructura. Compare su resultado con la ecuación (3-90).

P.3-31 Un cono conductor infinito de medio ángulo α se mantiene a un potencial V_0 y está aislado de un plano conductor puesto a tierra, como se ilustra en la figura 3-33. Determine

a) la distribución de potencial $V(\theta)$ en la región $\alpha < \theta < \pi/2$,

b) la intensidad de campo eléctrico en la región $\alpha < \theta < \pi/2$, y

c) las densidades superficiales de carga del cono y del plano puesto a tierra.

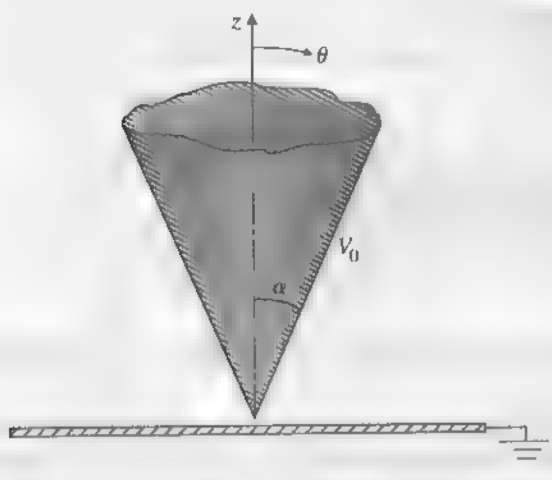


FIGURA 3-33 Cono conductor infinito y un plano conductor puesto a tierra (Prob. P.3-31).

P.3-32 En la figura 3-34 se muestra una carga puntual positiva Q localizada a una distancia d de dos semiplanos conductores perpendiculares y puestos a tierra. Determine la expresión de

a) el potencial y la intensidad de campo eléctrico en un punto arbitrario $P(x, y)$, y

b) las densidades superficiales de carga inducidas en los dos semiplanos.

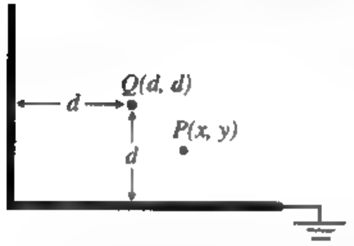
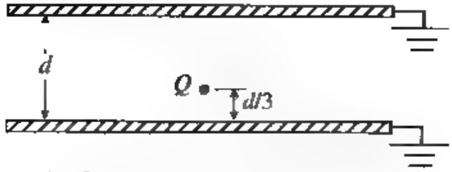


FIGURA 3-34 Carga puntual Q equidistante de dos semiplanos conductores perpendiculares puestos a tierra (Prob. P.3-32).

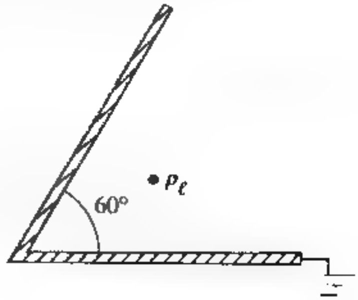
P.3-33 Determine los sistemas de cargas imagen que reemplazarán los contornos conductores que son mantenidos a potencial cero para

a) una carga puntual Q situada entre dos grandes planos conductores paralelos puestos a tierra como se muestra en la figura 3-35(a), y

b) una línea de carga infinita ρ_ℓ situada a la mitad entre dos grandes planos conductores que se cortan formando un ángulo de 60 grados, como se muestra en la figura 3-35(b).



(a) Carga puntual entre placas paralelas puestas a tierra.



(b) Línea de carga entre dos planos que se cortan puestos a tierra.

FIGURA 3-35 Diagramas para el problema P.3-33.

P.3-34 Una línea de carga infinita de 50 (nC/m) está a 3 (m) sobre el suelo, el cual está a potencial cero. Elija el plano xy como el de tierra y la línea de carga paralela al eje x. Use el método de imágenes para determinar lo siguiente:

a) $\mathbf{E}$ en (0, 4, 3), y

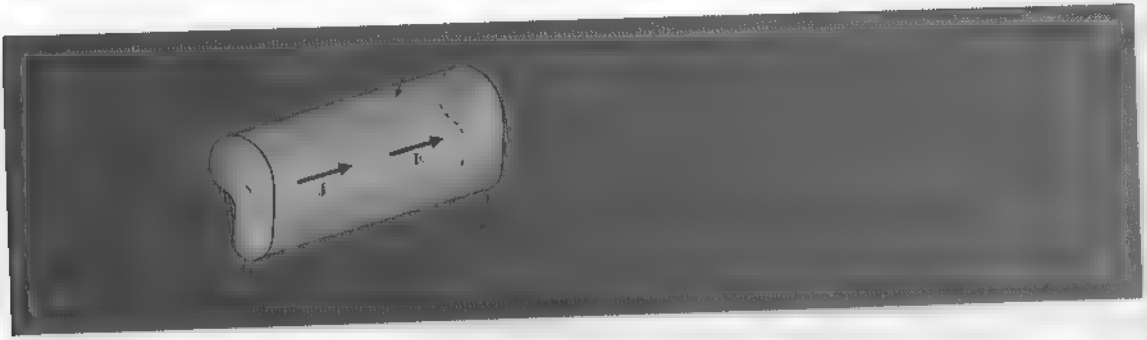
b) $\mathbf{E}$ y ρ_s en (0, 4, 0).

P.3-35 Los ejes de los dos alambres paralelos de una larga línea de transmisión están separados 2 (cm). Los alambres tienen un radio de 3 (mm); se mantienen a potenciales de +100 (V) y −100 (V). Determine

a) la situación con respecto a los ejes de los alambres de las líneas de carga equivalentes,

b) la densidad lineal de carga equivalente de cada alambre, y

c) la intensidad de campo eléctrico en un punto medio entre los dos alambres.



CAPÍTULO 4

Ley de Ohm

Dos tipos de corriente ocasionada por el movimiento de cargas libres

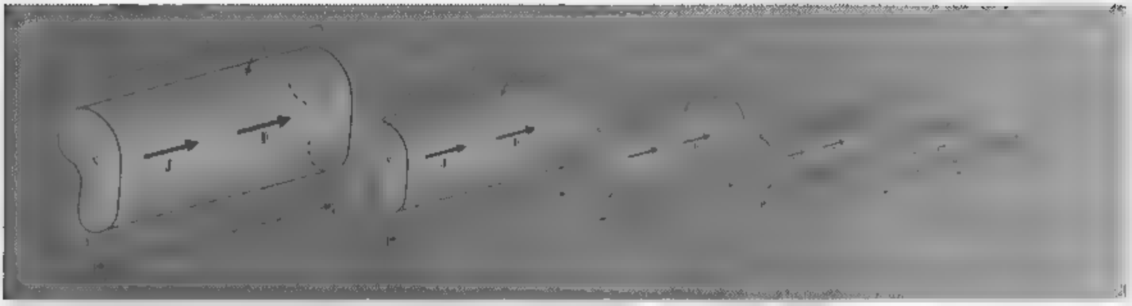
Las corrientes eléctricas de convección no están regidas por la ley de Ohm.

4-1 DESCRIPCIÓN GENERAL

En el capítulo 3 vimos los problemas electrostáticos, problemas de campos relacionados con cargas eléctricas en reposo. Ahora consideraremos las cargas en movimiento que constituyen el flujo de corriente A partir de la teoría de circuitos de corriente continua, usted debe estar familiarizado con los problemas de flujo de corriente en un medio conductor, como un alambre metálico. La relación que rige en estos casos es la ***ley de Ohm***, la cual establece que el voltaje entre dos terminales es igual al producto de la corriente y la resistencia entre los terminales. Si el voltaje se aplica a través de un buen aislante, fluira poca corriente debido a la alta resistencia. ¿Cómo explicamos entonces el hecho de que la corriente fluya en un tubo de rayos catódicos (como el que se ilustra en la figura 3-2) *si el medio es el vacío*, un circuito abierto? Aparentemente, la ley de Ohm no es aplicable en este caso.

El movimiento de cargas libres ocasiona dos tipos de corriente eléctrica: *corrientes de convección* y *corrientes de conducción*. Las corrientes de convección se deben al movimiento de partículas con carga positiva o negativa en el vacío o en un gas enrarecido. Como ejemplos conocidos tenemos los haces de electrones en un tubo de rayos catódicos y los violentos movimientos de partículas cargadas durante una tormenta *Las corrientes de convección, resultado de un movimiento hidrodinámico que implica un transporte de masa, no están regidas por la ley de Ohm.*

El mecanismo de las corrientes de conducción difiere del de las corrientes de convección En su estado normal, los átomos de un conductor ocupan posiciones regulares en una estructura cristalina. Los átomos consisten en un núcleo con carga positiva



Corrientes eléctricas estacionarias

rodeado por electrones dispuestos como en capas Los electrones de las capas inferiores están fuertemente ligados al núcleo y no tienen libertad para alejarse. Los electrones de las capas exteriores de un átomo conductor no llenan por completo las capas, son electrones de valencia o de conducción y su ligadura al núcleo es muy débil. Estos electrones pueden vagar de un átomo a otro de forma aleatoria Los átomos se mantienen en promedio eléctricamente neutros y no hay un movimiento neto de deriva de electrones Cuando se aplica un campo eléctrico externo a un conductor tiene lugar un movimiento organizado de los electrones de conducción y se produce una corriente eléctrica. La velocidad media de deriva de los electrones es muy baja (del orden de 10^{-4} o 10^{-3} m/s), incluso en los conductores muy buenos, ya que chocan con los átomos durante su movimiento y disipan parte de su energía cinética en forma de calor Este fenómeno se manifiesta como una fuerza amortiguadora o de resistencia al flujo de la corriente. La relación entre la densidad de corriente de conducción y la intensidad eléctrica nos proporciona una forma puntual de la ley de Ohm. En este capítulo analizaremos ambos tipos de corrientes.

Las corrientes eléctricas de conducción están regidas por la ley de Ohm.

4-2 Densidad de corriente y ley de Ohm

A) Corriente de convección

Considere el movimiento permanente de algún tipo de portadores de cargas, cada uno con una carga q (negativa en el caso de electrones), con velocidad $\mathbf{u}$ a través de un elemento de superficie Δs, como se ilustra en la figura 4-1. Si N es el

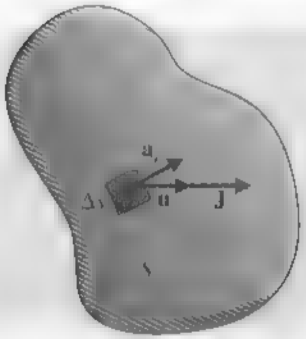


FIGURA 4-1 Corriente de conducción ocasionada por el movimiento de deriva de portadores de carga a través de una superficie.

número de portadores de carga por unidad de volumen, entonces en el tiempo Δt cada portador se mueve una distancia $\mathbf{u}\Delta t$, y la cantidad de carga que pasa por la superficie Δs es

$$\Delta Q = Nq\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_n\Delta s\Delta t \qquad \text{(C)}. \tag{4-1}$$

Puesto que la corriente es la razón de cambio de la carga con el tiempo, tenemos

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_n\Delta s = Nq\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{s} \qquad \text{(A)}. \tag{4-2}$$

Definición de la densidad de corriente

En la ecuación (4-2) hemos escrito $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{a}_n\Delta s$ como cantidad vectorial. Es conveniente definir una función puntual vectorial, la ***densidad de corriente de volumen*** o simplemente ***densidad de corriente***, **J**, en amperes por metro *cuadrado*.

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{u} \qquad (\text{A/m}^2), \tag{4-3}$$

de manera que podamos escribir la ecuación (4-2) como

$$\Delta I = \mathbf{J}\cdot\Delta\mathbf{s}. \tag{4-4}$$

La corriente total I que fluye por una superficie arbitraria S es entonces el flujo del vector **J** por S:

$$\boxed{I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(A)}.} \tag{4-5}$$

De hecho, el producto Nq es la carga libre por unidad de volumen, así que podemos reescribir la ecuación (4-3) como

Relación entre la densidad de corriente de convección y la velocidad del portador de carga

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v\mathbf{u} \qquad (\text{A/m}^2),} \tag{4-6}$$

que es la relación entre la ***densidad de corriente de convección*** y la velocidad del portador de carga

EJEMPLO 4-1

Suponga una densidad de carga libre de -0.3 (nC/mm³) en un tubo de vacío. Si la densidad de corriente es de $-\mathbf{a}_z 2.4$ (A/mm²), encuentre (a) la corriente total que pasa por una capa semiesférica especificada por $R = 5$ (mm), $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$; y (b) la velocidad de las cargas libres.

SOLUCIÓN

Dados:

$\rho_v = -0.3\ (\text{nC/mm}^3)$,

$\mathbf{J} = -\mathbf{a}_z 2.4\ (\text{A/mm}^2)$,

$R = 5\ (\text{mm})$.

a)
$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\int 2.4\,(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R)\,ds$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -2.4\,(\cos\theta)(5^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi)$$
$$= -2\pi \int_0^{\pi/2} 60 \operatorname{sen}\theta\, d(\operatorname{sen}\theta)$$
$$= -120\pi \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -60\pi = -188.5\ (\text{A}).$$

b)
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{J}}{\rho_v} = \mathbf{a}_z \frac{-2.4}{-0.3 \times 10^{-9}} = \mathbf{a}_z 8 \times 10^9\ (\text{mm/s})$$
$$= \mathbf{a}_z 8\ (\text{Mm/s}).$$

B) Corriente de conducción

En el caso de las corrientes de conducción puede haber más de un tipo de portador de carga (electrones, huecos, iones) moviéndose con distintas velocidades. Debemos generalizar la ecuación (4-3) para que se lea como

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{u}_i \qquad (\text{A/m}^2). \tag{4-7}$$

Como indicamos en la sección 4-1, las corrientes de conducción son el resultado del movimiento de deriva de los portadores de carga bajo la influencia de un campo eléctrico aplicado. Los átomos permanecen neutrales ($\rho_v = 0$). Es posible justificar de manera analítica que, para la mayoría de los materiales conductores, la velocidad de deriva media es directamente proporcional a la intensidad de campo eléctrico. En el caso de los conductores metálicos escribimos

$$\mathbf{u}_e = -\mu_e \mathbf{E} \qquad (\text{m/s}), \tag{4-8}$$

donde μ_e es la ***movilidad*** del electrón, medida en (m²/V · s). La movilidad del electrón en el cobre es de 3.2×10^{-3} (m²/V · s), en el aluminio es de 1.4×10^{-4} (m²/V · s)

y en la plata es de 5.2×10^{-3} ($m^2/V \cdot s$). A partir de las ecuaciones (4-3) y (4-8) obtenemos

$$\mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}, \tag{4-9}$$

donde $\rho_e = -Ne$ es la densidad de carga de los electrones en movimiento y es una cantidad negativa. La ecuación (4-9) puede reescribirse como

Forma puntual de la ley de Ohm

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad (\mathrm{A/m^2}),} \tag{4-10}$$

Definición de la conductividad

donde la constante de proporcionalidad, $\sigma = -\rho_e \mu_e$, es un parámetro constitutivo macroscópico del medio denominado ***conductividad***. La ecuación (4-10) es la forma puntual de la ***ley de Ohm***.

En el caso de los semiconductores, la conductividad depende de la concentración y de la movilidad tanto de los electrones como de los huecos:

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h, \tag{4-11}$$

donde el subíndice h denota un hueco. En términos generales $\mu_e \neq \mu_h$. Los valores típicos para el germanio son $\mu_e \cong 0.38$, $\mu_h \cong 0.18$; para el silicio, $\mu_e \cong 0.12$, $\mu_h \cong 0.03$ ($m^2/V \cdot s$).

Unidad de la conductividad en el SI

La ecuación (4-10) es una relación constitutiva de un medio conductor. La unidad de σ es amperes por volt-metro ($A/V \cdot m$) o siemens por metro (S/m). El cobre, el conductor más común, tiene una conductividad de 5.80×10^7 (S/m). Por otra parte, la conductividad del germanio es aproximadamente de 2.2 (S/m) y la del silicio es de 1.6×10^{-3} (S/m). La conductividad de los semiconductores depende en gran medida de la temperatura (aumenta con ésta). El caucho duro, un buen aislante, tiene una conductividad de sólo 10^{-15} (S/m). En el apéndice B.4 se lista la conductividad de otros materiales de uso común. El inverso de la conductividad se denomina ***resistividad*** y se mide en ohms por metro ($\Omega \cdot m$). Preferimos usar la conductividad; no hay una razón de peso para usar a la vez la conductividad y la resistividad.

■ **EJERCICIO 4.1** Determine, para una densidad de corriente de 7 (A/mm^2),

a) la intensidad eléctrica, y
b) la velocidad de deriva de los electrones.

RESPUESTA: (a) 0.121 (V/m), (b) 3.57×10^{-4} (m/s).

De la ***ley de Ohm*** de la teoría de circuitos recordamos que el voltaje V_{12} a través de una resistencia R, por donde fluye una corriente I del punto 1 al punto 2, es igual a RI, es decir,

$$V_{12} = RI. \tag{4-12}$$

Normalmente R es una pieza de material conductor de longitud determinada; V_{12} es el voltaje entre dos terminales 1 y 2; e I es la corriente total que fluye del terminal 1

al terminal 2 a través de una sección transversal finita. La ecuación (4-12) *no* es una relación puntual.

Ahora utilizaremos la forma puntual de la ley de Ohm, ecuación (4-10), para derivar la relación voltaje-corriente de una muestra de material homogéneo con conductividad σ, longitud ℓ y sección transversal uniforme S, como se ilustra en la figura 4-2. En este material conductor, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, donde $\mathbf{J}$ y $\mathbf{E}$ tienen la dirección del flujo de corriente. La diferencia de potencial o voltaje entre los terminales 1 y 2 es

$$V_{12} = E\ell,$$

o

$$E = \frac{V_{12}}{\ell}. \tag{4-13}$$

La corriente total es

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = JS,$$

o

$$J = \frac{I}{S}. \tag{4-14}$$

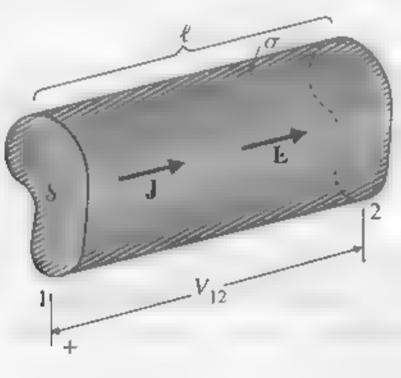
Sustituyendo las ecuaciones (4-13) y (4-14) en la ecuación (4-10) obtenemos

$$\frac{I}{S} = \sigma\frac{V_{12}}{\ell},$$

o

$$V_{12} = \left(\frac{\ell}{\sigma S}\right) I = RI, \tag{4-15}$$

FIGURA 4-2 Conductor homogéneo con sección transversal constante



que es lo mismo que la ecuación (4-12). A partir de la ecuación (4-15) obtenemos la fórmula de la ***resistencia*** de una muestra recta de material homogéneo con sección transversal uniforme para corriente constante (corriente continua).

Resistencia de un material homogéneo recto con sección transversal uniforme

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma S} \quad (\Omega).} \tag{4-16}$$

EJEMPLO 4-2

a) Determine la resistencia para corriente continua de 1 (km) de alambre de cobre con radio de 1 (mm).

b) Si un alambre de aluminio de la misma longitud debe tener la misma resistencia, ¿cuál debe ser su radio?

SOLUCIÓN

Puesto que estamos tratando con conductores de sección transversal uniforme, es aplicable la ecuación (4-16).

a) Para el alambre de cobre, $\sigma_{cu} = 5.80 \times 10^7$ (S/m),

$$\ell = 10^3\,(\mathrm{m}), \qquad S_{cu} = \pi(10^{-3})^2 = 10^{-6}\pi \quad (\mathrm{m}^2).$$

Tenemos

$$R_{cu} = \frac{\ell}{\sigma_{cu} S_{cu}} = \frac{10^3}{5.80 \times 10^7 \times 10^{-6}\pi} = 5.49 \quad (\Omega)$$

b) Para el alambre de aluminio, $\sigma_{al} = 3.54 \times 10^7$ (S/m):

$$R_{al} = \frac{\ell}{\sigma_{al} S_{al}} = R_{cu},$$

$$S_{al} = \frac{\sigma_{cu}}{\sigma_{al}} S_{cu} = \frac{5.80}{3.54}(10^{-6}\pi) = \pi r^2,$$

$$r = 1.28 \times 10^{-3}\,(\mathrm{m}), \text{ o } 1.28\,(\mathrm{mm}).$$

Conductancia y su unidad en el SI

La ***conductancia***, G, o el inverso de la resistencia, es útil para combinar resistencias en paralelo. La unidad de conductancia es (Ω^{-1}) o siemens (S).

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{\ell} \qquad (\mathrm{S}). \tag{4-17}$$

■ **EJERCICIO 4.2** Se conectan en paralelo tres resistencias de 1 (MΩ), 2 (MΩ) y 4 (MΩ). Calcule la conductancia y la resistencia totales.

RESPUESTA: 1.75 (μS), 0.571 (MΩ).

PREGUNTAS DE REPASO

P.4-1 Explique la diferencia entre la corriente de conducción y la corriente de convección.

P.4-2 ¿Cuál es la relación entre la densidad de corriente de convección y la velocidad de los portadores de carga?

P.4-3 Defina la *movilidad* del electrón en un conductor. ¿Cuál es su unidad en el SI?

P.4-4 ¿Cuál es la forma puntual de la *ley de Ohm*?

P.4-5 Defina la *conductividad*. ¿Cuál es su unidad en el SI?

P.4-6 ¿Cómo cambia la resistencia de un alambre conductor redondo si se duplica su radio?

COMENTARIOS

1. Las corrientes de conducción están regidas por la ley de Ohm, pero no las corrientes de convección.
2. La conductividad no es lo mismo que la conductancia y la resistividad no es lo mismo que la resistencia.
3. La fórmula de la resistencia de la ecuación (4-16) es aplicable únicamente a un material homogéneo recto con sección transversal uniforme.

4-3 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y LEY DE LA CORRIENTE DE KIRCHHOFF

Principio de conservación de la carga

El ***principio de conservación de carga*** es uno de los postulados fundamentales de la física. Las cargas eléctricas no se crean ni se destruyen; todas las cargas, ya estén en reposo o en movimiento, deben considerarse en todo momento. Considere un volumen arbitrario V limitado por una superficie S. Dentro de la región existe una carga neta Q. Si fluye una corriente I a través de la superficie hacia *fuera* de la región, la carga en el interior del volumen debe *disminuir* con una razón igual a la corriente. A la inversa, si fluye una corriente neta a través de la superficie *hacia* el interior de la región, la carga en el interior del volumen debe *aumentar* con una razón igual a la corriente. La corriente que sale de la región es el flujo total de salida del vector de densidad de corriente a través de la superficie S. Tenemos

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_v \, dv. \tag{4-18}$$

Podemos invocar el teorema de la divergencia (Ec. 2-69) para convertir la integral de superficie de $\mathbf{J}$ en la integral de volumen de $\nabla \cdot \mathbf{J}$. Para un volumen estacionario tenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv = -\int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv. \tag{4-19}$$

Al pasar la derivada temporal de ρ_v dentro de la integral de volumen, es necesario usar la diferenciación parcial porque ρ_v puede ser una función del tiempo y de las coordenadas espaciales. Los integrandos deben ser iguales, ya que la ecuación (4-19) debe ser válida sin importar la elección de V. Tenemos entonces

Ecuación de continuidad

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad (\mathrm{A/m^3}).} \tag{4-20}$$

Esta relación puntual derivada del principio de conservación de carga se denomina ***ecuación de continuidad.***

En el caso de corrientes estacionarias, la densidad de carga no cambia con el tiempo, $\partial \rho_v/\partial t = 0$. La ecuación (4-20) se convierte en

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = 0.} \tag{4-21}$$

La corriente eléctrica estacionaria es solenoidal.

Por consiguiente, las corrientes eléctricas estacionarias tienen divergencia nula, o sea, son solenoidales. La ecuación (4-21) es una relación puntual y también es válida en el punto donde $\rho_v = 0$ (sin fuente de flujo). Esto quiere decir que las líneas de flujo de las corrientes estacionarias se cierran sobre sí mismas, a diferencia de las líneas de la intensidad de campo electrostático, que se originan y terminan en cargas. La ecuación (4-21) nos conduce a la siguiente forma integral para cualquier superficie cerrada

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0, \tag{4-22}$$

que puede escribirse como

$$\boxed{\sum_j I_j = 0 \qquad (\mathrm{A}).} \tag{4-23}$$

Ley de la corriente de Kirchhoff

La ecuación (4-23) es una expresión de la ***ley de la corriente de Kirchhoff.*** Establece que ***la suma algebraica de todas las corrientes que salen de una unión en un circuito eléctrico es cero.***

En la subsección 3-6.1 enunciamos que las cargas introducidas en el interior de un conductor se moverán a la superficie del conductor y se redistribuirán de manera que $\rho_v = 0$ y $\mathbf{E} = 0$ en el interior, en condiciones de equilibrio. Ahora podemos demostrar este enunciado y calcular el tiempo necesario para llegar al equilibrio. Si combinamos la ley de Ohm, ecuación (4-10), con la ecuación de continuidad y suponemos una σ constante, tenemos

$$\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \tag{4-24}$$

En un medio simple, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v/\epsilon$, y la ecuación (4-24) se convierte en

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0. \tag{4-25}$$

La solución de la ecuación (4-25) es

La densidad volumétrica de carga decrece exponencialmente con el tiempo.

$$\boxed{\rho_v = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t} \qquad (\mathrm{C/m^3}),} \tag{4-26}$$

donde ρ_0 es la densidad de carga inicial en $t = 0$. Tanto ρ_v como ρ_0 pueden ser funciones de las coordenadas espaciales, y la ecuación (4-26) nos dice que la densidad de carga en un lugar determinado disminuirá exponencialmente con el tiempo. Una densidad de carga inicial ρ_0 disminuirá a $1/e$ o 36.8% de su valor en un tiempo igual a

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \qquad (\mathrm{s}). \tag{4-27}$$

Definición del tiempo de relajación

La constante de tiempo τ se conoce como ***tiempo de relajación***. En un buen conductor, como el cobre, para el cual $\sigma = 5.80 \times 10^7$ (S/m), $\epsilon \cong \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ (F/m), τ es igual a 1.53×10^{-19} (s), un tiempo realmente muy breve.

■ **EJERCICIO 4.3** La constante dieléctrica y la conductividad del caucho son 3.0 y 10^{-15} (S/m), respectivamente Determine

a) el tiempo de relajación, y
b) el tiempo necesario para que una densidad de carga disminuya al 1% de su valor inicial

RESPUESTA: (a) 7.38 horas, (b) 1 día y 10 horas.

4-4 DISIPACIÓN DE POTENCIA Y LEY DE JOULE

Antes indicamos que, macroscópicamente, los electrones conductores en un conductor bajo la influencia de un campo eléctrico tienen un movimiento de deriva. A nivel microscópico, estos electrones chocan con los átomos en sus posiciones en la red Por lo tanto, se transmite energía del campo eléctrico a los átomos por medio de la vibración térmica. El trabajo Δw realizado por un campo eléctrico $\mathbf{E}$ para mover una carga q una distancia $\Delta \ell$ es $q\mathbf{E} \cdot (\Delta \boldsymbol{\ell})$, que corresponde a una potencia

$$p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}, \tag{4-28}$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de deriva. La potencia total suministrada a todos los portadores de carga en un volumen dv es

$$dP = \sum_i p_i = \mathbf{E} \cdot \left(\sum_i N_i q_i \mathbf{u}_i \right) dv,$$

que, por virtud de la ecuación (4-7), es

$$dP = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv,$$

o

$$\frac{dP}{dv} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \qquad (\mathrm{W/m^3}). \tag{4-29}$$

La función puntual $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ es entonces una ***densidad de potencia*** en condiciones de corriente estacionaria. Para un volumen V, la potencia eléctrica total convertida en calor es

Ley de Joule

$$\boxed{P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv \qquad \text{(W)}.} \tag{4-30}$$

Esto se conoce como ***ley de Joule***. (Observe que la unidad de P en el SI es el watt, no el joule, que es la unidad de energía o trabajo.) La ecuación (4-29) es la correspondiente relación puntual.

En un conductor de sección transversal constante, $dv = ds\, d\ell$, con $d\ell$ medido en la dirección $\mathbf{J}$. La ecuación (4-30) puede escribirse como

$$P = \int_L E\, d\ell \int_S J\, ds = VI,$$

donde I es la corriente en el conductor. Puesto que $V = RI$, tenemos

$$\boxed{P = I^2 R \qquad \text{(W)}.} \tag{4-31}$$

Por supuesto, la ecuación (4-31) es la conocida expresión de la potencia óhmica, que representa el calor disipado en la resistencia R por unidad de tiempo

4-5 ECUACIONES PARA LA DENSIDAD DE CORRIENTE ESTACIONARIA

Como hemos visto, el vector densidad de corriente $\mathbf{J}$ es una cantidad básica en el estudio de las corriente eléctricas estacionarias. De acuerdo con el teorema de Helmholtz, para la descripción de $\mathbf{J}$ se requiere la especificación de su divergencia y su rotacional. En el caso de corrientes estacionarias, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, como en la ecuación (4-21). La ecuación del rotacional se obtiene combinando la ley de Ohm ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) con $\nabla \times \mathbf{E} = 0$; es decir, $\nabla \times (\mathbf{J}/\sigma) = 0$. A continuación se presentan la forma diferencial y la forma integral correspondientes a las ecuaciones que rigen la densidad de corriente estacionaria.

Ecuaciones para la densidad de corriente estacionaria		
Forma diferencial	Forma integral	
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$	(4-32)
$\nabla \times \left(\dfrac{\mathbf{J}}{\sigma}\right) = 0$	$\oint_C \dfrac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$	(4-33)

Recuerde que en la sección 3-8 mencionamos que en una superficie de separación entre dos medios diferentes: (i) *un campo con divergencia nula tiene una componente normal continua* (véase la Ec. 3-77); y (ii) *un campo irrotacional tiene una componente tangencial continua* (véase la Ec. 3-72). La consecuencia de (i) y la ecuación (4-32) es

Condición en la frontera de la componente normal de la densidad de corriente

$$\boxed{J_{1n} = J_{2n} \qquad (\text{A/m}^2).} \tag{4-34}$$

En la superficie de separación de dos medios óhmicos con conductividades σ_1 y σ_2, la consecuencia de (ii) y la ecuación (4-33) es

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2},$$

o

Condición en la frontera de la componente tangencial de la densidad de corriente

$$\boxed{\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.} \tag{4-35}$$

■ EJERCICIO 4.4 Dos bloques de material conductor están en contacto en el plano $z = 0$. En el punto P de la superficie de separación, la densidad de corriente del medio 1 es $\mathbf{J}_1 = 10(\mathbf{a}_y3 + \mathbf{a}_z4)$ (A/m²) (conductividad σ_1). Determine $\mathbf{J}_2$ en P en el medio 2 si $\sigma_2 = 2\sigma_1$.

RESPUESTA: $20(\mathbf{a}_y3 + \mathbf{a}_z2)$ (A/m²).

PREGUNTAS DE REPASO

P.4-7 ¿Cual es el significado físico de la *ecuación de continuidad*?

P.4-8 Enuncie con palabras la *ley de la corriente de Kirchhoff.*

P.4-9 Defina el *tiempo de relajación*. ¿De qué orden de magnitud en el tiempo de relajación para el cobre?

P.4-10 Enuncie la ley de Joule. Exprese la potencia disipada en un volumen (a) en términos de $\mathbf{E}$ y σ y (b) en términos de $\mathbf{J}$ y σ.

P.4-11 ¿Cuáles son las condiciones en la frontera (condiciones de contorno) de las componentes normal y tangencial de la corriente estacionaria en la superficie de separación de dos medios con conductividades diferentes?

COMENTARIOS

1. Las ecuaciones (4-24) y (4-26) sólo son aplicables a medios simples
2. La densidad de corriente estacionaria **J** es solenoidal.
3. La densidad de corriente estacionaria **J** no es conservativa en un medio no homogéneo.

4-6 CÁLCULOS DE RESISTENCIA

En la sección 3-9 analizamos el procedimiento para hallar la capacitancia entre dos conductores separados por un medio dieléctrico. Estos conductores pueden ser de forma arbitraria, como se ilustró en la figura 3-19, reproducida aquí como la figura 4-3. La fórmula básica de la capacitancia puede escribirse en términos de las cantidades de campo eléctrico como

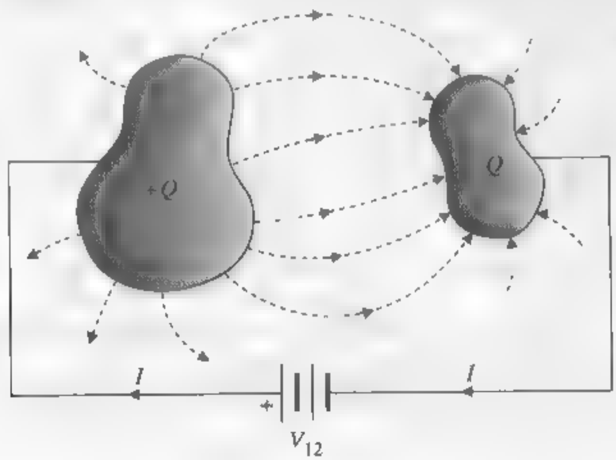
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}}{-\int_L \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}} = \frac{\oint_S \epsilon\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}}{-\int_L \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}}, \tag{4-36}$$

donde la integral de superficie del numerador se aplica a una superficie que encierra el conductor positivo, y la integral de línea del denominador va desde el conductor negativo (potencial menor) hasta el positivo (potencial mayor)

Cuando el medio dieléctrico tiene pérdidas (tiene una conductividad muy pequeña pero distinta de cero), fluirá una corriente del conductor positivo al negativo y se establecerá en el medio un campo de densidad de corriente. La ley de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, asegura que las líneas de flujo de $\mathbf{J}$ y $\mathbf{E}$ serán las mismas en un medio isótropo La resistencia entre los conductores es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}}{\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}} = \frac{-\int_L \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}}{\oint_S \sigma\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}}, \tag{4-37}$$

FIGURA 4-3 Dos conductores en un medio dieléctrico con pérdidas.



donde las integrales de línea y superficie se aplican a las mismas L y S que en la ecuación (4-36). Al comparar las ecuaciones (4-36) y (4-37) se observa una relación interesante:

Relación de C y R (o G) entre dos conductores

$$\boxed{RC = \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma}.} \tag{4-38}$$

La ecuación (4-38) es válida si ϵ y σ del medio tienen la misma dependencia espacial o si el medio es homogéneo (independiente de las coordenadas espaciales). En estos casos, si se conoce la capacitancia entre dos conductores, podemos obtener la resistencia (o la conductancia) directamente de la razón ϵ/σ, sin tener que hacer nuevos cálculos.

EJEMPLO 4-3

Encuentre la resistencia de fuga por unidad de longitud

a) entre los conductores interno y externo de un cable coaxial con radio a para el conductor interno, radio b para el conductor externo y un medio con conductividad σ, y

b) de una línea de transmisión de alambres paralelos que consiste en alambres de radio a separados una distancia D en un medio con conductividad σ

SOLUCIÓN

a) En el ejemplo 3-16 obtuvimos la capacitancia por unidad de longitud de un cable coaxial dada por la ecuación (3-90):

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \qquad \text{(F/m)}.$$

Por lo tanto, la resistencia de fuga por unidad de longitud es, a partir de la ecuación (4-38),

$$R_1 = \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{1}{C_1}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (\Omega\cdot\text{m}). \tag{4-39}$$

La conductancia por unidad de longitud es $G_1 = 1/R_1$.

b) Para la línea de transmisión de alambres paralelos, la ecuación (3-165) del ejemplo 3-25 nos da la capacitancia por unidad de longitud:

$$C_1' = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{D}{2a}\right)} \qquad \text{(F/m)}.$$

Por lo tanto, si usamos la relación de la ecuación (4-38), la resistencia de fuga por unidad de longitud es

$$
\begin{aligned}
R'_1 &= \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{1}{C'_1}\right) = \frac{1}{\pi\sigma}\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right) \\
&= \frac{1}{\pi\sigma}\ln\left[\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right] \qquad (\Omega\cdot\text{m}).
\end{aligned} \tag{4-40}
$$

La conductancia por unidad de longitud es $G'_1 = 1/R'_1$.

En algunos casos, los problemas electrostáticos y los de corriente estacionaria no son exactamente análogos, incluso cuando las configuraciones geométricas son las mismas. Esto se debe a que el flujo de corriente puede estar confinado de forma muy estricta a un conductor (el cual tiene una *σ muy grande* en comparación con la del medio que lo rodea), mientras que por lo general no es posible confinar el flujo eléctrico a una muestra de dieléctrico de dimensiones finitas. El intervalo de constantes dieléctricas de los materiales disponibles es muy limitado (véase el apéndice B-3) y los efectos marginales de flujo en los bordes del conductor reducen la precisión del cálculo de la capacitancia.

El procedimiento para calcular la resistencia de una muestra de material conductor entre superficies equipotenciales (o terminales) determinadas es el siguiente

1. Elija un sistema de coordenadas apropiado para la geometría especificada
2. Suponga una diferencia de potencial V_0 entre los terminales del conductor
3. Encuentre la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el conductor (Si el material es homogéneo, con conductividad *constante*, el método general consiste en resolver la ecuación de Laplace, $\nabla^2 V = 0$, para V en el sistema de coordenadas elegido y luego obtener $\mathbf{E} = -\nabla V$.)
4. Calcule la corriente total

   $$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s},$$

   donde S es el área de la sección transversal por donde fluye I.
5. Calcule la resistencia R usando el cociente V_0/I.

EJEMPLO 4-4

Un material conductor de grosor uniforme h y conductividad σ tiene la forma de un cuarto de arandela circular plana, con radio interior a y radio exterior b, como se muestra en la figura 4-4. Determine la resistencia entre las caras de los extremos.

SOLUCIÓN

Es evidente que el sistema de coordenadas que debe emplearse en este problema es el sistema de coordenadas cilíndricas. Si seguimos el procedimiento anterior, suponemos

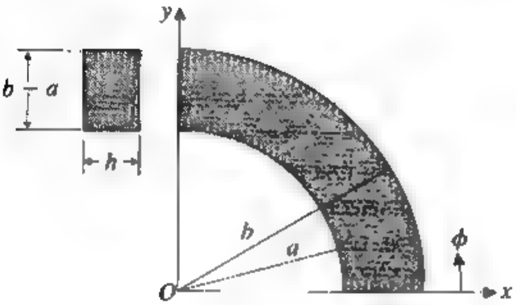


FIGURA 4-4 Un cuarto de arandela circular conductora plana (ejemplo 4-4).

primero una diferencia de potencial V_0 entre las caras, digamos $V = 0$ en la cara del extremo en $y = 0$ ($\phi = 0$) y $V = V_0$ en la cara en $x = 0$ ($\phi = \pi/2$). Resolveremos la ecuación de Laplace para V, sujeta a las siguientes condiciones en la frontera:

$$V = 0 \qquad \text{en} \qquad \phi = 0, \tag{4-41a}$$

$$V = V_0 \qquad \text{en} \qquad \phi = \pi/2. \tag{4-41b}$$

Puesto que el potencial sólo es función de ϕ, la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se simplifica a

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0. \tag{4-42}$$

La solución general de la ecuación (4-42) es

$$V = c_1\phi + c_2,$$

que, al imponer las condiciones en la frontera de las ecuaciones (4-41a) y (4-41b), se convierte en

$$V = \frac{2V_0}{\pi}\phi. \tag{4-43}$$

La densidad de corriente es

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sigma\mathbf{E} = -\sigma\nabla V \\ &= -\mathbf{a}_\phi \sigma \frac{\partial V}{r\partial\phi} = -\mathbf{a}_\phi \frac{2\sigma V_0}{\pi r}. \end{aligned} \tag{4-44}$$

Podemos hallar la corriente total I integrando $\mathbf{J}$ sobre la superficie $\phi = \pi/2$ donde $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_\phi h\, dr$. Tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \frac{2\sigma V_0}{\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{2\sigma h V_0}{\pi} \ln\frac{b}{a}. \end{aligned} \tag{4-45}$$

Por lo tanto,

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h \ln(b/a)}. \tag{4-46}$$

Cuando la geometría es tal que podemos determinar **J** fácilmente a partir de la corriente total I, podemos comenzar la resolución suponiendo un valor de I. A partir de I se encuentran **J** y $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$. La diferencia de potencial V_0 se determina a partir de la relación

$$V_0 = -\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell},$$

donde la integración es desde el terminal de potencial bajo hasta el terminal de potencial alto. La resistencia $R = V_0/I$ es independiente de la I supuesta, la cual se cancelará en el proceso.

■ **EJERCICIO 4.5** Los radios de los conductores interno y externo de un cable coaxial son a y b, respectivamente, y el medio entre ellos tiene conductividad σ. Encuentre la resistencia de fuga por unidad de longitud entre los conductores, suponiendo primero una corriente de fuga I del conductor interno al externo y luego determinando **J**, **E**, V_0 y $R_\ell = V_0/I$. Compruebe su resultado con la ecuación (4-39).

PREGUNTAS DE REPASO

P.4-12 ¿Cuál es la relación entre la conductancia y la capacitancia formada por dos conductores inmersos en un medio dieléctrico con pérdidas que tiene permitividad ϵ y conductividad σ?

P.4-13 ¿Cuál es la relación entre la resistencia y la capacitancia formada por dos conductores inmersos en un medio dieléctrico con pérdidas que tiene constante dieléctrica ϵ, y conductividad σ?

COMENTARIOS

La resistencia de fuga total *entre* dos conductores paralelos de longitud ℓ es igual a la resistencia de fuga por unidad de longitud *dividida* por ℓ (no multiplicada por ℓ).

RESUMEN

En este capítulo

- consideramos dos tipos de corrientes eléctricas estacionarias: corrientes de convección (no regidas por la ley de Ohm) y corrientes de conducción;
- definimos la conductividad que nos condujo a la forma puntual de la ley de Ohm;
- presentamos la ecuación de continuidad y el concepto de tiempo de relajación;
- estudiamos la ley de Joule y la disipación de potencia;

- obtuvimos las ecuaciones de la densidad de corriente estacionaria,
- examinamos las condiciones en la frontera de la densidad de corriente, y
- analizamos métodos para calcular la resistencia.

PROBLEMAS

P.4-1 Un voltaje de corriente continua de 6 (V) aplicado a los extremos de un alambre conductor de 1 (km) de longitud y 0.5 (mm) de radio produce una corriente de 1/6 (A). Determine

a) la conductividad del alambre,
b) la intensidad de campo eléctrico en el alambre,
c) la potencia disipada en el alambre,
d) la velocidad de deriva de los electrones, suponiendo que la movilidad de los electrones en el alambre es de 1.4×10^{-3} ($m^2/V \cdot s$).

P.4-2 Un alambre largo y redondo de radio a y conductividad σ está recubierto por un material con conductividad de 0.1 σ.

a) ¿Cuál debe ser el grosor del revestimiento para que la resistencia por unidad de longitud del alambre no recubierto se reduzca en un 50%?
b) Suponga una corriente total I en el alambre y encuentre **J** y **E** en el núcleo y en el material de revestimiento.

P.4-3 Un rayo cae sobre una esfera dieléctrica con pérdidas ($\epsilon = 1.2\epsilon_0$, $\sigma = 10$ (S/m)) de radio 0.1 (m) en el instante $t = 0$, depositando en la esfera una carga total de 1 (mC) de manera uniforme. Determine, para todo t,

a) la intensidad de campo eléctrico dentro y fuera de la esfera,
b) la densidad de corriente en la esfera.

P.4-4 Remítase al problema P.4-3.

a) Calcule el tiempo necesario para que la densidad de carga en la esfera se reduzca al 1% de su valor inicial.
b) Calcule el cambio en la energía electrostática almacenada en la esfera conforme la densidad de carga disminuye del valor inicial al 1% de su valor. ¿Qué sucede con esta energía?
c) Determine la energía electrostática almacenada en el espacio fuera de la esfera. ¿Cambia esta energía con el tiempo?

P.4-5 Encuentre la corriente y el calor disipado en cada una de las cinco resistencias de la red mostrada en la figura 4-5 si

$$R_1 = \tfrac{1}{3}(\Omega),\quad R_2 = 20(\Omega),\quad R_3 = 30(\Omega),\quad R_4 = 8(\Omega),\quad R_5 = 10(\Omega)$$

y la fuente es un generador de voltaje cc ideal de 0.7 (V) con la polaridad positiva en el terminal 1. ¿Cuál es la resistencia total vista por la fuente en los terminales 1-2?

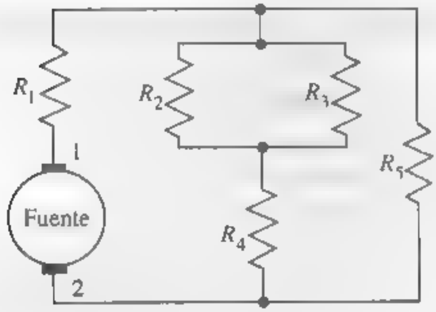


FIGURA 4-5 Problema de red (Prob. P.4-5).

P.4-6 Dos medios dieléctricos homogéneos con constantes dieléctricas $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$ y conductividades $\sigma_1 = 15$ (mS), $\sigma_2 = 10$ (mS) están en contacto en el plano $z = 0$. En la región $z > 0$ (medio 1) hay un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x 20 - \mathbf{a}_z 50$ (V/m). Determine (a) $\mathbf{E}_2$ en el medio 2, (b) $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$, (c) los ángulos que forman $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$ con el plano $z = 0$, y (d) la densidad de carga superficial en la superficie $z = 0$.

P.4-7 El espacio entre dos placas conductoras paralelas de área S está relleno con un medio óhmico homogéneo cuya conductividad varía linealmente de σ_1 en una placa ($y = 0$) a σ_2 en la otra ($y = d$). Se aplica una fuente cc de voltaje V_0 a las placas. Determine

a) la resistencia total entre las placas, y

b) las densidades superficiales de carga en las placas.

P.4-8 Se aplica un voltaje cc V_0 a un condensador de placas paralelas de área S. El espacio entre las placas conductoras está relleno con dos dieléctricos con pérdidas que tienen grosor d_1 y d_2, permitividad ϵ_1 y ϵ_2 y conductividad σ_1 y σ_2, respectivamente, como se ilustra en la figura 4-6. Determine

a) la densidad de corriente entre las placas,

b) las intensidades de campo eléctrico en ambos dieléctricos, y

c) el circuito R-C equivalente entre los terminales a y b.

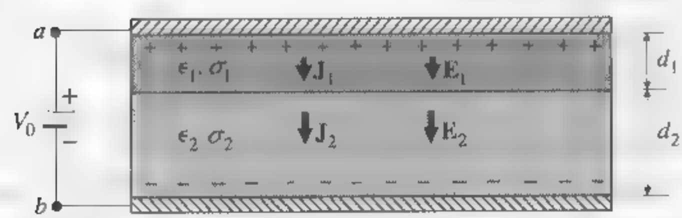


FIGURA 4-6 Condensador de placas paralelas con dos dieléctricos con pérdidas (Prob. P.4-8).

P.4-9 Se aplica un voltaje cc V_0 a un condensador cilíndrico de longitud L. Los radios de los conductores interior y exterior son a y b, respectivamente. El espacio entre los conductores está relleno con dos dieléctricos con pérdidas que tienen, respectivamente, permitividad ϵ_1 y conductividad σ_1 en la región $a < r < c$ y permitividad ϵ_2 y conductividad σ_2 en la región $c < r < b$. Determine

a) el circuito R-C equivalente entre los conductores interior y exterior, y

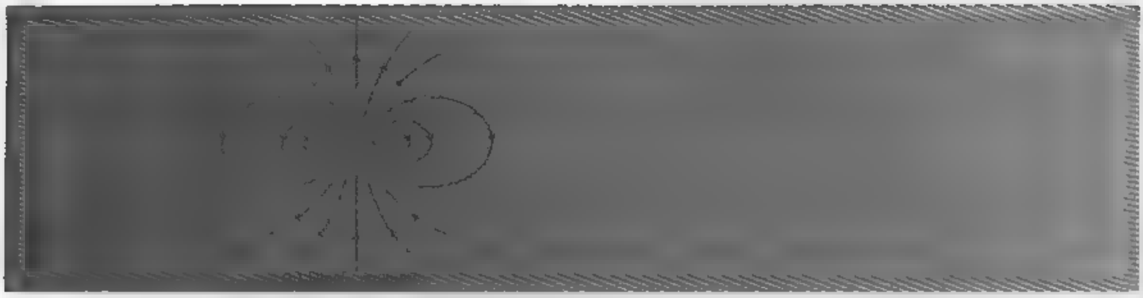
b) la densidad de corriente en cada región.

SUGERENCIA: Use los resultados del ejemplo 4-3(a).

P.4-10 Remítase a la arandela conductora plana de cuarto de círculo del ejemplo 4-4 y a la figura 4-4. Encuentre la resistencia entre las caras planas superior e inferior.

P.4-11 Remítase a la arandela conductora plana de cuarto de círculo del ejemplo 4-4 y a la figura 4-4. Encuentre la resistencia entre los lados curvos

P.4-12 Encuentre la resistencia entre dos superficies esféricas concéntricas de radio R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$ si el espacio entre las superficies está relleno con un material homogéneo e isótropo con conductividad σ.



CAPÍTULO 5

5-1 DESCRIPCIÓN GENERAL

Ya analizamos la interacción entre cargas eléctricas en reposo al presentar el concepto del *campo eléctrico*. En el capítulo 3 vimos que la intensidad de campo eléctrico **E** es la única cantidad de campo vectorial fundamental necesaria para estudiar la electrostática en el espacio libre. En el caso de un medio material es conveniente definir una segunda cantidad de campo vectorial, la densidad de flujo eléctrico (o desplazamiento eléctrico) **D**, para considerar el efecto de la polarización. Las dos ecuaciones siguientes forman la base del modelo electrostático:

Dos ecuaciones básicas del modelo electrostático

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \tag{5-1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{5-2}$$

La propiedad eléctrica del medio determina la relación entre **D** y **E**. Si el medio es lineal e isótropo, tenemos la relación constitutiva simple $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, donde la permitividad ϵ es un escalar.

El fenómeno del magnetismo fue descubierto cuando se encontró que ciertas muestras de magnetita tenían un misterioso poder de atracción. Como las muestras de magnetita se hallaron cerca de la antigua ciudad griega llamada *Magnesia*, de ahí se han derivado los términos *magneto*, *magnetismo*, *magnetización* y *magnetrón*. Estudiaremos el magnetismo introduciendo el concepto del *campo magnético*. Un campo magnético puede ser causado por un imán permanente (como la magnetita), por cargas en movimiento o por un flujo de corriente.

Campos magnéticos estáticos

Cuando se coloca una pequeña carga de prueba q en un campo eléctrico $\mathbf{E}$, experimenta una ***fuerza eléctrica*** $\mathbf{F}_e$ que es función de la posición de q.

Intensidad eléctrica definida en términos de la fuerza sobre una carga estacionaria

$$\boxed{\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \qquad \text{(N)}.} \tag{5-3}$$

Se ha demostrado experimentalmente que cuando la carga de prueba está en movimiento en un campo magnético caracterizado por una ***densidad de flujo magnético*** $\mathbf{B}$,[†] la carga q también experimenta una ***fuerza magnética*** $\mathbf{F}_m$ expresada por

Densidad de flujo magnético definida en términos de la fuerza experimentada por una carga en movimiento

$$\boxed{\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \qquad \text{(N)},} \tag{5-4}$$

donde $\mathbf{u}$ (m/s) es la velocidad de la carga en movimiento y $\mathbf{B}$ se mide en webers por metro cuadrado (Wb/m²) o teslas (T).[‡] La ***fuerza electromagnética*** total sobre una carga q es entonces $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$; o sea,

Unidad de B en el SI

Ecuación de la fuerza de Lorentz

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \qquad \text{(N)},} \tag{5-5}$$

[†] La densidad de flujo magnético también se conoce como ***inducción magnética***, sobre todo en los libros de física.

[‡] Un weber por metro cuadrado o un tesla equivale a 10^4 gauss en unidades CGS. El campo magnético de la Tierra es de aproximadamente $\frac{1}{2}$ gauss o 0.5×10^{-4} T. (Un weber es lo mismo que un volt-segundo.)

llamada ***ecuación de la fuerza de Lorentz.*** Su validez se ha establecido sin lugar a dudas en forma experimental. Podemos considerar $\mathbf{F}_e/q$ sobre una q pequeña como la definición de la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ (como hicimos en la ecuación 3-1) y $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ como la relación que define la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$. Alternativamente, podemos considerar la ecuación de la fuerza de Lorentz como un postulado fundamental de nuestro modelo electromagnético; no puede derivarse de otros postulados.

Las cargas en movimiento producen una corriente que a su vez crea un campo magnético. Las corrientes estacionarias están acompañadas por campos magnéticos estáticos, tema que trataremos en este capítulo. Iniciaremos nuestro estudio de los campos magnéticos en el espacio libre con dos postulados que especifican la divergencia y el rotacional de $\mathbf{B}$. Después definimos, a partir de la naturaleza solenoidal de $\mathbf{B}$, un potencial magnético vector que veremos que obedece a una ecuación vectorial de Poisson. Después derivaremos la ley de Biot-Savart, la cual puede usarse para determinar el campo magnético de un circuito por el que circula una corriente. La relación postulada del rotacional nos lleva directamente a la ley circuital de Ampère, de gran utilidad cuando existe simetría.

Podemos estudiar el efecto macroscópico de los materiales magnéticos en un campo magnético definiendo un vector de magnetización. Aquí presentaremos otra cantidad de campo vectorial: la intensidad de campo magnético $\mathbf{H}$. Basándonos en la relación entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ definiremos la permeabilidad del material y analizaremos el comportamiento de los materiales magnéticos. Luego examinaremos las condiciones en la frontera (condiciones de contorno) de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en la superficie de separación de dos medios magnéticos diferentes; definiremos la autoinductancia y la inductancia mutua y veremos la energía, las fuerzas y los pares de torsión magnéticos.

5-2 POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA MAGNETOSTÁTICA EN EL ESPACIO LIBRE

Para estudiar la magnetostática (campos magnéticos estáticos) en el espacio libre o en un medio no magnético[†] sólo tenemos que considerar el vector de densidad de flujo magnético, $\mathbf{B}$. *Los dos postulados fundamentales de la magnetostática que definen la divergencia y el rotacional de* $\mathbf{B}$ *en un medio no magnético son*

La divergencia de B es nula.

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,} \tag{5-6}$$

y

Rotacional de B estático en un medio no magnético

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.} \quad \text{(en un medio no magnético)} \tag{5-7}$$

[†] Con excepción de los materiales ferromagnéticos (níquel, cobalto, hierro y sus aleaciones), la permeabilidad de las sustancias es muy cercana (en un 0.01%) a μ_0 del espacio libre (véase la tabla en el apéndice B-5). Al tratar en este libro los campos magnéticos en materiales no ferromagnéticos, como el aire, agua, cobre y aluminio, consideraremos por cuestiones de sencillez que están en el espacio libre.

En la ecuación (5-7), μ_0 es la permeabilidad del espacio libre

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\text{H/m})$$

(véase la Ec. 1-9), y $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente (A m^2). Puesto que la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es cero, de la ecuación (5-7) obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{5-8}$$

que es consistente con la ecuación (4-21) para corrientes estacionarias.

Si tomamos la integral de volumen de la ecuación (5-6) y aplicamos el teorema de la divergencia, tenemos

No hay fuentes de flujo magnético (no hay cargas magnéticas aisladas).

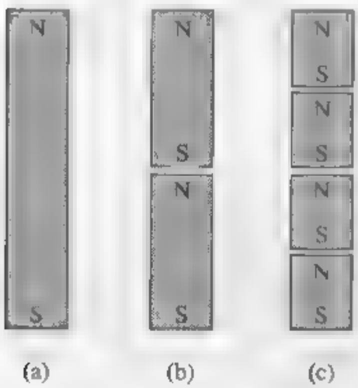
$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0,} \tag{5-9}$$

donde la integral de superficie se aplica a la superficie que limita un volumen arbitrario Al comparar las ecuaciones (5-9) y (3-6) llegamos a la conclusión de que no hay una analogía magnética para las cargas eléctricas. ***No hay fuentes de flujo magnético, y las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas***. La ecuación (5-9) también se conoce como la expresión de la ***ley de la conservación del flujo magnético***, pues establece que el flujo magnético total de salida a través de cualquier superficie cerrada es cero.

El flujo magnético neto que fluye hacia fuera de cualquier superficie cerrada es cero.

La designación tradicional de polos norte y sur en un imán permanente no implica que existe una carga magnética positiva aislada en el polo norte y una cantidad correspondiente de carga magnética negativa aislada en el polo sur Considere el imán con polos norte y sur que se muestra en la figura 5-1(a) Si cortamos este imán en dos segmentos, aparecen nuevos polos norte y sur y tendremos dos imanes más cortos, como

FIGURA 5-1 División sucesiva de una barra magnética.



en la figura 5-1(b). Si volvemos a cortar estos dos imanes en dos segmentos, tendremos cuatro imanes, cada uno con polos norte y sur, como se ilustra en la figura 5-1(c). Podríamos continuar este proceso hasta tener imanes de dimensiones atómicas, pero cada imán infinitesimalmente pequeño seguiría teniendo polos norte y sur. Es obvio que no pueden aislarse los polos magnéticos. Las líneas de flujo magnético siguen trayectorias cerradas de un extremo del imán al otro extremo por fuera del imán y luego continúan por dentro del imán de vuelta al primer extremo. La designación de polos norte y sur se debe a que los extremos respectivos de un imán suspendido libremente en el campo magnético de la Tierra apuntarán hacia el norte y el sur.†

No es posible aislar los polos magnéticos norte y sur.

Podemos obtener la forma integral de la relación del rotacional de la ecuación (5-7) integrando ambos lados sobre una superficie abierta y luego aplicando el teorema de Stokes. Tenemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s},$$

o

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I,} \qquad \text{(en un medio no magnético)} \tag{5-10}$$

donde la trayectoria C de la integral de línea es el contorno que limita la superficie S, e I es la corriente total a través de S. El sentido de circulación de C y la dirección del flujo de corriente siguen la regla de la mano derecha. Observe que la ecuación (5-10) es una relación derivada del postulado del rotacional de $\mathbf{B}$. Es una forma de la ***ley circuital de Ampère***, la cual establece que ***la circulación de la densidad de flujo magnético alrededor de una trayectoria cerrada en un medio no magnético es igual a μ_0 veces la corriente total que fluye a través de la superficie limitada por la trayectoria.*** La ley circuital de Ampère es muy útil para determinar la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ ocasionada por una corriente I cuando hay una trayectoria cerrada C alrededor de la corriente, tal que la magnitud de $\mathbf{B}$ es constante a lo largo de la trayectoria.

Ley circuital de Ampère en medios no magnéticos

A continuación se resumen los dos postulados fundamentales de la magnetostática en el espacio libre.

† Comentaremos al margen que el examen de algunas formaciones rocosas prehistóricas ha dado pie a la creencia de que se han producido inversiones espectaculares del campo magnético terrestre aproximadamente cada diez millones de años. Se cree que el campo magnético terrestre es producido por el movimiento giratorio del hierro fundido de la zona exterior del núcleo del planeta, pero aún no se comprenden bien las razones exactas de las inversiones de campo. Se pronostica que la siguiente inversión tendrá lugar dentro de solo unos 2000 años. No es posible conjeturar las consecuencias de esta inversión, pero entre ellas estarían problemas en la navegación y cambios drásticos en los patrones migratorios de las aves.

Dos postulados fundamentales de la magnetostática en medios no magnéticos

Postulados de la magnetostática en medios no magnéticos	
Forma diferencial	Forma integral
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$

EJEMPLO 5-1

Por un conductor sólido no magnético, recto e infinitamente largo, con sección transversal circular de radio b, circula una corriente estacionaria I. Determine la densidad de flujo magnético dentro y fuera del conductor.

SOLUCIÓN

Primero observamos que este problema tiene simetría cilíndrica y que podemos aprovechar la ley circuital de Ampère. Si alineamos el conductor sobre el eje z, la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ tendrá dirección ϕ y será constante a lo largo de cualquier trayectoria circular alrededor del eje z. En la figura 5 2(a) se muestra un corte transversal del conductor y las dos trayectorias circulares de integración, C_1 y C_2, respectivamente dentro y fuera del conductor por el que circula corriente. Note una vez mas que las direcciones de C_1 y C_2, así como la dirección de I, siguen la regla de la mano derecha (cuando los dedos de la mano derecha apuntan en las direcciones de C_1 y C_2, el pulgar de esa misma mano apunta en la dirección de I).

a) *Dentro del conductor:*

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 1}, \qquad d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\phi r_1\, d\phi$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} B_{\phi 1} r_1\, d\phi = 2\pi r_1 B_{\phi 1}.$$

La corriente a través del área encerrada por C_1 es

$$I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} I = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I.$$

Por consiguiente, a partir de la ley circuital de Ampère,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 1} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2}, \qquad r_1 \leq b. \tag{5-11}$$

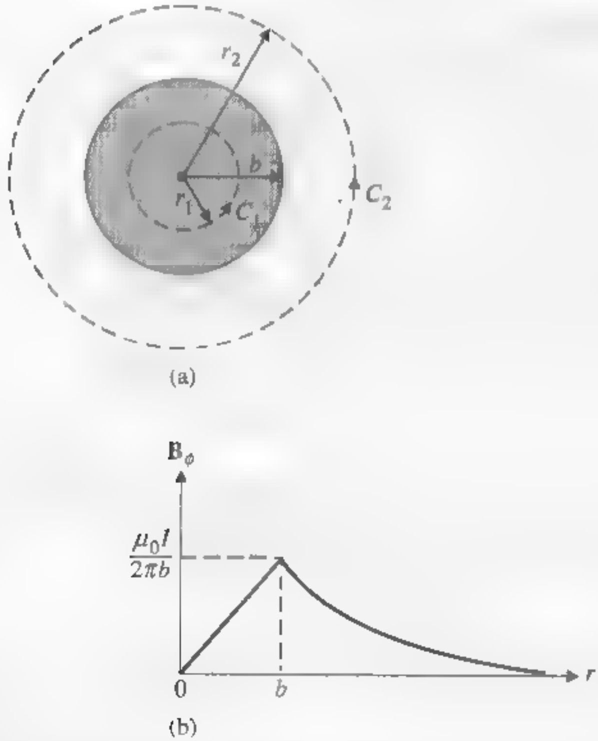


FIGURA 5-2 Densidad de flujo magnético de un conductor circular infinitamente largo por el que circula una corriente I hacia afuera del papel (ejemplo 5-1).

b) *Fuera del conductor:*

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 2}, \qquad d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\phi r_2\, d\phi$$

$$\oint_{C_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r_2 B_{\phi 2}.$$

La trayectoria C_2 encierra la corriente total I. Por consiguiente,

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 2} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}, \qquad r_2 \geq b. \tag{5-12}$$

Si examinamos las ecuaciones (5-11) y (5-12) veremos que la magnitud de $\mathbf{B}$ aumenta linealmente de acuerdo con r_1, desde 0 hasta $r_1 = b$, después de lo cual disminuye inversamente con r_2. En la figura 5-2(b) se representa gráficamente la variación de B_f con r.

■ **EJERCICIO 5.1** Por un tubo conductor muy delgado e infinitamente largo, de radio b, circula una corriente superficial uniforme $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_z J_s$ (A/m). Encuentre $\mathbf{B}$ en todos los puntos.

RESPUESTA: 0 para $r < b$, $\mathbf{a}_\phi \mu_0 J_s b/r$ para $r > b$.

EJEMPLO 5-2

Determine la densidad de flujo magnético en en el interior de una bobina toroidal con espiras muy juntas, con nucleo de aire, con N espiras de bobina y por la que circula una corriente I. El toroide tiene un radio medio de b y el radio de cada espira es a.

SOLUCIÓN

En la figura 5-3 se ilustra la geometría del problema. La simetría cilíndrica asegura que $\mathbf{B}$ solo tiene componente ϕ y que es constante a lo largo de cualquier trayectoria circular alrededor del eje del toroide. Construimos un contorno circular C con radio r, como se muestra en la figura. Para $(b - a) < r < b + a$, la ecuación (5-10) nos lleva directamente a

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 N I,$$

donde hemos supuesto que el toroide tiene un núcleo de aire con permeabilidad μ_0. Por lo tanto,

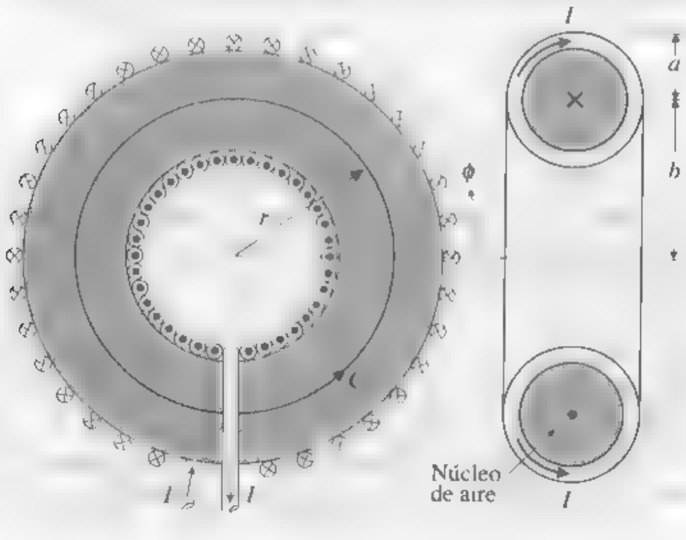
$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi B_\phi = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \qquad (b-a) < r < (b+a). \tag{5-13}$$

$\mathbf{B} = 0$ en $r < (b - a)$ y $r > (b + a)$, ya que la corriente total neta encerrada por un contorno construido en estas dos regiones es cero.

■ EJERCICIO 5.2 Encuentre la densidad de flujo magnético en el interior de un solenoide cilíndrico muy largo con nucleo de aire, con n espiras por metro y por el que circula una corriente I.

RESPUESTA: $\mu_0 n I$.

FIGURA 5-3 Bobina toroidal por la que circula una corriente (ejemplo 5-2).



PREGUNTAS DE REPASO

P.5-1 ¿Cuál es la expresión de la fuerza sobre una carga de prueba q que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ en un campo magnético con densidad de flujo $\mathbf{B}$?

P.5-2 Compruebe que un tesla (T), la unidad de densidad de flujo magnético, es lo mismo que un volt-segundo por metro cuadrado (V·s/m²).

P.5-3 Escriba la ecuación de la fuerza de Lorentz.

P.5-4 ¿Cuáles son los dos postulados fundamentales de la magnetostática?

P.5-5 ¿Qué postulado de la magnetostática niega la existencia de cargas magnéticas aisladas?

P.5-6 Enuncie la ley de la conservación del flujo magnético.

P.5-7 Enuncie la ley circuital de Ampère.

P.5-8 ¿Cómo varía con la distancia el campo $\mathbf{B}$ de un filamento recto e infinitamente largo por el que circula una corriente continua I?

COMENTARIOS

1. La fuerza magnética sobre una carga q que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{B}$; no hay fuerza sobre q si $\mathbf{u}$ es paralela a $\mathbf{B}$.
2. No hay cargas magnéticas aisladas.
3. El campo magnético es solenoidal y las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas.

5-3 POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR

El postulado de que la divergencia de $\mathbf{B}$ es nula en la ecuación (5-6), $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, asegura que $\mathbf{B}$ es solenoidal. Como consecuencia de esto, podemos expresar $\mathbf{B}$ como el rotacional de otro campo vectorial, digamos $\mathbf{A}$, de manera que

Definición parcial del potencial magnético vector A

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \text{(T)}.} \tag{5-14}$$

Unidad de A en el SI

El campo vectorial A definido de esta manera se denomina ***potencial magnético vector***. Su unidad en el SI es el weber por metro (Wb/m). Así, si podemos hallar el vector $\mathbf{A}$ de una distribución de corriente, es posible obtener $\mathbf{B}$ a partir de $\mathbf{A}$ por medio de una operación diferencial (rotacional). Esto es muy similar a la introducción del potencial eléctrico escalar V para el $\mathbf{E}$ irrotacional en la electrostática (Sec. 3-5) y a la obtención de $\mathbf{E}$ a partir de la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$. Sin embargo, la definición de un vector requiere la especificación de su rotacional y su divergencia. Por lo tanto, la ecuación (5-14) no es suficiente para definir $\mathbf{A}$; falta especificar la divergencia.

¿Cómo elegimos $\nabla \cdot \mathbf{A}$? Antes de responder esta pregunta, tomemos el rotacional de $\mathbf{B}$ en la ecuación (5-14) y sustituyámoslo en la ecuación (5-7). Tenemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{5-15}$$

Nos desviamos un poco para introducir la fórmula del rotacional del rotacional de un vector.†

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \tag{5-16a}$$

o

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5-16b}$$

Las ecuaciones (5-16a) y (5-16b) pueden considerarse como la definición de $\nabla^2\mathbf{A}$, el laplaciano de A. En el caso de *coordenadas cartesianas*, también podemos verificar por sustitución directa que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{a}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{a}_z \nabla^2 A_z. \tag{5-17}$$

De esta manera, el laplaciano de un campo vectorial A *en coordenadas cartesianas* es otro campo vectorial cuyas componentes son los laplacianos (la divergencia del gradiente) de las componentes correspondientes de A. Sin embargo, esto no es aplicable a otros sistemas de coordenadas.

■ **EJERCICIO 5.3** Verifique la ecuación (5-17) en coordenadas cartesianas.

Desarrollamos $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ de la ecuación (5-15) de acuerdo con la ecuación (5-16a) y obtenemos

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{5-18}$$

Con el propósito de simplificar lo más posible la ecuación (5-18), elegimos

Condición de Coulomb para la divergencia de A

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,} \tag{5-19‡}$$

y la ecuación (5-18) se convierte en

Forma de operador de la ecuación vectorial de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.} \tag{5-20}$$

Ésta es una ***ecuación vectorial de Poisson***. La ecuación (5-20) en coordenadas cartesianas equivale a tres ecuaciones de Poisson escalares:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \tag{5-21a}$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \tag{5-21b}$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z. \tag{5-21c}$$

† Esta fórmula puede comprobarse fácilmente en coordenadas cartesianas mediante sustitución directa.

‡ Esta relación se conoce como ***condición de Coulomb*** o ***gauge de Coulomb***.

Cada una de estas tres ecuaciones es matemáticamente igual que la ecuación escalar de Poisson de la electrostática, ecuación (3-126). En el espacio libre la ecuación

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

tiene una solución particular (véase la Ec. (3-38)),

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_v}{R}\, dv'.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (5-21a) es

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x}{R}\, dv'.$$

Podemos escribir soluciones similares para A_y y A_z. Al combinar las tres componentes obtenemos la solución de la ecuación (5-20):

Determinación del potencial magnético vector a partir de la densidad de corriente

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R}\, dv' \qquad \text{(Wb/m).}} \tag{5-22}$$

La ecuación (5-22) nos permite hallar el potencial magnético vector **A** a partir de la densidad volumétrica de corriente **J**. La densidad de flujo magnético **B** puede obtenerse a partir de $\nabla \times \mathbf{A}$ por diferenciación .

El potencial vector **A** se relaciona de manera sencilla con el flujo magnético Φ a través de un área S limitada por un contorno C:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \tag{5-23}$$

Unidad del flujo magnético en el SI

La unidad en el SI del flujo magnético es el weber (Wb), equivalente a un tesla-metro cuadrado ($\mathrm{T \cdot m^2}$). Si usamos la ecuación (5-14) y el teorema de Stokes, tenemos

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(Wb).} \tag{5-24}$$

Relación entre el potencial magnético vector y el flujo magnético

Por consiguiente, el potencial magnético vector **A** tiene importancia física, ya que su integral de línea alrededor de una trayectoria cerrada equivale al flujo magnético total que pasa a través del área encerrada por la trayectoria.

5-4 LEY DE BIOT-SAVART Y APLICACIONES

En muchas aplicaciones nos interesa determinar el campo magnético debido a un circuito por el que circula corriente. En el caso de un alambre delgado con sección transversal S, dv' es igual a $S\, d\ell'$ y el flujo de corriente es totalmente a lo largo del alambre. Tenemos

$$\mathbf{J}\, dv' = JS\, d\boldsymbol{\ell}' = I\, d\boldsymbol{\ell}', \tag{5-25}$$

y la ecuación (5-22) se convierte en

Determinación del potencial magnético vector a partir de la corriente en un circuito cerrado

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R} \qquad \text{(Wb/m)},} \tag{5-26}$$

donde se ha colocado un círculo en el signo de integral porque la corriente I debe circular en una trayectoria cerrada,† designada por C'. La densidad de flujo magnético es entonces

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R}\right). \tag{5-27}$$

Es muy importante observar en la ecuación (5-27) que la operación de rotacional *sin prima* implica la diferenciación con respecto a las coordenadas espaciales del *punto campo*, mientras que la operación de integración es con respecto a las *coordenadas fuente con prima*. El integrando de la ecuación (5-27) puede desarrollarse en dos términos usando la siguiente identidad (véase la Ec. (2-115)):

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} + (\nabla f) \times \mathbf{G}. \tag{5-28}$$

Con $f = 1/R$ y $\mathbf{G} = d\boldsymbol{\ell}'$, tenemos

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \left[\frac{1}{R}\nabla \times d\boldsymbol{\ell}' + \left(\nabla\frac{1}{R}\right) \times d\boldsymbol{\ell}'\right]. \tag{5-29}$$

Dado que las coordenadas con y sin prima son independientes, $\nabla \times d\boldsymbol{\ell}'$ es igual a 0 y desaparece el primer término del lado derecho de la ecuación (5-29). La distancia R se mide desde $d\boldsymbol{\ell}'$ en (x', y', z') hasta el punto campo en (x, y, z). Tenemos entonces

$$\frac{1}{R} = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-1/2};$$

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{1}{R}\right) &= \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= -\frac{\mathbf{a}_x(x-x') + \mathbf{a}_y(y-y') + \mathbf{a}_z(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\mathbf{a}_R \frac{1}{R^2},\end{aligned} \tag{5-30}$$

† Estamos tratando ahora con corrientes continuas (no variables con el tiempo) que producen campos magnéticos estacionarios. Los circuitos que contienen fuentes variables con el tiempo pueden enviar corrientes variables con el tiempo por un alambre abierto y depositar cargas en sus extremos. Las antenas son un ejemplo de esta situación.

donde $\mathbf{a}_R$ es el vector unitario dirigido *desde el punto fuente hasta el punto campo*. Al sustituir la ecuación (5-30) en la ecuación (5-29) obtenemos

Ley de Biot-Savart para hallar la densidad de flujo magnético a partir de la corriente en un circuito cerrado

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \qquad \text{(T)}.} \tag{5-31}$$

La ecuación (5-31) se conoce como ***ley de Biot-Savart***. Es una fórmula para determinar la densidad de flujo magnético **B** causada por una corriente I en una trayectoria cerrada C', y fue *derivada* del postulado de la divergencia de **B**. En varios libros se emplea la ley de Biot-Savart como punto de partida para el desarrollo de la magnetostática, pero es difícil ver el procedimiento experimental empleado para establecer una relación tan precisa y complicada como la ecuación (5-31). Preferimos derivar tanto la ley circuital de Ampère como la ley de Biot-Savart a partir de nuestros sencillos postulados de divergencia y rotacional de **B**.

En ocasiones es conveniente escribir la ecuación (5-31) en dos pasos

$$\boxed{\mathbf{B} = \oint_{C'} d\mathbf{B} \qquad \text{(T)},} \tag{5-32a}$$

con

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \right) \qquad \text{(T)},} \tag{5-32b}$$

que es la densidad de flujo magnético debido a un elemento de corriente $I\, d\ell'$. Una forma alternativa y a veces más conveniente de la ecuación (5-32b) es

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \qquad \text{(T)}.} \tag{5-32c}$$

EJEMPLO 5-3

Una corriente continua I fluye por un alambre recto de longitud $2L$. Calcule la densidad de flujo magnético **B** en un punto localizado a una distancia r del alambre y en el plano que lo divide en dos segmentos iguales: (a) determinando primero el potencial magnético vector **A** y (b) aplicando la ley de Biot-Savart.

SOLUCIÓN

Las corrientes continuas sólo existen en circuitos cerrados. Por lo tanto, el alambre en este problema debe formar parte de un circuito cerrado por el que circula una corriente

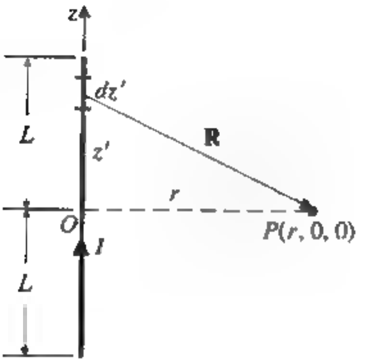


FIGURA 5-4 Alambre recto por el que circula una corriente (ejemplo 5-3).

Como no conocemos el resto del circuito, no es posible aprovechar la ley circuital de Ampère. Vea la figura 5-4. El segmento de línea por el que circula corriente está alineado con el eje z. Un elemento típico del alambre es

$$d\boldsymbol{\ell}' = \mathbf{a}_z\, dz'.$$

Las coordenadas cilíndricas del punto campo P son $(r, 0, 0)$.

a) *Mediante la determinación de* **B** *a partir de* $\nabla \times \mathbf{A}$. Si sustituimos $R = \sqrt{z'^2 + r^2}$ en la ecuación (5-26) tenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + r^2}}$$

$$= \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln(z' + \sqrt{z'^2 + r^2})\right]\Big|_{-L}^{L}$$

$$= \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L}. \tag{5-33}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{a}_z A_z) = \mathbf{a}_r \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \mathbf{a}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

La simetría cilíndrica alrededor del alambre asegura que $\partial A_z/\partial \phi = 0$. Entonces,

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L}\right]$$

$$= \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}. \tag{5-34}$$

Si $r \ll L$, la ecuación (5-34) se reduce a

$$\mathbf{B}_\phi = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{5-35}$$

que es la expresión de **B** en un punto situado a una distancia r de un alambre recto e infinitamente largo por el que circula una corriente I, como se indicó en la ecuación (5-12).

b) *Mediante la aplicación de la ley de Biot-Savart.* En la figura 5-4 podemos ver que el vector distancia *desde* el elemento fuente dz' hasta el punto campo P es

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z'$$

$$d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{R} = \mathbf{a}_z dz' \times (\mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z') = \mathbf{a}_\phi r\, dz'.$$

Al sustituir en la ecuación (5-32c) obtenemos

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{r\, dz'}{(z'^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}},$$

que es lo mismo que la ecuación (5-34).

EJEMPLO 5-4

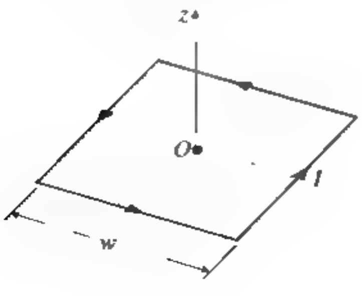
Encuentre la densidad de flujo magnético en el centro de una espira cuadrada plana de lados w por la que circula una corriente continua I.

SOLUCIÓN

Suponga que la espira está en el plano xy, como se muestra en la figura 5-5. La densidad de flujo magnético en el centro de la espira cuadrada es cuatro veces la debida a un solo lado de longitud w. Si asignamos $L = r = w/2$ en la ecuación (5-34), tenemos

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi w} \times 4 = \mathbf{a}_z \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi w}, \tag{5-36}$$

FIGURA 5-5 Espira cuadrada por la que circula una corriente I (ejemplo 5-4).



donde la dirección de **B** y la de la corriente en la espira siguen la regla de la mano derecha.

■ **EJERCICIO 5.4** Una espira rectangular de 8 (cm) × 6 (cm) por la que circula una corriente está en el plano *xy*. Una corriente continua de 5 (A) fluye en la dirección de las agujas del reloj mirando la espira desde arriba. Calcule **B** en el centro de la espira.

RESPUESTA: $-\mathbf{a}_z 83.3$ (μT).

EJEMPLO 5-5

Determine la densidad de flujo magnético en un punto sobre el eje de una espira circular de radio b por la que circula una corriente continua I.

SOLUCIÓN

Aplicamos la ley de Biot-Savart a la espira circular mostrada en la figura 5-6

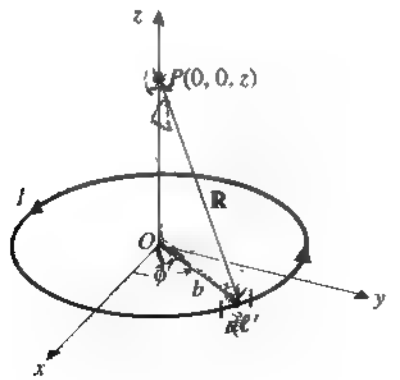
$$d\boldsymbol{\ell}' = \mathbf{a}_\phi b\, d\phi',$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_z z - \mathbf{a}_r b,$$
$$R = (z^2 + b^2)^{1/2}.$$

Es importante recordar que **R** es el vector *desde* el elemento fuente $d\ell'$ hasta el punto campo P. Tenemos

$$d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{R} = \mathbf{a}_\phi b\, d\phi' \times (\mathbf{a}_z z - \mathbf{a}_r b)$$
$$= \mathbf{a}_r bz\, d\phi' + \mathbf{a}_z b^2\, d\phi'.$$

Por la simetría cilíndrica, es fácil ver que la componente $\mathbf{a}_r$ se cancela por la contribución del elemento localizado diametralmente opuesto a $d\ell'$, de manera que sólo hay que considerar la componente $\mathbf{a}_z$ de este producto cruz.

FIGURA 5-6 Espira circular por la que circula una corriente I (ejemplo 5-5).



A partir de las ecuaciones (5-32a) y (5-32c) escribimos

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{a}_z \frac{b^2\, d\phi'}{(z^2+b^2)^{3/2}},$$

o

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}} \qquad \text{(T)}.} \tag{5-37}$$

■ **EJERCICIO 5.5** Remítase a la figura 5-6. Determine **B**:

a) en el centro de una espira circular de radio 5 (cm) por la que circula una corriente continua de 2 (A), y

b) en el centro de una espira semicircular de radio 8 (cm) por la que circula una corriente continua de 4 (A).

RESPUESTA: (a) 8π (μT), (b) 5π (μT).

5-5 EL DIPOLO MAGNÉTICO

Iniciaremos esta sección con un ejemplo.

EJEMPLO 5-6

Dipolo magnético

Determine la densidad de flujo magnético en un punto lejano de una espira circular pequeña de radio b por la que circula una corriente I (un ***dipolo magnético***).

SOLUCIÓN

Elegimos el centro de la espira como origen de las coordenadas esféricas, como se muestra en la figura 5-7. Las coordenadas fuente están marcadas con primas. Primero hallamos el potencial magnético vector **A** y luego determinamos B mediante $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R_1}, \tag{5-38}$$

donde R_1 denota la distancia entre el elemento fuente $d\boldsymbol{\ell}'$ en P' y el punto campo P, como se muestra en la figura 5-7. Debido a la simetría, el campo magnético es independiente del ángulo ϕ del punto campo. Por conveniencia elegimos $P(R, \theta, \pi/2)$ en el plano yz.

Es importante señalar que $\mathbf{a}_\phi$ en $d\boldsymbol{\ell}'$ *no* es lo mismo que $\mathbf{a}_\phi$ en el punto P. De hecho, $\mathbf{a}_\phi$ en P es $-\mathbf{a}_x$, como se muestra en la figura 5-7, y

$$d\boldsymbol{\ell}' = (-\mathbf{a}_x \operatorname{sen}\phi' + \mathbf{a}_y \cos\phi')b\, d\phi'. \tag{5-39}$$

$\hat{\varphi}$

Para cada $I\,d\ell'$ hay otro elemento de corriente diferencial localizado simétricamente en el otro lado del eje y que contribuirá a $\mathbf{A}$ una cantidad igual en la dirección $-\mathbf{a}_x$, pero que cancelará la contribución de $I\,d\ell'$ en la dirección $\mathbf{a}_y$. La ecuación (5-38) puede escribirse como

$$\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b \operatorname{sen} \phi'}{R_1}\, d\phi',$$

o

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} \phi'}{R_1}\, d\phi'. \tag{5-40}$$

Al aplicar la ley de los cosenos al triángulo OPP' se obtiene

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos \psi,$$

donde $R \cos \psi$ es la proyección de R sobre el radio OP', lo que es igual a la proyección de OP'' ($OP'' = R \operatorname{sen} \theta$) sobre OP'. Por consiguiente,

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi',$$

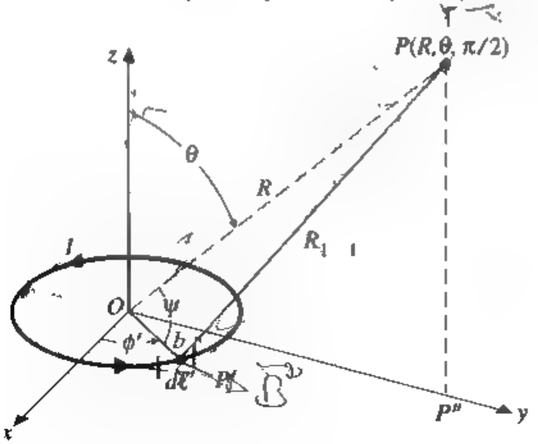
y

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi'\right)^{-1/2}$$

Si $R^2 \gg b^2$, podemos ignorar b^2/R^2 en comparación con 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &\simeq \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2b}{R} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi'\right)^{-1/2} \\ &\cong \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi'\right). \end{aligned} \tag{5-41}$$

FIGURA 5-7 Pequeña espira circular por la que circula una corriente I (ejemplo 5-6).



Al sustituir la ecuación (5-41) en la ecuación (5-40) tenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{b}{R} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi'\right) \operatorname{sen} \phi' \, d\phi'.$$

que da

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2} \operatorname{sen} \theta. \tag{5-42}$$

La densidad de flujo magnético es $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ Podemos usar la ecuación (2-97) o la fórmula del Apéndice C para hallar

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3} (\mathbf{a}_R \, 2 \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \operatorname{sen} \theta), \tag{5-43}$$

que es la respuesta buscada.

Al llegar a este punto podemos notar la similitud entre la ecuación (5-43) y la expresión de la intensidad de campo eléctrico *en el campo lejano* de un dipolo electrostático expresada en la ecuación (3-37). Por lo tanto, las líneas de flujo magnético en los puntos distantes de un dipolo magnético (colocado en el plano xy), como en la figura 5-7, tendrán la misma forma que las líneas de campo eléctrico de un dipolo eléctrico (orientado según la dirección z). Sin embargo, las líneas de flujo de un dipolo magnético son continuas cerca de los dipolos, mientras que las líneas de campo de un dipolo eléctrico terminan en las cargas, yendo siempre de la carga positiva a la negativa. Esto se ilustra en la figura 5-8.

Reorganicemos la expresión del potencial magnético vector de la ecuación (5-42) como

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 (I\pi b^2)}{4\pi R^2} \operatorname{sen} \theta,$$

o

Determinación del potencial magnético vector a partir del momento dipolar magnético

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \qquad (\text{Wb/m}),} \tag{5-44}$$

donde

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_z I\pi b^2 = \mathbf{a}_z IS = \mathbf{a}_z m \qquad (\text{A} \cdot \text{m}^2) \tag{5-45}$$

se define como el ***momento dipolar magnético*** y es un vector cuya magnitud es el producto de la corriente que entra y el área de la espira; así mismo, su dirección es la del pulgar cuando los dedos de la mano derecha siguen la dirección de la corriente. Si comparamos la ecuación (5-44) con la expresión del potencial eléctrico escalar de un dipolo de la ecuación (3-36),

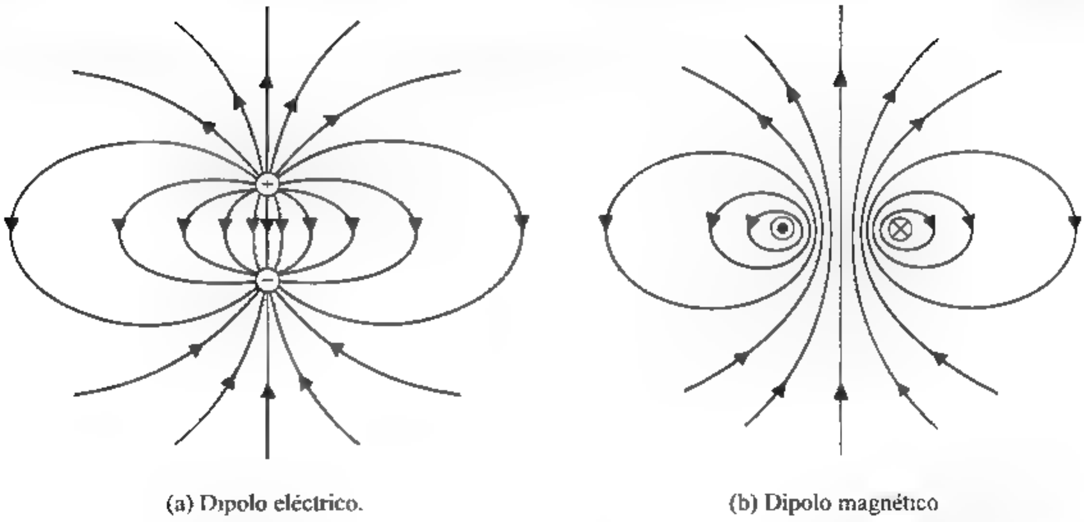


FIGURA 5-8 Líneas de campo eléctrico de un dipolo eléctrico y líneas de flujo magnético de un dipolo magnético.

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \qquad \text{(V)}, \tag{5-46}$$

veremos que **A** es análogo a V en ambos casos. Podemos llamar ***dipolo magnético*** a una pequeña espira por la que circula una corriente.

De forma similar, podemos reescribir la ecuación (5-43) como

Densidad de flujo magnético debido a un dipolo magnético

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\mathbf{a}_R\, 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{(T)}.} \tag{5-47}$$

Con excepción del cambio de p por m y de ϵ_0 por $1/\mu_0$, la ecuación (5-47) tiene la misma forma que la ecuación (3-37) para **E** en un punto distante de un dipolo eléctrico. Aunque tomamos una pequeña espira circular como dipolo magnético en el ejemplo 5-6, puede demostrarse que se obtienen las mismas expresiones de zona lejana (Ecs. (5-44) y(5-47)) cuando la espira tiene otras formas, con $m = IS$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.5-9 Defina el *potencial magnético vector* **A**. ¿Cuál es su unidad en el SI?

P.5-10 ¿Cuál es la relación entre el potencial magnético vector **A** y el flujo magnético a través de un área determinada?

P.5-11 Enuncie la ley de Biot-Savart.

P.5-12 ¿Qué es un dipolo magnético? Defina el ***momento dipolar magnético***. ¿Cuál es su unidad en el SI?

COMENTARIOS

1. Al determinar **B** debido a una distribución de corriente, lo más sencillo es aplicar la ley circuital de Ampère si puede hallarse una trayectoria cerrada sobre la cual **B** tenga magnitud constante. La geometría del problema usualmente tiene simetría cilíndrica y/o longitud infinita.
2. Si no existe la condición anterior, deberá usarse la ley de Biot-Savart para determinar **B** a partir de la corriente en un circuito determinado.
3. Cantidades análogas en el cálculo del campo **E** debido a un dipolo eléctrico, y del campo **B** debido a un dipolo magnético (pequeña espira de corriente):

Dipolo eléctrico	Dipolo magnético
$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$	$\mathbf{m} = \mathbf{a}_n IS$
$\mathbf{E}$	$\mathbf{B}$
ϵ_0	$1/\mu_0$

5-6 MAGNETIZACIÓN Y DENSIDADES DE CORRIENTE EQUIVALENTES

De acuerdo con el modelo atómico elemental de la materia, todos los materiales están compuestos por átomos, cada uno de éstos con un núcleo cargado positivamente y varios electrones de carga negativa en órbita alrededor. Los electrones orbitantes originan corrientes circulantes y forman dipolos magnéticos microscópicos. Así mismo, tanto los electrones como el núcleo de un átomo rotan (giran) sobre sus ejes con ciertos momentos dipolares magnéticos. El momento dipolar magnético de un núcleo giratorio por lo general es despreciable en comparación con el de un electrón orbitante o giratorio, debido a la masa mucho mayor y a la menor velocidad angular del núcleo.

En ausencia de un campo magnético externo, los dipolos magnéticos de los átomos de la mayoría de los materiales (con excepción de los imanes permanentes) tienen orientaciones aleatorias, de manera que no hay momento magnético neto. La aplicación de un campo magnético externo ocasiona tanto la alineación de los momentos magnéticos de los electrones giratorios como un momento magnético inducido que se debe a un cambio en el movimiento orbital de los electrones. Para obtener una fórmula que nos permita determinar el cambio cuantitativo en la densidad de flujo magnético ocasionado por la presencia de un material magnético, sea $\mathbf{m}_k$ el momento dipolar magnético de un átomo. Si hay n átomos por unidad de volumen, definimos un ***vector de magnetización*** **M** como

El vector de magnetización es la densidad de volumen del momento dipolar magnético.

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_k}{\Delta v} \qquad \text{(A/m)}, \tag{5-48}$$

que es la densidad de volumen del momento dipolar magnético El momento dipolar magnético $d\mathbf{m}$ de un elemento de volumen dv' es $d\mathbf{m} = \mathbf{M}\, dv'$, lo cual, de acuerdo con la ecuación (5-44), producirá un potencial magnético vector

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}\, dv'. \tag{5-49}$$

El $\mathbf{A}$ total es la integral de volumen de $d\mathbf{A}$ de la ecuación (5-49), y la contribución de la magnetización a la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ es $\nabla \times \mathbf{A}$. La ecuación (5-49) es análoga a la expresión de dV en la ecuación (3-55), a partir de la cual obtuvimos el potencial V debido a un medio dieléctrico polarizado y $\mathbf{E}$ a partir de $-\nabla V$.

De forma similar a la equivalencia de $\mathbf{P}$ de los dipolos eléctricos inducidos a una densidad superficial de carga polarizada $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ y a una densidad volumétrica de carga polarizada $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, analizada en la subsección 3-6.2, podemos demostrar de manera analítica la equivalencia de $\mathbf{M}$ de dipolos magnéticos a una ***densidad superficial de corriente de magnetización***

Densidad superficial de corriente equivalente de magnetización

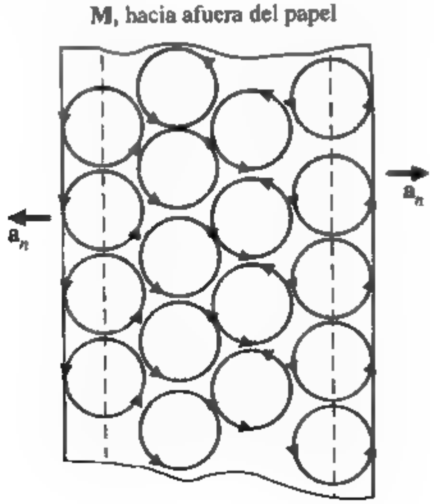
$$\boxed{\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n \qquad (\text{A/m}),} \tag{5-50}$$

donde $\mathbf{a}_n$ es la normal unitaria hacia afuera de la frontera, y una ***densidad de corriente de volumen de magnetización***

Densidad de corriente equivalente de volumen de magnetización

$$\boxed{\mathbf{J}_{mv} = \nabla \times \mathbf{M} \qquad (\text{A/m}^2).} \tag{5-51}$$

FIGURA 5-9 Corte transversal de un material magnetizado.



Podemos tener una interpretación cualitativa si hacemos referencia a la figura 5-9, que representa un corte transversal de un material magnetizado de cierto espesor. Podemos ver que los dipolos magnéticos en la superficie contribuyen de manera efectiva a una corriente superficial más allá de las líneas punteadas. La magnitud de la corriente superficial es directamente proporcional a la densidad de volumen del momento dipolar magnético, y la dirección de la corriente en ambas fronteras está expresada correctamente por $\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$ en la figura, como se estipuló en la ecuación (5-50).

La densidad de corriente equivalente de volumen de magnetización $\mathbf{J}_{mv}$, presentada en la ecuación (5-51), es un poco difícil de visualizar, pero podemos aceptar que la densidad de momento magnético $\mathbf{M}$ produce una densidad de flujo interno $\mathbf{B}_i$ proporcional a $\mathbf{M}$. Podemos escribir

$$\mathbf{B}_i = \mu_0\mathbf{M}, \tag{5-52}$$

o

$$\frac{\mathbf{B}_i}{\mu_0} = \mathbf{M}. \tag{5-53}$$

A partir de la ecuación (5-7) podemos ver que

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}_e}{\mu_0}\right) = \mathbf{J}, \tag{5-54}$$

donde $\mathbf{B}_e$ denota la densidad de flujo magnético externo debido a la densidad de corriente libre $\mathbf{J}$. A partir de la ecuación (5-53) escribimos

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}_i}{\mu_0} = \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_{mv}, \tag{5-55}$$

donde $\mathbf{J}_{mv}$ es la densidad de corriente equivalente de volumen de magnetización. Al sumar las ecuaciones (5-54) y (5-55) tenemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{mv}), \tag{5-56}$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{total} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_i$. Por lo tanto, la densidad de flujo magnético resultante en presencia de un material magnético cambia en una cantidad $\mathbf{B}_i$. Si $\mathbf{M}$ es uniforme en el material, las corrientes de los dipolos atómicos vecinos que fluyen en direcciones opuestas se cancelarán en todo lugar y no quedarán corrientes netas en el interior. Esto lo predice la ecuación (5-51), ya que las derivadas espaciales (y por consiguiente el rotacional) de una $\mathbf{M}$ constante son nulas. Sin embargo, si $\mathbf{M}$ tiene variaciones espaciales y $\nabla \times \mathbf{M} \neq 0$, las corrientes atómicas internas no se cancelan por completo y se produce una densidad de corriente de volumen neta $\mathbf{J}_{mv}$.

EJEMPLO 5-7

Determine la densidad de flujo magnético en el eje de un cilindro circular uniformemente magnetizado de material magnético. El cilindro tiene radio b, longitud L y magnetización axial $\mathbf{M} = \mathbf{a}_z M_0$.

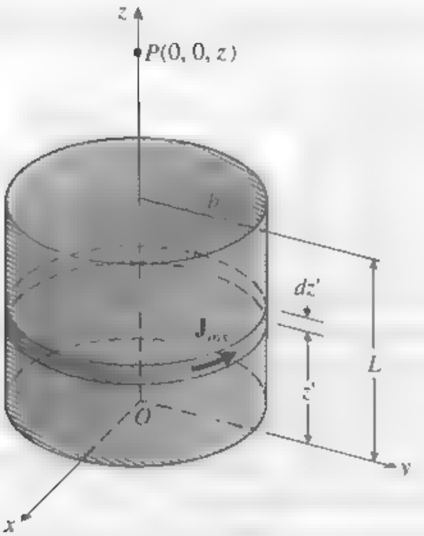


FIGURA 5-10 Cilindro circular magnetizado uniformemente (ejemplo 5-7)

SOLUCIÓN

En este problema concerniente a una barra magnética cilíndrica, sea el eje del cilindro magnetizado coincidente con el eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas, como se ilustra en la figura 5-10. Puesto que la magnetización $\mathbf{M}$ es constante en el imán, $\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M} = 0$ y no hay densidad de corriente equivalente de volumen. La densidad superficial de corriente equivalente de magnetización en la pared lateral es

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{ms} &= \mathbf{M} \times \mathbf{a}'_n = (\mathbf{a}_z M_0) \times \mathbf{a}_r \\ &= \mathbf{a}_\phi M_0.\end{aligned} \tag{5-57}$$

El imán se comporta entonces como una lámina cilíndrica con una densidad lineal de corriente circunferencial M_0 (A/m). No hay corriente superficial en las caras superior e inferior. Para hallar $\mathbf{B}$ en $P(0, 0, z)$, consideramos una longitud diferencial dz' con corriente $\mathbf{a}_\phi M_0 dz'$ y usamos la ecuación (5-37) para obtener

$$d\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 M_0 b^2\, dz'}{2[(z-z')^2 + b^2]^{3/2}}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} &= \mathbf{a}_z \int_0^L \frac{\mu_0 M_0 b^2\, dz'}{2[(z-z')^2 + b^2]^{3/2}} \\ &= \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 M_0}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+b^2}}\right].\end{aligned} \tag{5-58}$$

■ **EJERCICIO 5.6** Un imán cilíndrico de radio 5 (cm) y longitud 12 (cm) tiene una magnetización axial $\mathbf{a}_z 130$ (A/cm). Determine **B**

a) en el centro de la cara superior,

b) en el centro de la cara inferior, y

c) en el centro del imán.

RESPUESTA: (a) y (b) $\mathbf{a}_z 7.54$ (mT), (c) $\mathbf{a}_z 12.55$ (mT).

5-7 INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO Y PERMEABILIDAD RELATIVA

Puesto que la aplicación de un campo magnético externo ocasiona tanto una alineación de los momentos dipolares magnéticos como un momento magnético inducido en un material magnético, esperamos que la densidad de flujo magnético resultante en presencia de un material magnético será diferente de su valor en el espacio libre. El efecto macroscópico de la magnetización puede estudiarse incorporando la densidad de corriente equivalente de volumen de magnetización, $\mathbf{J}_{mv}$ de la ecuación (5-51), en la ecuación básica del rotacional (Ec. 5-7). Tenemos

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mv} = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M},$$

o

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J}. \tag{5-59}$$

Definimos ahora una nueva cantidad de campo fundamental, la ***intensidad de campo magnético*** **H**, tal que

Definición de la intensidad de campo magnético H

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \qquad (\text{A/m}).} \tag{5-60}$$

Al combinar las ecuaciones (5-59) y (5-60) obtenemos la nueva ecuación

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (\text{A/m}^2),} \tag{5-61}$$

donde **J** (A/m²) es la densidad de volumen de la *corriente libre*. Las ecuaciones (5-60) y (5-61) son las dos ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen la magnetostática. La permeabilidad del medio no aparece de manera explícita en estas ecuaciones.

La correspondiente forma integral de la ecuación (5-61) se obtiene tomando la integral superficial escalar de ambos lados:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}, \tag{5-62}$$

o, de acuerdo con el teorema de Stokes,

Ley circuital generalizada de Ampère para corrientes estacionarias; aplicable a medios magnéticos y no magnéticos

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I \qquad \text{(A)},} \tag{5-63}$$

donde C es el contorno (trayectoria cerrada) que limita la superficie S, e I es la corriente libre total que pasa a través de S. Las direcciones relativas de C y el flujo de corriente I siguen la regla de la mano derecha. La ecuación (5-63) es otra forma de la ***ley circuital de Ampère***, válida en medios magnéticos y no magnéticos. Establece que ***la circulación de la intensidad de campo magnético alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a la corriente libre que fluye a través de la superficie limitada por la trayectoria.***

Cuando las propiedades magnéticas del medio son *lineales* e *isótropas*, la magnetización es directamente proporcional a la intensidad de campo magnético

Definición de la susceptibilidad magnética

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{5-64}$$

donde χ_m es una cantidad sin dimensiones llamada ***susceptibilidad magnética***. Al sustituir la ecuación (5-64) en la ecuación (5-60) se obtiene la siguiente relación constitutiva:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \\ &= \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \qquad (\text{Wb/m}^2), \end{aligned}} \tag{5-65}$$

o

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \qquad \text{(A/m)},} \tag{5-66}$$

donde

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}} \tag{5-67}$$

Permeabilidad relativa y permeabilidad absoluta de un medio

es otra cantidad sin dimensiones conocida como ***permeabilidad relativa*** del medio. El parámetro $\mu = \mu_0\mu_r$ es la ***permeabilidad absoluta*** (en ocasiones simplemente ***permeabilidad***) del medio y se mide en H/m; χ_m y, por consiguiente, μ_r pueden ser funciones de las coordenadas espaciales. En el caso de un medio simple (lineal, isótropo y homogéneo), χ_m y μ_r son constantes.

Definición de un medio simple

La permeabilidad de la mayoría de los materiales es muy cercana a la del espacio libre (μ_0). En el caso de materiales ferromagnéticos como hierro, níquel y cobalto, μ_r puede ser muy grande (50-5000 y hasta 10^6 o más en aleaciones especiales); la permeabilidad no sólo depende de la magnitud de $\mathbf{H}$ sino además de la historia previa del material. En la sección 5-8 se presentan algunos análisis cualitativos del comportamiento macroscópico de los materiales magnéticos.

5-8 COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES MAGNÉTICOS

En la ecuación (5-64) de la sección anterior describimos la propiedad magnética macroscópica de un medio lineal e isótropo definiendo la susceptibilidad magnética χ_m, un coeficiente de proporcionalidad sin dimensiones entre la magnetización **M** y la intensidad de campo magnético **H**. La permeabilidad relativa, μ_r, es simplemente $1 + \chi_m$. Los materiales magnéticos pueden clasificarse de manera general en tres grupos principales de acuerdo con sus valores de μ_r. Se dice que un material es

Los tres tipos de materiales magnéticos

Diamagnético, si $\mu_r \lesssim 1$ (χ_m es un número negativo muy pequeño).

Paramagnético, si $\mu_r \gtrsim 1$ (χ_m es un número positivo muy pequeño).

Ferromagnético, si $\mu_r \gg 1$ (χ_m es un número positivo grande).

Para comprender con detalle los fenómenos magnéticos microscópicos se requieren conocimientos de la teoría cuántica. Aquí sólo diremos que el diamagnetismo se debe principalmente al movimiento orbital de los electrones en el átomo, mientras que el paramagnetismo se debe sobre todo a los momentos dipolares magnéticos de los electrones giratorios. La susceptibilidad magnética de la mayoría de los materiales *diamagnéticos* conocidos (cobre, germanio, plata, oro) es del orden de -10^{-5} y la de los materiales *paramagnéticos*, como aluminio, magnesio, titanio y tungsteno, es del orden de 10^{-5}.

La magnetización de los materiales *ferromagnéticos* puede ser varios órdenes de magnitud mayor que la de las sustancias paramagnéticas. (Véase el apéndice B-5 para conocer los valores típicos de la permeabilidad relativa.)

El ***ferromagnetismo*** puede explicarse en función de ***dominios*** magnetizados. De acuerdo con este modelo, que se ha confirmado experimentalmente, un material ferromagnético (como cobalto, níquel o hierro) está compuesto por varios dominios pequeños, cuyas dimensiones lineales van de unas cuantas micras a aproximadamente 1 mm. Estos dominios, que contienen cerca de 10^{15} o 10^{16} átomos, están totalmente magnetizados, en el sentido de que contienen dipolos magnéticos alineados como resultado de los electrones giratorios, incluso en ausencia de un campo magnético aplicado. La teoría cuántica establece la existencia de poderosas fuerzas de acoplamiento entre los momentos dipolares magnéticos de los átomos en un dominio, manteniendo los momentos dipolares en paralelo. Entre dominios adyacentes hay una región de transición de unos 100 átomos de espesor, llamada ***pared de dominio***. En un estado no magnetizado, los momentos magnéticos de los dominios adyacentes de un material ferromagnético tienen direcciones diferentes, como lo ilustra el espécimen policristalino de la figura 5-11. Si se contempla como un todo, la naturaleza aleatoria de las orientaciones en los diversos dominios no produce una magnetización neta.

Cuando se aplica un campo magnético externo a un material ferromagnético, las paredes de aquellos dominios que tienen momentos magnéticos alineados con el campo aplicado se mueven de manera tal que los volúmenes de estos dominios crecen a expensas de los otros dominios. Como resultado, aumenta la densidad de flujo

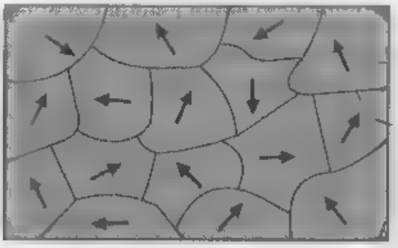
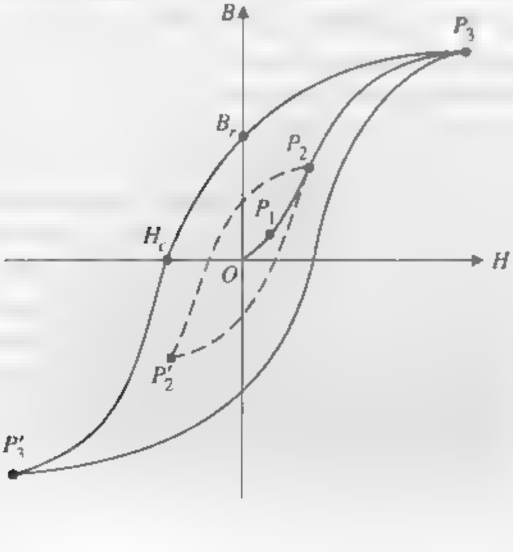


FIGURA 5-11 Estructura de dominios de una muestra ferromagnética policristalina.

magnético. Los movimientos de las paredes de los dominios son reversibles en el caso de la aplicación de un campo débil, digamos hasta cierto punto P_1 en la curva de magnetización B–H de la figura 5-12. Sin embargo, si el campo aplicado es más fuerte (superior al punto P_1), los movimientos de las paredes de los dominios ya no son reversibles y se se produce también una orientación del dominio en la dirección del campo aplicado. Por ejemplo, si un campo aplicado se reduce a cero en el punto P_2, la relación B-H ya no sigue la curva continua P_2P_1O, sino pasará de P_2 a P'_2 por la curva punteada de la figura. Este fenómeno de retardo de la magnetización con respecto al campo que la produce se denomina ***histéresis***, término derivado de una palabra griega que significa "ir detrás". Si el campo aplicado es más fuerte (por encima de P_2, hasta P_3), el movimiento de la pared de dominio y la rotación del dominio ocasionarán, en esencia, una alineación total de los momentos magnéticos microscópicos con respecto al campo aplicado, diciéndose que en este punto el material magnético ha llegado a la *saturación*. La curva $OP_1P_2P_3$ en el plano B-H se denomina ***curva de magnetización normal***.

Fenómeno de histéresis

FIGURA 5-12 Curvas de histeresis en el plano B-H de un material magnético.



Si el campo magnético aplicado se reduce a cero desde el valor en P_3, la densidad de flujo magnético no se reduce a cero sino que toma el valor en B_r. Este valor se denomina ***densidad de flujo residual*** o ***remanente*** (en Wb/m^2) y depende de la máxima intensidad de campo aplicado. La existencia de una densidad de flujo remanente en un material ferromagnético hace posible los imanes permanentes.

Los imanes permanentes tienen una densidad de flujo remanente.

Para hacer nula la densidad de flujo magnético en un espécimen, es necesario aplicar una intensidad de campo magnético H_c en la dirección opuesta. Esta H_c requerida se denomina *fuerza coercitiva*, pero un nombre más apropiado es ***intensidad de campo coercitivo*** (en A/m). Al igual que B_r, H_c también depende del máximo valor de la intensidad de flujo magnético aplicado.

Los materiales ferromagnéticos utilizados en generadores eléctricos, motores y transformadores deben tener una magnetización muy grande para un campo muy pequeño aplicado y deben tener curvas de histéresis altas y estrechas. Conforme la intensidad del campo magnético aplicado varía periódicamente entre $\pm \boldsymbol{H}_{max}$, se sigue la curva de histéresis una vez por ciclo. El área de la curva de histéresis corresponde a la pérdida de energía (***pérdida por histéresis***) por unidad de volumen en un ciclo. La pérdida por histéresis es la energía perdida en forma de calor para superar la fricción que se presenta durante el movimiento de paredes de los dominios y la rotación de los dominios. Los materiales ferromagnéticos, que tienen curvas de histéresis altas y estrechas con área pequeña, se conocen como materiales "suaves", normalmente son materiales recocidos con pocas dislocaciones e impurezas, lo que facilita el movimiento de las paredes de los dominios.

Pérdida por histéresis

Materiales ferromagnéticos "duros" y "suaves"

Por otra parte, los buenos imanes permanentes deben presentar gran resistencia a la desmagnetización (o desimanación). Para esto se requiere que estén hechos con materiales que tengan altas intensidades de campo coercitivo H_c y, por consiguiente, curvas de histéresis más anchas. Estos materiales se conocen como materiales ferromagnéticos "duros". La intensidad de campo coercitivo de los materiales ferromagnéticos duros (como las aleaciones de aluminio, níquel y cobalto) puede ser de 10^5 (A/m) o mayor, mientras que en los materiales suaves es de unos 50 (A/m) o menor.

Los dominios magnetizados se desorganizan si elevamos la temperatura de un material ferromagnético hasta el punto donde la energía térmica excede la energía de acoplamiento de los momentos dipolares magnéticos. Por encima de esta temperatura crítica, conocida como ***temperatura de Curie***, un material ferromagnético se comporta como una sustancia paramagnética. La temperatura de Curie de la mayoría de los materiales ferromagnéticos está entre unos cientos y mil grados celsius; la del hierro es de 770°C.

Definición de la temperatura de Curie

Características de las ferritas

Las ferritas corresponden a otra clase de materiales magnéticos. Algunas ferritas son compuestos de tipo cerámico con conductividades muy bajas (por ejemplo, 10^{-4} a 1 (S/m), en comparación con 10^7 (S/m) para el hierro). La baja conductividad limita las pérdidas por corrientes parásitas a altas frecuencias. Es por esto que las ferritas son comunes en aplicaciones de alta frecuencia y microondas, como núcleos para antenas de FM, transformadores de alta frecuencia y cambiadores de fase. Las ferritas también tienen una amplia gama de aplicaciones en los dispositivos de memoria de núcleo magnético y disco magnético de computadores.

5-9 CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA CAMPOS MAGNETOSTÁTICOS

Para resolver problemas relacionados con campos magnéticos en regiones con medios que tienen propiedades físicas diferentes, es necesario estudiar las condiciones (en la frontera) que deben satisfacer los vectores **B** y **H** en las superficies de separación de los distintos medios. Si empleamos técnicas similares a las que se usaron en la sección 3-8 para obtener las condiciones en la frontera de campos electrostáticos, podemos derivar las condiciones en la frontera magnetostáticas aplicando las dos ecuaciones fundamentales (Ecs. (5-6) y (5-61)) a una pequeña caja cilíndrica y a una pequeña trayectoria cerrada, respectivamente, que incluyen la superficie de separación. A partir de la divergencia nula del campo **B** expresada en la ecuación (5-6), podemos llegar directamente a la conclusión de que, al igual que en la ecuación (4-34), ***la componente normal de* B *es continua a través de una superficie de separación;*** es decir,

La componente normal de B es continua a través de la superficie de separación.

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n} \qquad (\mathrm{T}).} \tag{5-68}$$

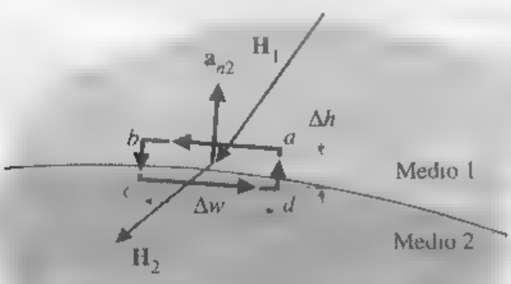
En el caso de materiales lineales e isótropos, $\mathbf{B}_1 = \mu_1\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{B}_2 = \mu_2\mathbf{H}_2$, y la ecuación (5-68) se convierte en

$$\boxed{\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.} \tag{5-69}$$

La componente tangencial de un campo magnético no será continua si hay una corriente superficial por la superficie de separación. Podemos derivar una condición en la frontera de las componentes tangenciales de **H** aplicando la ecuación (5-63) a una trayectoria cerrada *abcda* en la superficie de separación de dos medios, como se ilustra en la figura 5-13. Al dejar que los lados $bc = da = \Delta h$ se aproximen a cero, tenemos

$$\int_{abcda} \mathbf{H}_l \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{w} + \mathbf{H}_2 \cdot (-\Delta\mathbf{w}) = J_{sn},$$

FIGURA 5-13 Trayectoria cerrada a través de la superficie de separación entre dos medios para la condición en la frontera de H_t.



o

$$\boxed{H_{1t} - H_{2t} = J_{sn} \qquad \text{(A/m)},} \tag{5-70}$$

donde J_{sn} es la densidad superficial de corriente en la superficie de separación normal al contorno *abcda*. La dirección de J_{sn} es la del dedo pulgar cuando los dedos de la mano derecha siguen la dirección de la trayectoria. La dirección positiva de J_{sn} para la trayectoria elegida es hacia afuera del papel en la figura 5-13. La forma más general de la ecuación (5-70) es

Condición en la frontera para la componente tangencial de H

$$\boxed{\mathbf{a}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \qquad \text{(A/m)},} \tag{5-71}$$

donde $\mathbf{a}_{n2}$ es la *normal unitaria hacia afuera del medio 2* en la superficie de separación.

Cuando las conductividades de ambos medios son finitas, las corrientes vienen dadas por las densidades de corriente de volumen y las corrientes libres superficiales no están definidas en la superficie de separación. Por lo tanto, $\mathbf{J}_s$ es igual a cero y ***la componente tangencial de* H *es continua a través de la frontera de casi todos los medios físicos; es discontinua únicamente cuando se supone la superficie de separación con un conductor ideal perfecto o con un superconductor.*** De esta manera, para los campos magnetostáticos normalmente tenemos

$$\boxed{\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}.} \tag{5-72}$$

■ **EJERCICIO 5.7** La intensidad de campo magnético $\mathbf{H}_1$ en un medio 1 con permeabilidad μ_1 forma un ángulo α_1 con la normal a la superficie se separación con un medio 2 que tiene permeabilidad μ_2. Determine la relación entre el ángulo α_2 (que forma $\mathbf{H}_2$ con la normal) y α_1.

RESPUESTA: $\tan \alpha_2/\tan \alpha_1 = \mu_2/\mu_1$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.5-13 Defina el *vector de magnetización*. ¿Cuál es su unidad en el SI?

P.5-14 ¿Qué quiere decir "densidades de corriente equivalentes de magnetización"? ¿Cuáles son las unidades en el SI de $\nabla \times \mathbf{M}$ y $\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$?

P.5-15 Defina el *vector de intensidad de campo magnético*. ¿Cuál es su unidad en el SI?

P.5-16 Escriba las dos ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen la magnetostática.

P.5-17 Defina la *susceptibilidad magnética* y la *permeabilidad magnética*. ¿Cuáles son sus unidades en el SI?

P.5-18 ¿La intensidad de campo magnético debida a una distribución de corriente depende de las propiedades del medio? ¿Y la densidad de flujo magnético?

P.5-19 Defina los materiales *diamagnéticos, paramagnéticos* y *ferromagnéticos*.

P.5-20 ¿Qué es una curva de histéresis?

P.5-21 Defina la *densidad de flujo remanente* y la *intensidad de campo coercitivo*

P.5-22 Analice la diferencia entre los materiales ferromagnéticos duros y suaves

P.5-23 ¿Qué es la *temperatura de Curie*?

P.5-24 ¿Cuáles son las condiciones en la frontera de los campos magnetostáticos en la superficie de separación entre dos medios magnéticos diferentes?

COMENTARIOS

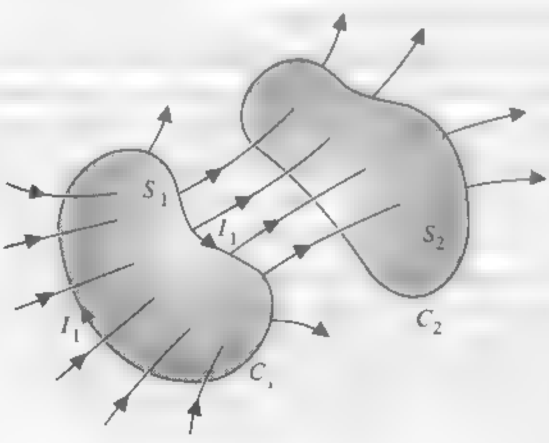
1. Los imanes permanentes cilíndricos con magnetización uniforme son como láminas cilíndricas con corriente superficial circunferencial constante.
2. No confunda la permeabilidad relativa, μ_r, de un medio con su permeabilidad (absoluta) μ. μ_r equivale a $1 + \chi_m$ y es una cantidad sin dimensiones, mientras que la unidad en el SI de μ es (H/m).
3. μ_r puede considerarse como la unidad en los materiales no ferromagnéticos. Los materiales ferromagnéticos (níquel, cobalto, hierro y sus aleaciones) tienen una μ_r muy grande y no son lineales (**B** no es proporcional a **H**)

5-10 INDUCTANCIAS E INDUCTORES

Considere dos espiras cerradas cercanas, C_1 y C_2, que limitan las superficies S_1 y S_2, respectivamente, como se ilustra en la figura 5-14. Si fluye una corriente I_1 en C_1 se creará un campo magnético $\mathbf{B}_1$ Parte del flujo magnético ocasionado por $\mathbf{B}_1$ estará ligada a C_2, es decir, pasará a través de la superficie S_2 limitada por C_2. Designemos este flujo mutuo con Φ_{12}. Tenemos

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \qquad \text{(Wb)}. \tag{5-73}$$

FIGURA 5-14 Dos espiras acopladas magnéticamente.



A partir de la ley de Biot-Savart (Ec. (5-31)), vemos que B_1 es directamente proporcional a I_1; por lo tanto, Φ_{12} también es proporcional a I_1. Escribimos

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1, \tag{5-74}$$

donde la constante de proporcionalidad L_{12} se denomina ***inductancia mutua***† entre las espiras C_1 y C_2, con unidad en el SI de henry (H). En este caso, C_2 tiene N_2 vueltas y el ***flujo ligado*** Λ_{12} debido a Φ_{12} es

$$\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12} \qquad \text{(Wb)}. \tag{5-75}$$

La ecuación (5-74) se generaliza como

$$\Lambda_{12} = L_{12} I_1 \qquad \text{(Wb)}, \tag{5-76}$$

o

$$\boxed{L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \qquad \text{(H)}.} \tag{5-77}$$

Inductancia mutua

*La **inductancia mutua entre dos circuitos** es el flujo magnético ligado con un circuito por unidad de corriente en el otro.* En la ecuación (5-77) está implícito que la permeabilidad del medio no cambia con I_1. En otras palabras, la ecuación (5-74) y, por consiguiente, la ecuación (5-77) sólo son aplicables a medios *lineales*

Una parte del flujo magnético producido por I_1 está ligado únicamente a C_1 y no a C_2. El flujo total ligado a C_1 causado por I_1 es

$$\Lambda_{11} = N_1 \Phi_{11} > N_1 \Phi_{12}. \tag{5-78}$$

Autoinductancia

*La **autoinductancia** del circuito C_1 se define como el flujo ligado magnético por unidad de corriente en el propio circuito*, es decir,

$$\boxed{L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 \qquad \text{(H)},} \tag{5-79}$$

para un medio lineal. La autoinductancia de una espira o de un circuito depende de la forma geométrica y la disposición física del conductor que constituye la espira o el circuito, así como de la permeabilidad del medio. En el caso de un medio lineal, la autoinductancia no depende de la corriente en la espira o en el circuito.

Un conductor dispuesto en la forma adecuada (como un alambre conductor enrollado formando una bobina) para proporcionar cierta cantidad de autoinductancia se conoce como ***inductor***. Así como un condensador puede almacenar energía eléctrica, un inductor puede almacenar energía magnética, como veremos en la sección 5-11

† En los libros de teoría de circuitos se usa con frecuencia el símbolo M para denotar la inductancia mutua Aquí usaremos L_{12}, ya que hemos empleado M para la magnetización.

Cuando tratamos con una sola espira o una bobina no es necesario usar los subíndices de la ecuación (5-79) y la ***inductancia***, sin adjetivo, se considera como autoinductancia. El procedimiento para determinar la autoinductancia de un inductor es el siguiente:

Procedimiento para determinar la autoinductancia

1. Elija un sistema de coordenadas apropiado para la geometría dada.
2. Suponga una corriente I en el alambre conductor.
3. Determine $\mathbf{B}$ a partir de I usando la ley circuital de Ampère (Ec. (5-10)) si existe simetría; en caso contrario deberá usar la ley de Biot-Savart (Ec. (5-31)).
4. Encuentre el flujo ligado a cada vuelta, Φ, a partir de $\mathbf{B}$ mediante integración:

   $$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s},$$

   donde S es el área sobre la cual existe $\mathbf{B}$ y que está ligada a la corriente supuesta.
5. Determine el flujo ligado Λ multiplicando Φ por el número de vueltas
6. Determine L usando el cociente $L = \Lambda/I$.

Para determinar la inductancia mutua L_{12} entre dos circuitos solo se requiere una ligera modificación de este procedimiento. Tras elegir un sistema de coordenadas apropiado, continúe de la siguiente manera: Suponga $I_1 \rightarrow$ Encuentre $\mathbf{B}_1 \rightarrow$ Encuentre Φ_{12} integrando $\mathbf{B}_1$ sobre la superficie $S_2 \rightarrow$ Determine el flujo ligado $\Lambda_{12} = N_2\Phi_{12} \rightarrow$ Determine $L_{12} = \Lambda_{12}/I_1$.

EJEMPLO 5-8

Alrededor de un marco toroidal de sección transversal rectangular con las dimensiones presentadas en la figura 5-15 se enrollan muy juntas N vueltas de alambre. Suponiendo que la permeabilidad del medio es μ_0, determine la autoinductancia de la bobina toroidal.

SOLUCIÓN

Es evidente que el sistema de coordenadas cilíndricas es apropiado para este problema, ya que el toroide tiene simetría alrededor de su eje. Suponiendo una corriente I en el alambre conductor, al aplicar la ecuación (5-10) a la trayectoria circular con radio $r(a < r < b)$ hallamos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi B_\phi,$$

$$d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\phi r\, d\phi,$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} B_\phi r\, d\phi = 2\pi r B_\phi.$$

Se obtiene este resultado porque tanto B_ϕ como r son constantes alrededor de la trayectoria circular C. Puesto que la trayectoria encierra una corriente total NI, tenemos

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 NI$$

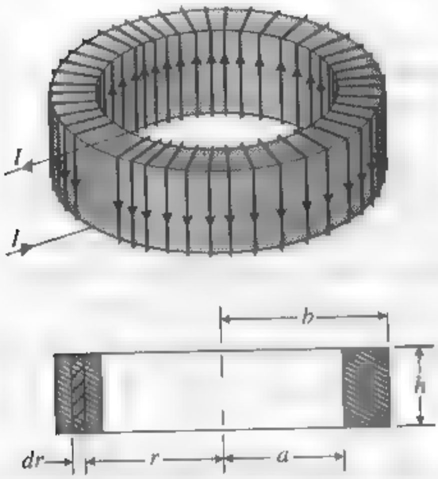


FIGURA 5-15 Bobina toroidal con vueltas enrolladas muy juntas (ejemplo 5-8)

y

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \tag{5-80}$$

que es lo mismo que la ecuación (5-13) del ejemplo 5-2 para una bobina toroidal con sección transversal circular.

Después encontramos

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right)\cdot(\mathbf{a}_\phi h\, dr)$$
$$= \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

El flujo ligado Λ es $N\Phi$ o

$$\Lambda = \frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Finalmente obtenemos

Inductancia de una bobina con N espiras enrolladas muy juntas

$$\boxed{L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad \text{(H).}} \tag{5-81}$$

Observamos que la autoinductancia no es una función de I (para un medio de permeabilidad constante) y que es proporcional al cuadrado del número de vueltas. El hecho de que las espiras estén enrolladas muy juntas es para minimizar el flujo ligado a cada espira individual.

EJEMPLO 5-9

Determine la inductancia por unidad de longitud de un solenoide muy largo con n vueltas por unidad de longitud. La permeabilidad del núcleo es μ.

SOLUCIÓN

La densidad de flujo magnético en un solenoide muy largo puede obtenerse a partir de la ecuación (5-80) si consideramos el solenoide como una bobina toroidal de radio infinito. En este caso, las dimensiones de la sección transversal del núcleo son muy pequeñas en comparación con el radio, y la densidad de flujo magnético en el solenoide es aproximadamente constante. A partir de la ecuación (5-80) tenemos

$$B = \mu\left(\frac{N}{2\pi r}\right)I = \mu n I, \tag{5-82}$$

donde n es el número de vueltas por unidad de longitud. Por lo tanto,

$$B = \mu n I,$$

que es constante en el solenoide. Por consiguiente,

$$\Phi = BS = \mu n S I, \tag{5-83}$$

donde S es la sección transversal del solenoide. El flujo ligado por unidad de longitud[†] es

$$\Lambda' = n\Phi = \mu n^2 S I. \tag{5-84}$$

Por consiguiente, la inductancia por unidad de longitud es

nductancia por unidad de longitud de un solenoide largo

$$\boxed{L' = \mu n^2 S \qquad \text{(H/m).}} \tag{5-85}$$

La ecuación (5-85) es una fórmula aproximada que se basa en la suposición de que la longitud del solenoide es mucho mayor que las dimensiones lineales de su sección transversal. Una derivación más precisa de la densidad de flujo magnético y del flujo ligado por unidad de longitud cerca de los extremos de un solenoide finito indicará que son menores que los valores obtenidos, respectivamente, con las ecuaciones (5-82) y (5-84). Por tanto, la inductancia total de un solenoide finito es algo menor que los valores de L', tal como se indica en la ecuación (5-85) multiplicado por la longitud.

EJEMPLO 5-10

Una línea de transmisión coaxial llena de aire tiene un conductor interior sólido de radio a y un conductor externo muy delgado de radio interior b. Determine la inductancia por unidad de longitud de la línea.

[†] Usamos una prima para indicar cantidades por unidad de longitud.

SOLUCIÓN

Remítase a la figura 5-16. Suponga que una corriente I fluye por el conductor interno y regresa en la dirección contraria por el conductor externo. **B** sólo tiene componente en f debido a la simetría cilíndrica. Suponga también que la corriente I se distribuye de manera uniforme por la sección transversal del conductor interno. Primero hallamos los valores de **B**.

a) *En el conductor interno,*

$0 \leq r \leq a.$

A partir de la ecuación (5-11),

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 1} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}. \tag{5-86}$$

b) *Entre los conductores interno y externo,*

$a < r < b.$

A partir de la ecuación (5-12),

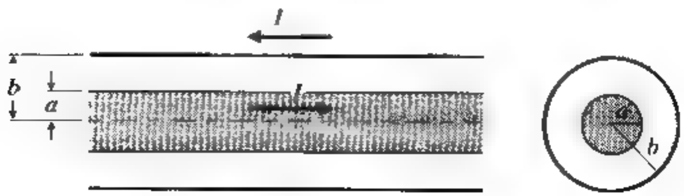
$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 2} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{5-87}$$

Considere ahora una región anular en el conductor interno, con radios r y $r + dr$ La corriente en una unidad de longitud de esta región anular está ligada al flujo que puede obtenerse al integrar las ecuaciones (5 86) y (5-87). Tenemos

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \int_r^a B_{\phi 1}\, dr + \int_a^b B_{\phi 2}\, dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\int_r^a r\, dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a^2 - r^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}. \end{aligned} \tag{5-88}$$

Pero la corriente en la región anular es sólo una fracción ($2\pi r\, dr/\pi a^2 = 2r\, dr/a^2$) de la corriente total I. Por ello, el flujo ligado a esta región anular es

FIGURA 5-16 Dos vistas de una línea de transmisión coaxial (ejemplo 5-10).



$$d\Lambda' = \frac{2r\,dr}{a^2}\,d\Phi'. \tag{5-89}$$

El flujo total ligado por unidad de longitud es

$$\begin{aligned}\Lambda' &= \int_{r=0}^{r=a} d\Lambda' \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\left[\frac{1}{2a^2}\int_0^a (a^2 - r^2)r\,dr + \left(\ln\frac{b}{a}\right)\int_0^a r\,dr\right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right).\end{aligned}$$

La inductancia de una unidad de longitud de la línea de transmisión coaxial es entonces

Inductancia por unidad de longitud de una línea de transmisión coaxial

$$\boxed{L' = \frac{\Lambda'}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad \text{(H/m)}.} \tag{5-90}$$

El primer término, $\mu_0/8\pi$, proviene del flujo ligado interno al conductor interno sólido, se conoce como ***inductancia interna*** por unidad de longitud del conductor interno. El segundo término proviene del flujo ligado que existe entre el conductor interno y el externo; este término se conoce como ***inductancia externa*** por unidad de longitud de la línea coaxial. El término $\mu_0/8\pi$ no existiría si el conductor interno fuera un tubo hueco delgado; únicamente habría inductancia externa.

EJEMPLO 5-11

Calcule las inductancias interna y externa por unidad de longitud de una línea de transmisión que consiste en dos largos alambres conductores paralelos de radio a que transportan corrientes en direcciones opuestas. Los ejes de los alambres están separados por una distancia d mucho mayor que a.

SOLUCIÓN

La autoinductancia interna por unidad de longitud de cada alambre es $\mu_0/8\pi$, con base en la ecuación (5-90). Para dos alambres tenemos entonces

$$L'_i = 2 \times \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \qquad \text{(H/m)}. \tag{5-91}$$

Para hallar la autoinductancia externa por unidad de longitud, primero se calcula el flujo magnético ligado con una unidad de longitud de la línea de transmisión para una corriente supuesta I en los alambres. En el plano xz donde se encuentran los dos

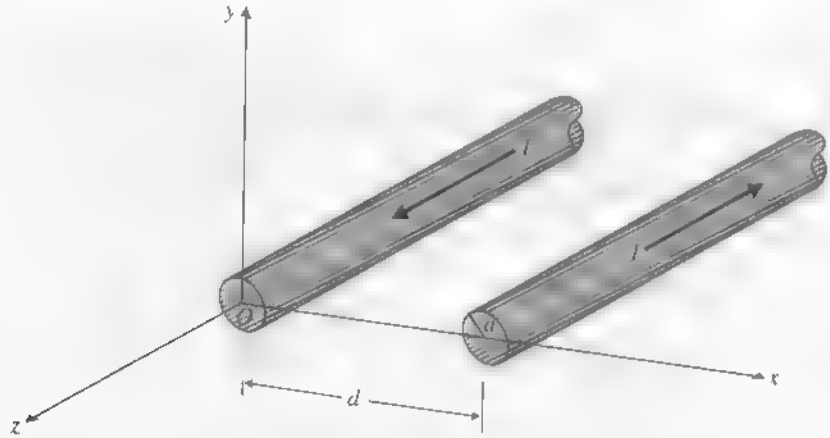


FIGURA 5-17 Línea de transmisión de dos alambres (ejemplo 5-11).

alambres, como en la figura 5-17, los vectores **B** producidos por las corrientes iguales y opuestas en los dos alambres únicamente tienen componente en y

$$B_{y1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \tag{5-92}$$

$$B_{y2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}. \tag{5-93}$$

El flujo ligado por unidad de longitud es entonces

$$\begin{aligned}\Phi' &= \int_a^{d-a} (B_{y1} + B_{y2})\, dx \\ &= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right] dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) \cong \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln\frac{d}{a} \qquad \text{(Wb/m).}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L'_e = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\frac{d}{a} \qquad \text{(H/m)}, \tag{5-94}$$

y la autoinductancia total por unidad de longitud de la línea de dos alambres es

Inductancia por unidad de longitud de una línea de transmisión de alambres paralelos

$$\boxed{L' = L'_i + L'_e = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{a}\right) \qquad \text{(H/m).}} \tag{5-95}$$

Podemos demostrar de manera formal que la inductancia mutua L_{12} entre dos circuitos C_1 y C_2, obtenida a partir del flujo magnético que liga C_2 por una unidad de corriente en C_1, es igual que la inductancia mutua L_{21} obtenida a partir del flujo magnético que liga C_1 por una unidad de corriente en C_2; es decir, $L_{12} = L_{21}$. Por lo tanto, como primer paso al trabajar en un problema de determinación de la inductancia mutua, debemos examinar la geometría del problema y aprovechar la más sencilla de las dos formas.

EJEMPLO 5-12

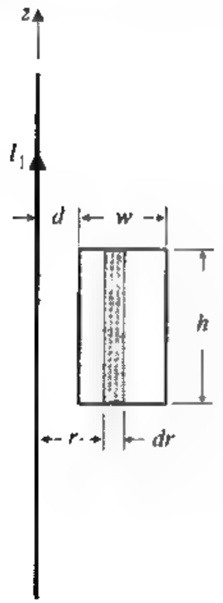
Determine la inductancia mutua entre una espira rectangular conductora y un alambre recto muy largo, como se ilustra en la figura 5-18.

SOLUCIÓN

Podemos ver en este problema que es bastante sencillo suponer una corriente en el largo alambre recto, escribir la densidad de flujo magnético y encontrar el flujo ligado a la espira rectangular. Sin embargo, sería más complicado hallar la densidad de flujo magnético y el flujo ligado al alambre recto debido a una corriente supuesta en la espira rectangular.

Designemos el largo alambre recto como circuito 1 y la espira rectangular como circuito 2. La densidad de flujo magnético $\mathbf{B}_1$ debido a la corriente I en el alambre es, al aplicar la ley circuital de Ampère,

FIGURA 5-18 Espira rectangular conductora y alambre recto largo (ejemplo 5-12)



$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \tag{5-96}$$

El flujo ligado $\Lambda_{12} = \Phi_{12}$ es

$$\Lambda_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2, \tag{5-97}$$

donde $d\mathbf{s}_2 = \mathbf{a}_\phi h\, dr$. Al combinar las ecuaciones (5-96) y (5-97) se obtiene

$$\begin{aligned}\Lambda_{12} &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} h \int_d^{d+w} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 h I_1}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{d}\right).\end{aligned} \tag{5-98}$$

Por lo tanto, la inductancia mutua es

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{d}\right) \qquad \text{(H)}. \tag{5-99}$$

5-11 ENERGÍA MAGNÉTICA

Hasta ahora hemos analizado la autoinductancia y la inductancia mutua en términos estáticos. Sin embargo, sabemos que los inductores sin resistencia aparecen como cortocircuitos para las corrientes estacionarias (continuas); es evidente la necesidad de considerar corrientes alternas cuando nos interesan los efectos de las inductancias sobre circuitos y campos magnéticos. Pospondremos hasta el próximo capítulo el tratamiento general de los campos electromagnéticos variables en el tiempo (electrodinámica).

En la sección 3-10 analizamos el hecho de que se requiere trabajo para formar un grupo de cargas y que este trabajo se almacena como energía eléctrica. Es de esperar que también se requiera trabajo para enviar corrientes en espiras conductoras y que éste se almacene como energía magnética. Considere una espira cerrada con autoinductancia L_1 en la cual la corriente inicialmente es cero. Se conecta a la espira un generador de corriente que aumenta la corriente i_1 de cero a I_1. Basándonos en nuestros conocimientos de física sabemos que se inducirá un fuerza electromotriz (fem) en la espira que se opone al cambio en corriente. Hay que realizar cierto trabajo para superar esta fuerza electromotriz. Sea $v_1 = L_1 di_1/dt$ el voltaje en la inductancia. El trabajo requerido es

$$W_1 = \int v_1 i_1\, dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1\, di_1 = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2. \tag{5-100}$$

que se almacena como *energía magnética*.

Considere ahora dos espiras cerradas C_1 y C_2 por las que circulan corrientes i_1 e i_2, respectivamente. Las corrientes al principio son cero y se incrementarán a I_1 e I_2, respectivamente. Para hallar la cantidad de trabajo requerida, primero mantenemos $i_2 = 0$ y aumentamos i_1 de cero a I_1. Para esto se requiere un trabajo W_1 en la espira C_1, dado por la ecuación (5-100); no se realiza ningún trabajo en la espira C_2, ya que $i_2 = 0$. Después mantenemos i_1 en I_1 y aumentamos i_2 de cero a I_2. Debido al acoplamiento mutuo, parte del flujo magnético ocasionado por i_2 estará ligado a la espira C_1, dando lugar a una fuerza electromotriz inducida que debe ser superada por un voltaje $v_{21} = \pm L_{21} di_2/dt$ para mantener i_1 constante en su valor de I_1. El trabajo que esto implica es

$$W_{21} = \int v_{21} I_1 \, dt = \pm L_{21} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = \pm L_{21} I_1 I_2. \tag{5-101}$$

El signo positivo es aplicable en la ecuación (5-101) si I_1 e I_2 en C_1 y C_2 son tales que sus campos magnéticos se refuerzan entre sí; se aplica el signo negativo si sus campos magnéticos se oponen uno a otro.

Al mismo tiempo hay que efectuar un trabajo W_{22} en la espira C_2 para contrarrestar la fuerza electromagnética inducida al aumentar i_2 de 0 a I_2

$$W_{22} = \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2. \tag{5-102}$$

La cantidad total de trabajo que hay que realizar para aumentar de cero a I_1 e I_2 las corrientes en las espiras C_1 y C_2, respectivamente, es entonces la suma de W_1, W_{21} y W_{22}

Energía magnética almacenada en dos espiras acopladas por las que circulan corrientes

$$\boxed{W_2 = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 \pm L_{21} I_1 I_2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2,} \tag{5-103}$$

que es la energía almacenada en el campo magnético de las dos espiras acopladas por las que circulan corrientes.

En el caso de una corriente I que fluye por un inductor con inductancia L, la energía magnética almacenada es

Energía magnética almacenada en una inductancia

$$\boxed{W_m = \tfrac{1}{2} L I^2 \qquad \text{(J).}} \tag{5-104}$$

■ **EJERCICIO 5.8** Exprese la energía magnética almacenada en términos del flujo ligado Φ y de la corriente I en un inductor con inductancia L.

RESPUESTA: $\Phi I/2$.

5-11.1 ENERGÍA MAGNÉTICA EN TÉRMINOS DE CANTIDADES DE CAMPO

Cuando analizamos la energía electrostática en la subsección 3-10.1, vimos que era conveniente expresar W_e en términos de las cantidades de campo **E** y **D**, como se hizo en las ecuaciones (3-105) y (3-106). Basándonos en el trabajo que hemos realizado

hasta ahora, observamos las siguientes relaciones análogas entre las cantidades en la electrostática y aquellas en la magnetostática:

Electrostática	Magnetostática
E	**B**
D	**H**
ϵ	$1/\mu$

Resulta que podemos escribir la energía magnética W_m en un medio lineal en términos de **B** y **H**, usando la ecuación (3-105) y la analogía anterior. De esta manera,

Energía magnética en términos de B y H

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv \qquad \text{(J)}.} \tag{5-105}$$

Si empleamos la relación constitutiva $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ de un medio lineal, podemos escribir

Energía magnética en términos de B y μ

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_{V'} \frac{B^2}{\mu}\,dv \qquad \text{(J)}.} \tag{5-106}$$

No incluiremos aquí una derivación formal aparte de las ecuaciones (5-105) y (5-106). Veremos de nuevo las energías eléctrica y magnética en la sección 7-5, cuando analicemos el flujo de la potencia electromagnética.

Si definimos una ***densidad de energía magnética***, w_m, tal que su integral de volumen sea igual a la energía magnética total

$$W_m = \int_{V'} w_m\,dv, \tag{5-107}$$

podemos escribir w_m como

$$w_m = \tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \qquad (\text{J/m}^3), \tag{5-108a}$$

o

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (\text{J/m}^3). \tag{5-108b}$$

Si usamos la ecuación (5-104) junto con la ecuación (5-105) o la ecuación (5-106), muchas veces podemos determinar la autoinductancia de manera más fácil a partir de la energía magnética almacenada, calculada en términos de **B** o **H**, en lugar de usar el flujo ligado. Tenemos

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2} \qquad \text{(H)}.} \tag{5-109}$$

EJEMPLO 5-13

Use la energía magnética almacenada para determinar la inductancia por unidad de longitud de una línea de transmisión coaxial llena de aire que tiene un conductor interno sólido de radio a y un conductor externo muy delgado de radio b.

SOLUCIÓN

Éste es el mismo problema que se presentó en el ejemplo 5-10, donde determinamos la autoinductancia considerando los flujos ligados. Remítase de nuevo a la figura 5-16. Suponga que fluye una corriente uniforme I por el conductor interno y que regresa por el conductor externo. La energía magnética por unidad de longitud almacenada en el conductor interno es, a partir de las ecuaciones (5-86) y (5-106),

$$\begin{aligned} W'_{m1} &= \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a B_{\phi 1}^2 2\pi r\,dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4}\int_0^a r^3\,dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \qquad \text{(J/m)}. \end{aligned} \tag{5-110}$$

La energía magnética por unidad de longitud almacenada en la región entre los conductores interno y externo es, con base en las ecuaciones (5-87) y (5-106),

$$\begin{aligned} W'_{m2} &= \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b B_{\phi 2}^2 2\pi r\,dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\int_a^b \frac{1}{r}\,dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad \text{(J/m)}. \end{aligned} \tag{5-111}$$

Por consiguiente, con la ecuación (5-109) tenemos

$$\begin{aligned} L' &= \frac{2}{I^2}(W'_{m1} + W'_{m2}) \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad \text{(H/m)}, \end{aligned} \tag{5-112}$$

lo mismo que en la ecuación (5-90). El procedimiento empleado en esta solución es comparativamente mas sencillo que el utilizado en el ejemplo 5-10.

■ **EJERCICIO 5.9** Una corriente I fluye por la bobina toroidal de N vueltas de la figura 5-15

a) Obtenga una expresión para la energía magnética almacenada.

b) Use la ecuación (5-109) para determinar su autoinductancia y compruebe su resultado usando la ecuación (5-81).

RESPUESTA: (a) $[\mu_0(NI)^2 h \ln(b/a)]/4\pi$ (J).

PREGUNTAS DE REPASO

P.5-25 Defina (a) la inductancia mutua entre dos circuitos y (b) la autoinductancia de una bobina.

P.5-26 ¿Qué significa la inductancia interna de un conductor?

P.5-27 Escriba la expresión para la energía magnética almacenada de dos espiras acopladas por las que circulan corrientes.

P.5-28 Escriba la expresión para la energía magnética almacenada en términos de las cantidades de campo.

COMENTARIOS

1. La autoinductancia de las bobinas solenoidales y toroidales devanadas con alambre es proporcional al *cuadrado* del número de vueltas.
2. La inductancia interna de los tubos conductores delgados y rectos es aproximadamente cero; para los conductores sólidos, rectos, no ferromagnéticos, es $\mu_0/8\pi$ (H/m).
3. La inductancia mutua entre dos circuitos acoplados tiene la propiedad de que $L_{12} = L_{21}$.
4. La consideración de inductancias implica necesariamente corrientes alternas (ca), ya que para corriente continua (cc) los inductores sin resistencia se comportan como cortocircuitos.
5. A frecuencias muy altas, la distribución de corriente en los conductores no es muy uniforme y tiende a concentrarse en la superficie (debido al *efecto de penetración*, el cual analizaremos en el capítulo 7). Este fenómeno debe considerarse en los cálculos de inductancia.

5-12 FUERZAS Y PARES MAGNÉTICOS

Previamente señalamos que una carga q que se mueve con velocidad **u** en un campo magnético con densidad de flujo **B** experimenta una fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ indicada por la ecuación (5-4), la cual se repite a continuación:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \qquad \text{(N)}. \tag{5-113}$$

En esta sección analizaremos varios aspectos de las fuerzas y los pares en circuitos que transportan corriente en campos magnéticos estáticos.

5-12.1 FUERZAS Y PARES SOBRE CONDUCTORES POR LOS QUE CIRCULAN CORRIENTES

Consideremos un elemento de un conductor $d\ell$ con sección transversal S. Si hay N portadores de carga (electrones) por unidad de volumen que se mueven a una velocidad **u** en la dirección de $d\ell$, la fuerza magnética sobre el elemento diferencial es, de acuerdo con la ecuación (5-113),

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_m &= -NeS|d\boldsymbol{\ell}|\mathbf{u} \times \mathbf{B} \\ &= -NeS|\mathbf{u}|\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{5-114}$$

donde e es la carga electrónica. Las dos expresiones en la ecuación (5-114) son equivalentes, ya que $\mathbf{u}$ y $d\boldsymbol{\ell}$ tienen la misma dirección. Ahora, puesto que $-NeS|\mathbf{u}|$ es igual a la corriente en el conductor, podemos escribir la ecuación (5-114) como

$$\boxed{d\mathbf{F}_m = I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \qquad \text{(N).}} \tag{5-115}$$

La fuerza magnética sobre un circuito completo (cerrado) de contorno C por el que circula una corriente I en un campo magnético $\mathbf{B}$ es entonces

Fuerza magnética sobre un circuito por el que circula una corriente en un campo magnético

$$\boxed{\mathbf{F}_m = I \oint_C d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \qquad \text{(N).}} \tag{5-116}$$

Cuando hay dos circuitos por los que circulan corrientes I_1 e I_2, respectivamente, la situación es análoga a la de un circuito por el que circula una corriente en el campo magnético creado por el otro. En presencia de un flujo magnético $\mathbf{B}_{12}$, ocasionado por la corriente I_1 en C_1, la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ sobre el circuito C_2 puede escribirse como

$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \oint_{C_2} d\boldsymbol{\ell}_2 \times \mathbf{B}_{12}, \tag{5-117a}$$

donde $\mathbf{B}_{12}$ es, a partir de la ley de Biot-Savart (Ec. 5-31),

$$\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{\ell}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2}. \tag{5-117b}$$

Al combinar las ecuaciones (5-117a) y (5-117b) se obtiene

Ley de la fuerza de Ampère entre dos circuitos por los que circulan [redacted]

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 I_1 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{\ell}_2 \times (d\boldsymbol{\ell}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}})}{R_{12}^2} \qquad \text{(N),}} \tag{5-118}$$

que es la ***ley de la fuerza de Ampère*** entre dos circuitos por los que circulan corrientes. Es una relación proporcional al inverso del cuadrado y debe compararse con la ley de la fuerza de Coulomb de la ecuación (3-13) entre dos cargas estacionarias. Vemos que la fórmula de fuerza de dos circuitos por los que circulan corrientes es mucho más complicada que la de dos cargas estacionarias. Para el cálculo práctico conviene dividir la impresionante ecuación (5-118) en los dos pasos representados por las ecuaciones (5-117a) y (5-117b).

La fuerza $\mathbf{F}_{21}$ sobre un circuito C_1, debida al flujo magnético ocasionado por la corriente I_2 en C_2, se obtiene también a partir de la ecuación (5-118) con sólo intercambiar 1 y 2 en los subíndices. La tercera ley de Newton, que rige la acción y la reacción, asegura que $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

EJEMPLO 5-14

Determine la fuerza por unidad de longitud entre dos alambres conductores planos, paralelos e infinitamente largos por los que circulan corrientes I_1 e I_2 en la misma dirección. Los alambres están separados una distancia d.

SOLUCIÓN

Consideremos que los alambres se encuentran en el plano yz y designemos el alambre de la izquierda como el circuito 1, como se ilustra en la figura 5-19. Este problema es una aplicación directa de la ecuación (5-117a). Si usamos $\mathbf{F}'_{12}$ para designar la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre 2, tenemos

$$\mathbf{F}'_{12} = I_2(\mathbf{a}_z \times \mathbf{B}_{12}), \tag{5-119}$$

donde $\mathbf{B}_{12}$, la densidad de flujo magnético en el alambre 2, establecido por la corriente I_1 en el alambre 1, es constante sobre el alambre 2. No es necesario usar la ecuación (5-117b) para determinar $\mathbf{B}_{12}$, pues se supone que los alambres son infinitamente largos y existe simetría cilíndrica. Aplicamos la ley circuital de Ampère y escribimos, con base en la ecuación (5-12),

$$\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{a}_x \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}. \tag{5-120}$$

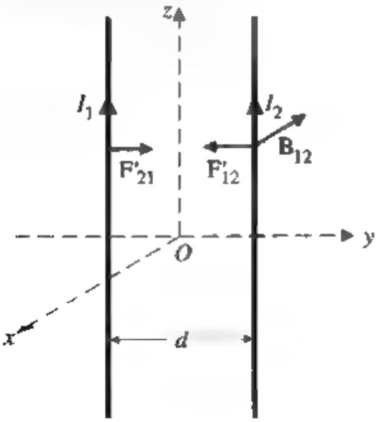
Al sustituir la ecuación (5-120) en la ecuación (5-119) se obtiene

$$\mathbf{F}'_{12} = -\mathbf{a}_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \qquad \text{(N/m)}. \tag{5-121}$$

Fuerza de atracción (repulsión) entre dos alambres por los que circulan corrientes en el mismo sentido (en sentidos opuestos)

Vemos que la fuerza sobre el alambre 2 lo atrae hacia el alambre 1. Por lo tanto, la fuerza entre dos alambres por los que circulan *corrientes en la misma dirección* es una fuerza de *atracción* (a diferencia de la fuerza entre dos cargas de la misma polaridad, que es de repulsión).

FIGURA 5-19 Fuerza entre dos alambres paralelos por los que circulan corrientes (ejemplo 5-14).



■ **EJERCICIO 5.10** Suponga que una corriente I_2 fluye por la espira rectangular de la figura 5-18 en el sentido de las agujas del reloj. Determine la fuerza neta sobre la espira.

RESPUESTA: $-\mathbf{a}_y\mu_0 I_1 I_2 hw/2\pi d(d+w)$.

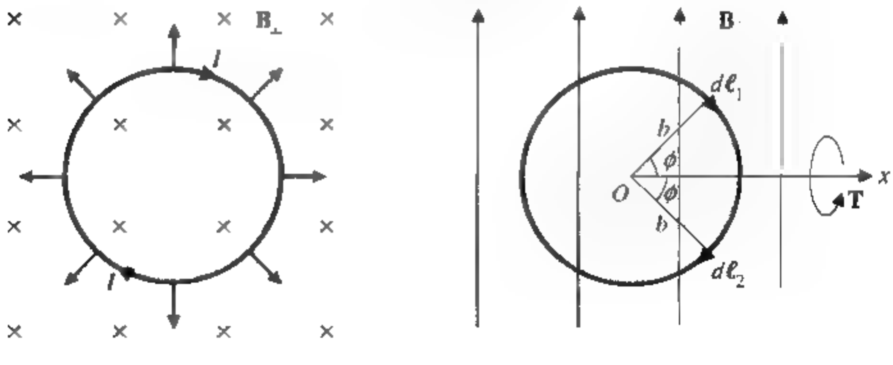
Consideremos ahora una pequeña espira circular de radio b por la que circula una corriente I en un campo magnético uniforme de densidad $\mathbf{B}$. Es conveniente separar $\mathbf{B}$ en dos componentes, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$, donde $\mathbf{B}_\perp$ y $\mathbf{B}_\parallel$ son perpendicular y paralela al plano de la espira, respectivamente. Como se ilustra en la figura 5-20(a), la componente perpendicular $\mathbf{B}_\perp$ tiende a expandir la espira (o a contraerla si se invierte la dirección de I), pero no ejerce fuerza neta para mover la espira. La componente paralela $\mathbf{B}_\parallel$ produce una fuerza $d\mathbf{F}_1$ hacia arriba (hacia fuera del papel) sobre el elemento $d\ell_1$ y una hacia abajo (hacia dentro del papel) $d\mathbf{F}_2 = -d\mathbf{F}_1$ en el elemento simétricamente localizado $d\ell_2$, como se ilustra en la figura 5-20(b). Aunque la fuerza neta que produce $\mathbf{B}_\parallel$ sobre toda la espira también es nula, existe un par que tiende a girar la espira sobre el eje x, de manera que se *alínea* el campo magnético (producido por I) con el campo $\mathbf{B}_\parallel$ externo. El par diferencial producido por $d\mathbf{F}_1$ y $d\mathbf{F}_2$ es

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= \mathbf{a}_x(dF)2b \operatorname{sen}\phi \\ &= \mathbf{a}_x(I\,d\ell\,B_\parallel \operatorname{sen}\phi)2b\operatorname{sen}\phi \\ &= \mathbf{a}_x 2Ib^2 B_\parallel \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi, \end{aligned} \tag{5-122}$$

donde $dF = |d\mathbf{F}_1| = |d\mathbf{F}_2|$ y $d\ell = |d\ell_1| = |d\ell_2| = b\,d\phi$. El par total que actúa sobre la espira es

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int d\mathbf{T} = \mathbf{a}_x 2Ib^2 B_\parallel \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi \\ &= \mathbf{a}_x I(\pi b^2)B_\parallel . \end{aligned} \tag{5-123}$$

FIGURA 5-20 Espira circular en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$.



(a) (b)

Si usamos la definición del momento dipolar magnético de la ecuación (5-45),

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_n I(\pi b^2) = \mathbf{a}_n IS,$$

donde $\mathbf{a}_n$ es un vector unidad en la dirección del dedo pulgar derecho (normal al plano de la espira) cuando los dedos de la mano derecha siguen la dirección de la corriente, podemos escribir la ecuación (5-123) como

Par experimentado por un circuito por el que circula una corriente en un campo magnético

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad (\mathrm{N \cdot m}).} \tag{5-124}$$

En la ecuación (5-124) se usa el vector $\mathbf{B}$ (en lugar de $\mathbf{B}_{\|}$) porque $\mathbf{m} \times (\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_{\|}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\|}$. Éste es el par que alínea los dipolos magnéticos microscópicos en los materiales magnéticos y hace que los materiales se magneticen al aplicar un campo magnético. Debemos recordar que la ecuación (5-124) no es válida si $\mathbf{B}$ no es uniforme sobre toda la espira por la que circula corriente.

EJEMPLO 5-15

Por una espira rectangular en el plano xy, con lados b_1 y b_2, circula una corriente I. La espira está en un campo magnético *uniforme* $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$. Determine la fuerza y el par sobre la espira.

SOLUCIÓN

Al descomponer $\mathbf{B}$ en sus componentes perpendicular y paralela $\mathbf{B}_{\perp}$ y $\mathbf{B}_{\|}$, tenemos

$$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{a}_z B_z; \tag{5-125a}$$

$$\mathbf{B}_{\|} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y. \tag{5-125b}$$

Suponiendo que la corriente fluye en dirección de las agujas del reloj, como se muestra en la figura 5-21, encontramos que la componente perpendicular $\mathbf{a}_z B_z$ produce fuerzas Ib_1B_z en los lados (1) y (3) y fuerzas Ib_2B_z en los lados (2) y (4), todas dirigidas hacia el centro de la espira. La suma vectorial de estas cuatro fuerzas que tienden a contraer la espira es cero y no se produce par.

La componente paralela de la densidad de flujo magnético, $\mathbf{B}_{\|}$, produce las siguientes fuerzas en los cuatro lados:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= Ib_1\mathbf{a}_x \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y) \\ &= \mathbf{a}_z Ib_1 B_y = -\mathbf{F}_3; \end{aligned} \tag{5-126a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= Ib_2(-\mathbf{a}_y) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y) \\ &= \mathbf{a}_z Ib_2 B_x = -\mathbf{F}_4. \end{aligned} \tag{5-126b}$$

Una vez más, la fuerza neta sobre la espira, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$, es cero. Sin embargo, estas fuerzas dan lugar a un par neto que puede calcularse como sigue. El par $\mathbf{T}_{13}$ ocasionado por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ en los lados (1) y (3) es

$$\mathbf{T}_{13} = \mathbf{a}_x Ib_1 b_2 B_y; \tag{5-127a}$$

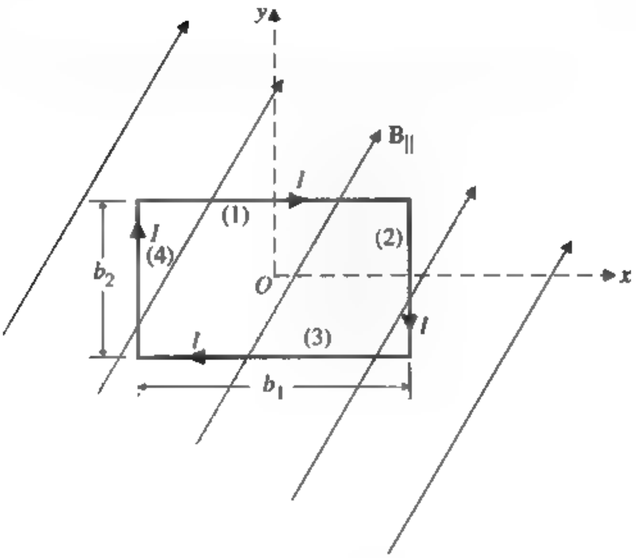


FIGURA 5-21 Espira rectangular en un campo magnético uniforme (ejemplo 5-15)

el par $\mathbf{T}_{24}$ producido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_4$ en los lados (2) y (4) es

$$\mathbf{T}_{24} = -\mathbf{a}_y I b_1 b_2 B_x. \tag{5-127b}$$

El par total sobre la espira rectangular es entonces

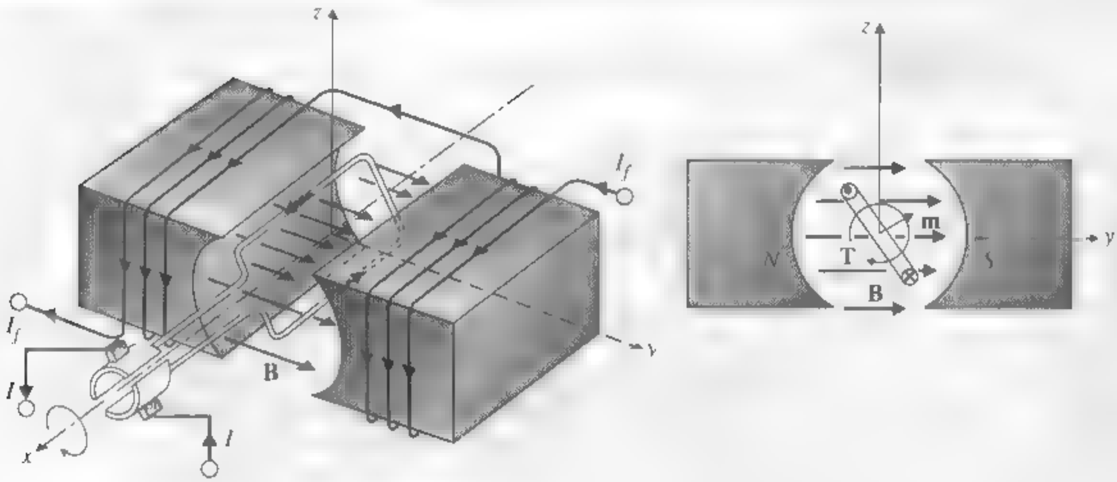
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{13} + \mathbf{T}_{24} = I b_1 b_2 (\mathbf{a}_x B_y - \mathbf{a}_y B_x) \qquad (\text{N}\cdot\text{m}). \tag{5-128}$$

Puesto que el momento magnético de la espira es $\mathbf{m} = -\mathbf{a}_z I b_1 b_2$, el resultado de la ecuación (5-128) es exactamente $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Pese al hecho de que la ecuación (5-124) se haya derivado para una espira circular, la fórmula del par es válida también para una espira rectangular. De hecho, podemos demostrar que la ecuación (5-124) es aplicable a una espira plana de cualquier forma, siempre y cuando esté inmersa en un campo magnético uniforme.

5-12.2 MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA

Principio de funcionamiento de los motores de corriente continua

El principio de operación de los motores de corriente continua (cc) se basa en la ecuación (5-124). En la figura 5-22(a) se muestra el diagrama esquemático de uno de estos motores. El campo magnético $\mathbf{B}$ es producido por una corriente de campo I_f en un devanado alrededor de las piezas de los polos. Al enviar una corriente I por la espira rectangular, se produce un par que hace que la espira gire en dirección de las agujas del reloj desde la perspectiva de la dirección $+x$; esto se ilustra en la figura 5-22(b). Se requiere un anillo partido con escobillas para que las corrientes en las dos partes de la bobina inviertan su dirección cada medio giro y el par $\mathbf{T}$ se mantenga siempre



(a) Vista en perspectiva. (b) Vista esquemática desde la dirección +x.

FIGURA 5-22 Ilustración del principio de funcionamiento de un motor de corriente continua.

en la misma dirección; el momento magnético **m** de la espira debe tener una componente z positiva.

Para lograr una operación regular y eficiente, un motor cc real tiene muchas de estas espiras rectangulares devanadas y distribuidas alrededor de una armadura con núcleo ferromagnético. Los extremos de las espiras se unen a un par de barras conductoras dispuestas sobre un pequeño tambor cilíndrico llamado ***conmutador***. El conmutador tiene doble número de barras conductoras paralelas aisladas entre sí que de espiras.

5-12.3 FUERZAS Y PARES EN TÉRMINOS DE LA ENERGÍA MAGNÉTICA ALMACENADA

Todos los conductores y circuitos por los que circulan corrientes experimentan fuerzas magnéticas cuando se sitúan en un campo magnético. Sólo se mantienen en su lugar si existen fuerzas mecánicas iguales y opuestas a las fuerzas magnéticas. Con la excepción de casos simétricos especiales (como el caso de los dos largos alambres conductores paralelos infinitamente largos por los que circulan corrientes en el ejemplo 5-14), es muy tedioso usar la ley de la fuerza de Ampère para determinar las fuerzas magnéticas entre circuitos por los que circulan corrientes. Veremos ahora un método alternativo para hallar las fuerzas magnéticas y los pares basándonos en el ***principio de desplazamiento virtual***. Usamos este principio en la subsección 3-10.2 para determinar las fuerzas electrostáticas entre conductores cargados.

Si suponemos que el desplazamiento diferencial virtual $d\ell$ de uno de los circuitos por los que circulan corrientes no produce cambios en los flujos ligados, no habrá fuerzas electromagnéticas inducidas y las fuentes no suministrarán energía al sistema. El trabajo mecánico $\mathbf{F}_\Phi \cdot d\ell$ realizado *por el sistema* es a expensas de una reducción

en la energía magnética W_m almacenada. Aquí $\mathbf{F}_\Phi$ denota la fuerza en la condición de flujo constante. Tenemos

$$\mathbf{F}_\Phi \cdot d\boldsymbol{\ell} = -dW_m = -(\nabla W_m)\cdot d\boldsymbol{\ell}, \tag{5-129}$$

de lo cual se desprende que

Determinación de la fuerza magnética sobre un circuito por el que circula una corriente, usando el método de desplazamiento virtual

$$\boxed{\mathbf{F}_\Phi = -\nabla W_m \qquad \text{(N).}} \tag{5-130}$$

La ecuación vectorial (5-130) es en realidad tres ecuaciones en el espacio tridimensional. Por ejemplo, la fuerza en la dirección x en coordenadas cartesianas es

$$(F_\Phi)_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x}. \tag{5-131}$$

Pueden obtenerse expresiones similares para las otras direcciones.

Si el circuito está restringido a girar sobre un eje, digamos el eje z, el trabajo mecánico realizado por el sistema será $(T_\Phi)_z d\phi$ y

Par alrededor de un eje dado sobre un circuito por el que circula una corriente en un campo magnético, usando el método de desplazamiento virtual

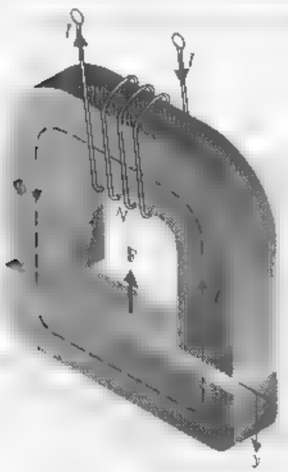
$$\boxed{(T_\Phi)_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \phi} \qquad \text{(N}\cdot\text{m),}} \tag{5-132}$$

que es la componente z del par que actúa sobre el circuito en la condición de flujos ligados constantes.

EJEMPLO 5-16

Considere el electroimán de la figura 5-23, donde una corriente I en una bobina de N vueltas produce un flujo Φ en el circuito magnético. La sección transversal del nucleo es S. Determine la fuerza hacia arriba sobre la armadura.

FIGURA 5-23 Electroimán (ejemplo 5-16).



SOLUCIÓN

Dejemos que la armadura realice un desplazamiento virtual dy (un incremento diferencial en y) y ajustemos la fuente de manera que el flujo Φ permanezca constante. Un desplazamiento de la armadura únicamente cambia la longitud de los entrehierros; por consiguiente, el desplazamiento sólo cambia la energía magnética almacenada en los dos entrehierros. A partir de la ecuación (5-106) tenemos

$$\begin{aligned} dW_m = d(W_m)_{\text{entrehierro}} &= 2\left(\frac{B^2}{2\mu_0} S\, dy\right) \\ &= \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}\, dy. \end{aligned} \tag{5-133}$$

Un incremento en la longitud del entrehierro (dy positivo) aumenta la energía magnética almacenada si Φ es constante. Usamos la ecuación (5-130) para obtener la fuerza en la dirección y:

$$\mathbf{F}_\Phi = \mathbf{a}_y (F_\Phi)_y = \mathbf{a}_y\left(-\frac{\partial W_m}{\partial y}\right) = -\mathbf{a}_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} \qquad \text{(N)}. \tag{5-134}$$

El signo negativo indica que la fuerza tiende a reducir la longitud del entrehierro, es decir, se trata de una fuerza de atracción.

PREGUNTAS DE REPASO

P.5-29 Proporcione la expresión integral de la fuerza sobre un circuito cerrado por el que circula una corriente I en un campo magnético $\mathbf{B}$.

P.5-30 Escriba la fórmula que expresa el par sobre un circuito por el que circula una corriente en un campo magnético.

P.5-31 Explique el principio de operación de los motores de corriente continua.

P.5-32 ¿Cuál es la relación entre la fuerza y la energía magnética almacenada en un sistema de circuitos por los que circulan corrientes en la condición de flujos ligados constantes?

COMENTARIOS

1. La fuerza magnética entre dos alambres por los que circulan corrientes será de *atracción* si las corrientes tienen la *misma* dirección y de *repulsión* si las corrientes van en direcciones *opuestas*.
2. El par sobre una espira por la que circula una corriente (incluyendo los dipolos magnéticos microscópicos) es en una dirección que tiende a *alinear* el momento magnético de la espira con el campo magnético aplicado.
3. La fórmula del par $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ sólo es aplicable si el campo magnético externo es *uniforme* sobre la espira por la que circula la corriente.

RESUMEN

Una carga en movimiento en una región donde existen campos electricos y magnéticos experimenta una fuerza eléctrica y una fuerza magnética. La fuerza electromagnética total está dada por la ecuación de la fuerza de Lorentz. Tras presentar la fórmula de la fuerza magnética sobre una carga en movimiento en un campo magnético,

- presentamos los dos postulados fundamentales de la magnetostática en el espacio libre, que especifican la divergencia y el rotacional de **B**;
- obtuvimos la ley circuital de Ampère, la cual nos permitió determinar la densidad de flujo magnético debida a una distribución de corriente en condiciones de simetría;
- presentamos el concepto del potencial magnético vector;
- derivamos la ley de Biot-Savart para determinar el campo **B** debido a una corriente que fluye por una trayectoria cerrada;
- analizamos el efecto microscópico de los momentos dipolares inducidos, hallando las densidades de corriente equivalente de magnetización;
- definimos la intensidad de campo magnético, **H**, y la permeabilidad relativa,
- comparamos el comportamiento de distintos materiales magnéticos,
- encontramos las condiciones en la frontera de los campos magnéticos estáticos,
- definimos la autoinductancia y la inductancia mutua y explicamos el procedimiento para su determinación;
- encontramos la fórmula de la energía magnética almacenada,
- analizamos las fuerzas y los pares sobre circuitos por los que circulan corrientes en campos magnéticos, y
- explicamos el principio de funcionamiento de los motores de corriente continua.

PROBLEMAS

P.5-1 Una carga puntual Q con velocidad $\mathbf{u} = \mathbf{a}_x u_0$ entra en una región donde existe un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$. ¿Cuál es el campo **E** que debe existir en la región para que la carga prosiga sin cambio de velocidad?

P.5-2 Encuentre el flujo magnético total a través de un toroide circular con sección transversal rectangular de altura h. Los radios interior y exterior del toroide son a y b, respectivamente. Una corriente I fluye en N vueltas de alambre devanado alrededor del toroide. Determine el porcentaje de error si el flujo se obtiene multiplicando la sección transversal por la densidad de flujo en el radio medio ¿Cuál es el error si $b/a = 5$?

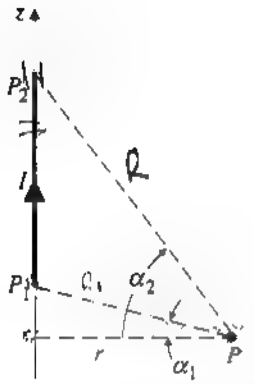


FIGURA 5-24 Conductor recto finito por el que circula una corriente I (Prob. P.5-3).

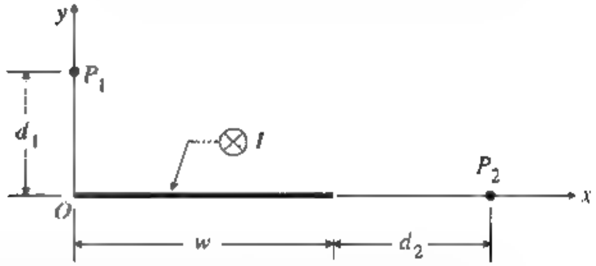


FIGURA 5-25 Lámina conductora delgada por la que circula una corriente I (Probs. P.5-4 y P.5-5).

P.5-3 Una corriente continua I fluye por un filamento conductor recto P_1P_2

a) Demuestre que **B** en el punto P, cuya ubicación está especificada por la distancia perpendicular r y los dos ángulos α_1 y α_2 mostrados en la figura 5-24, es

$$\mathbf{B}_P = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu I}{4\pi r}(\text{sen}\,\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1). \tag{5-135}$$

b) Compruebe que la ecuación (5-135) se reduce a la ecuación (5-35) cuando el alambre es infinitamente largo.

P.5-4 Una corriente I fluye longitudinalmente por una lámina conductora delgada y muy larga de anchura w, como se ilustra en la figura 5-25. Suponga que la corriente fluye hacia el interior del papel y determine la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}_1$ en el punto $P_1(0, d)$.

P.5-5 Remítase al problema P.5-4 y a la figura 5-25. Determine la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}_2$ en el punto $P_2(w + d_2, 0)$.

P.5-6 Por el conductor interno de una línea coaxial infinitamente larga fluye una corriente I y regresa por el conductor externo. El radio del conductor interno es a y los radios interior y exterior del conductor externo son b y c, respectivamente. Determine la densidad de flujo magnético **B** en todas las regiones y represente gráficamente $|\mathbf{B}|$ en función de r.

P.5-7 Un alambre conductor delgado de longitud $3w$ forma un triángulo equilátero planar. Por el alambre fluye una corriente continua I. Determine la densidad de flujo magnético en el centro del triángulo.

P.5-8 Remítase a la figura 5-26. Determine la densidad de flujo magnético en el punto P del eje de un solenoide de radio b y longitud L, con una corriente I en las N vueltas, enrolladas muy juntas, de su bobina. Demuestre que el resultado se reduce al de la ecuación (5-82) cuando L se aproxima al infinito. *Sugerencia:* Use la ecuación (5-37).

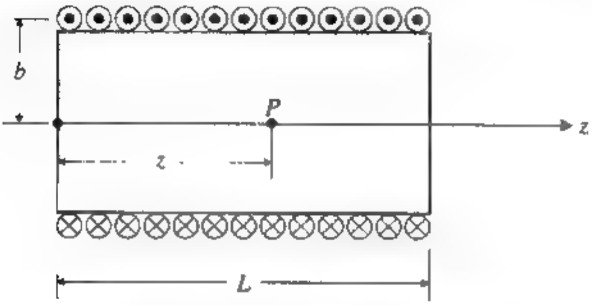


FIGURA 5-26 Solenoide con sección transversal circular (Prob. P.5-8)

P.5-9 Una corriente continua I fluye por un alambre infinitamente largo de radio 2 (mm) sobre el eje z.

a) Obtenga el potencial magnético vector **A** en $r > 2$ (mm) a partir de la expresión de **B** de la ecuación (5-12). Elija la superficie del alambre como punto de referencia de potencial cero.

b) Si $I = 10$ (A), determine a partir de **A** la cantidad total de flujo magnético que pasa por una espira cuadrada especificada por $z = \pm 0.3$ (m) y $r = 0.1$ (m) y 0.7 (m).

P.5-10 Una corriente superficial continua de densidad $\mathbf{a}_x J_{s0}$ fluye por una lámina conductora infinita que coincide con el plano xy.

a) Determine la densidad de flujo magnético **B** en $(0, 0, z)$ y $(0, 0, -z)$.

b) Determine el potencial magnético vector **A** en $(0, 0, z)$ a partir de **B**. Elija como potencial de referencia cero un punto arbitrario $z = z_0$.

P.5-11 Un bloque muy grande de material de espesor d yace perpendicularmente a un campo magnético uniforme de intensidad $\mathbf{H}_0 = \mathbf{a}_z H_0$. Ignore el efecto marginal y determine la intensidad de campo magnético en el bloque.

a) si el material del bloque tiene permeabilidad m, y

b) si el bloque es un imán permanente con vector de magnetización $\mathbf{M}_i = \mathbf{a}_z M_i$.

P.5-12 Se introduce coaxialmente una varilla circular de material magnético con permeabilidad μ en un solenoide muy largo lleno de aire. El radio de la varilla, a, es menor que el radio interior, b, del solenoide. El devanado del solenoide tiene n vueltas por unidad de longitud y por él circula una corriente I.

a) Encuentre los valores de **B**, **H** y **M** en el solenoide para $r < a$ y $a < r < b$.

b) ¿Cuáles son las densidades de corriente de magnetización equivalentes $\mathbf{J}_{mv}$ y $\mathbf{J}_{ms}$ de la varilla magnetizada?

P.5-13 Una esfera ferromagnética de radio b se magnetiza de manera uniforme con una magnetización $\mathbf{M} = \mathbf{a}_z M_0$.

a) Determine las densidades de corriente de magnetización equivalentes $\mathbf{J}_{mv}$ y $\mathbf{J}_{ms}$.

b) Determine la densidad de flujo magnético en el centro de la esfera

P.5-14 Considere un plano frontera ($y = 0$) entre el aire (región 1, $\mu_{r1} = 1$) y el hierro (región 2, $\mu_{r2} = 5000$).

a) Suponiendo $\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 10$ (mT), encuentre $\mathbf{B}_2$ y el ángulo que forma $\mathbf{B}_2$ con la superficie de separación de ambos medios.

b) Suponiendo $\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_x 10 + \mathbf{a}_y 2$ (mT), encuentre $\mathbf{B}_1$ y el ángulo que forma con la normal a la superficie de separación.

P.5-15 Determine la autoinductancia de una bobina toroidal con N vueltas de alambre devanado alrededor de un marco de aire con radio medio r_o y sección transversal circular de radio b. Obtenga una expresión aproximada suponiendo $b \ll r_o$.

P.5-16 Determine la inductancia mutua entre un alambre recto muy largo y una espira conductora con forma de triángulo equilátero, como se ilustra en la figura 5-27.

P.5-17 Determine la inductancia mutua entre dos espiras rectangulares coplanares con lados paralelos, como se muestra en la figura 5-28. Suponga que $h_1 \gg h_2$ ($h_2 > w_2 > d$).

P.5-18 Calcule la fuerza por unidad de longitud sobre cada uno de los tres alambres paralelos equidistantes, infinitamente largos, que están a 10 (cm) de distancia, por cada uno de los cuales circula una corriente de 25 (A) en la misma dirección. En la figura 5-29 se presenta un corte transversal de esta disposición. Especifique la dirección de la fuerza.

P.5-19 En la figura 5-30 se muestra el corte transversal de una tira de metal larga y delgada y un alambre paralelo. Por los conductores fluyen corrientes I iguales y opuestas. Calcule la fuerza por unidad de longitud en los conductores.

P.5-20 La barra AA' de la figura 5-31 sirve como camino conductor (como la cuchilla de un cortacircuitos) para la corriente I en las dos largas líneas paralelas. Las líneas

FIGURA 5-27 Alambre largo y recto y espira conductora con forma de triángulo equilátero (Prob. P.5-16).

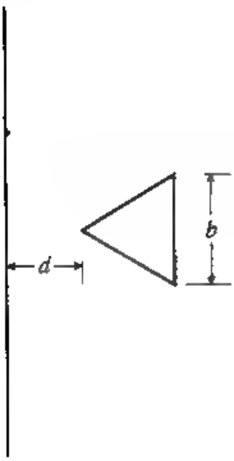


FIGURA 5-28 Dos espiras rectangulares coplanares, $h_1 \gg h_2$ (Prob. P.5-17).

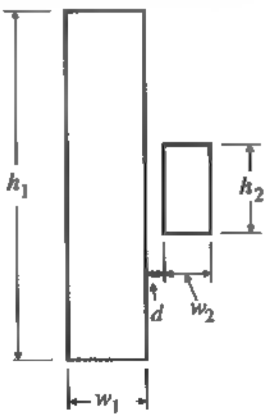
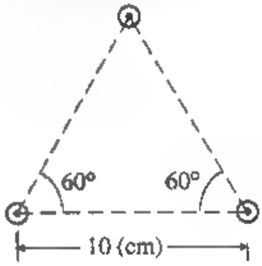


FIGURA 5-29 Tres alambres equidistantes, infinitamente largos, por los que circulan corrientes (Prob. P.5-18).



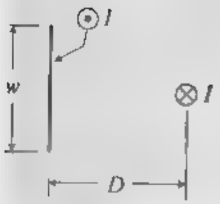


FIGURA 5-30 Corte transversal de una tira paralela y un alambre conductor (Prob P 5-19).

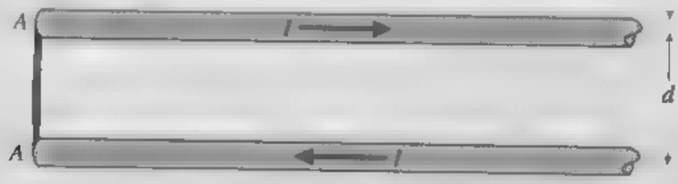


FIGURA 5-31 Fuerza sobre el extremo de una barra conductora (Prob P 5-20)

tienen radio b y están separadas por una distancia d. Determine la dirección y la magnitud de la fuerza magnética sobre la barra.

P.5-21 Una corriente continua $I = 10$ (A) fluye por una espira triangular en el plano xy, como se muestra en la figura 5-32. Suponga una densidad de flujo magnético $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y 6$ (mT) en la región y determine las fuerzas y el par sobre la espira. Las dimensiones están en (cm).

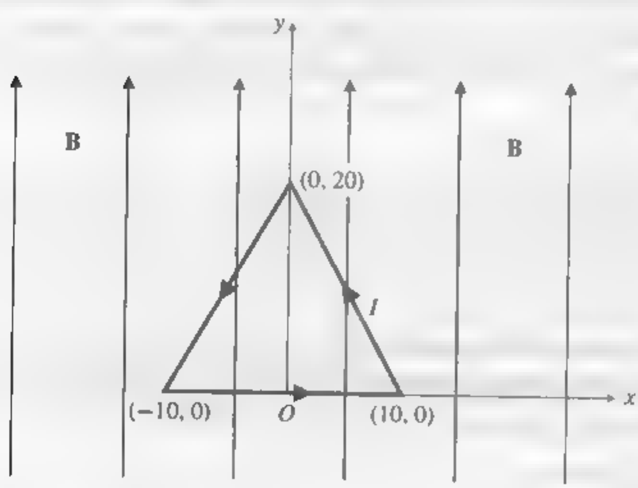


FIGURA 5-32 Espira triangular en un campo magnético uniforme (Prob P 5-21)

P.5-22 Una espira circular de alambre de radio r_1 por donde circula una corriente estacionaria I_1 se coloca en el centro de otra espira mucho mayor de alambre, de radio r_2 ($r_2 \gg r_1$), por la que circula una corriente estacionaria I_2 en la misma dirección. El ángulo entre las normales de los dos circuitos es θ y la espira circular pequeña puede girar libremente sobre su diámetro. Determine la magnitud y la dirección del par sobre la espira circular pequeña.

CAPÍTULO 6

6-1 DESCRIPCIÓN GENERAL Hasta ahora sólo hemos visto campos que no cambian con el tiempo Al construir el modelo electrostático definimos un vector de intensidad de campo eléctrico, **E**, y un vector de densidad de flujo eléctrico (desplazamiento eléctrico), **D**. Las ecuaciones fundamentales son

Ecuaciones fundamentales que rigen el modelo electrostático

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \qquad (3\text{-}4)(6\text{-}1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v. \qquad (3\text{-}63)(6\text{-}2)$$

En el caso de medios lineales e isótropos (aunque no necesariamente homogéneos), **E** y **D** están relacionados por la relación constitutiva

Relación constitutiva para el modelo eléctrico

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \qquad (3\text{-}67)(6\text{-}3)$$

Para el modelo magnetostático definimos un vector de densidad de flujo magnético, **B**, y un vector de intensidad de campo magnético, **H**. Las ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen este modelo son

Ecuaciones fundamentales que rigen el modelo magnetostático

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (5\text{-}6)(6\text{-}4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \qquad (5\text{-}61)(6\text{-}5)$$

La relación constitutiva para **B** y **H** en un medio lineal e isótropo es

Relación constitutiva para el modelo magnético

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}. \qquad (5\text{-}66)(6\text{-}6)$$

Observamos que **E** y **D** en el modelo electrostático no están relacionados con **B** y **H** en el modelo magnetostático. En un medio conductor pueden existir campos eléctricos y magnéticos estáticos y formar un ***campo electromagnetostático***. El campo

Campos variables con el tiempo y ecuaciones de Maxwell

Campo electromagnetostático

eléctrico estático en un medio conductor hace que fluya una corriente estacionaria, que a su vez produce un campo magnético estático. Sin embargo, es posible determinar completamente el campo eléctrico a partir de las cargas eléctricas estáticas o de las distribuciones de potencial. El campo magnético es una consecuencia, y no entra en el cálculo del campo eléctrico.

Los modelos estáticos son sencillos, pero inadecuados para explicar los fenómenos electromagnéticos variables con el tiempo Los campos eléctricos y magnéticos estáticos no producen ondas que se propagan y transportan energía e información. Las ondas son la esencia de la acción electromagnética a distancia En este capítulo veremos que un campo magnético variable induce un campo eléctrico y viceversa En condiciones variables con el tiempo es necesario construir un modelo electromagnético donde los vectores de campo eléctrico **E** y **D** estén correctamente relacionados con los vectores de campo magnético **B** y **H**.

Comenzaremos con un postulado fundamental que modifica la ecuación $\nabla \times \mathbf{E}$ (6-1) y da lugar a la ley de Faraday de la inducción electromagnética. Analizaremos los conceptos de la fuerza electromotriz estática y la fuerza electromotriz cinética. Con el nuevo postulado es necesario modificar también la ecuación $\nabla \times \mathbf{H}$ para que las ecuaciones fundamentales sean consistentes con la ley de la conservación de la carga Las dos ecuaciones de rotacional modificadas, junto con las dos ecuaciones de divergencia (6-2) y (6-4), se conocen como ecuaciones de Maxwell y son la base de la teoría electromagnética Las ecuaciones que rigen la electrostática y la magnetostática son formas especiales de las ecuaciones de Maxwell cuando todas las cantidades son

independientes del tiempo. Podemos combinar las ecuaciones de Maxwell para generar ecuaciones de onda que predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad de la luz. En este capítulo analizaremos las soluciones de las ecuaciones de ondas, en especial para los campos con dependencia armónica con el tiempo.

6-2 LEY DE FARADAY DE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Michael Faraday llevó a cabo uno de los mayores avances en la teoría electromagnética cuando en 1831 descubrió experimentalmente que se inducía una corriente en una espira conductora cuando cambiaba el flujo magnético que atravesaba la espira. La relación cuantitativa entre la fuerza electromotriz inducida y la razón de cambio del flujo ligado, basada en observaciones experimentales, se conoce como ***ley de Faraday***. Es una ley experimental y puede considerarse como un postulado. Sin embargo, no usaremos como punto de partida la relación experimental relacionada con una espira finita. En lugar de ello seguiremos el enfoque que usamos en el capítulo 3 para la electrostática y en el capítulo 5 para la magnetostática, enunciando un postulado fundamental y desarrollando a partir de éste las formas integrales de la ley de Faraday.

El postulado fundamental de la inducción electromagnética es

Postulado fundamental de la inducción electromagnética

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.} \tag{6-7}$$

La ecuación (6-7) representa una relación de funciones de punto; es decir, se aplica a todos los puntos en el espacio, ya sea éste el espacio libre o un medio material. *La intensidad de campo eléctrico en una región de densidad de flujo magnético variable con el tiempo es por consiguiente no conservativa y no puede expresarse como el gradiente negativo de un potencial escalar.*

El vector intensidad de campo eléctrico en un campo magnético variable con el tiempo no es conservativo.

Si tomamos la integral de superficie en ambos lados de la ecuación (6-7) sobre una superficie abierta y aplicamos el teorema de Stokes, obtenemos

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \tag{6-8}$$

La ecuación (6-8) es válida para cualquier superficie S limitada por el contorno C, exista o no un circuito físico alrededor de C. Por supuesto, en un campo sin variación temporal, $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ y las ecuaciones (6-7) y (6-8) se reducen a las ecuaciones (6-1) y (3-7), respectivamente, de la electrostática.

En las subsecciones siguientes analizaremos por separado los casos de un circuito estacionario en un campo magnético variable con el tiempo, un conductor moviéndose

en un campo magnético estático y un circuito móvil en un campo magnético variable con el tiempo.

6-2.1 CIRCUITO ESTACIONARIO EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE CON EL TIEMPO

Si tenemos un circuito estacionario con un contorno C y superficie S, la ecuación (6-8) puede escribirse como

$$\text{f.e.m.} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}. \qquad (6\text{-}9)$$

Si definimos

$$\mathcal{V} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \text{fem inducida en el circuito con contorno } C \qquad (\text{V}) \qquad (6\text{-}10)$$

y

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \text{flujo magnético que atraviesa la superficie } S \qquad (\text{Wb}), \qquad (6\text{-}11)$$

la ecuación (6-9) se convierte en

$$\boxed{\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (\text{V}).} \qquad (6\text{-}12)$$

Ley de Faraday de la inducción electromagnética

Ley de Lenz de la fuerza electromotriz estática

La ecuación (6-12) establece que ***la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado estacionario es igual a la razón negativa de incremento del flujo magnético ligado al circuito***. Éste es un enunciado de la ***ley de Faraday de la inducción electromagnética***. El signo negativo en la ecuación (6-12) afirma que la fuerza electromotriz inducida hará que fluya una corriente en el circuito cerrado, con dirección tal que se oponga al cambio del flujo magnético ligado. Esta afirmación se conoce como ***ley de Lenz***. La fuerza electromotriz inducida en un circuito estacionario ocasionado por un campo magnético variable con el tiempo es una ***fuerza electromotriz estática***.

EJEMPLO 6-1

Un circuito circular formado por N vueltas de alambre conductor está en el plano xy con el centro en el origen de un campo magnético especificado por $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0 \cos(\pi r/2b) \operatorname{sen} \omega t$, donde b es el radio del circuito y ω es la frecuencia angular. Determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito.

SOLUCIÓN

El problema especifica un circuito estacionario en un campo magnético variable con el tiempo; por lo tanto, podemos usar la ecuación (6-12) para hallar la fuerza electromotriz inducida, $\mathcal{V}$. El flujo magnético ligado a cada vuelta de circuito circular es

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$
$$= \int_0^b \left[\mathbf{a}_z B_0 \cos\left(\frac{\pi r}{2b}\right) \operatorname{sen} \omega t \right] \cdot (\mathbf{a}_z 2\pi r\, dr)$$
$$= \frac{8b^2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) B_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

Puesto que hay N vueltas, el flujo total ligado es $N\Phi$ y obtenemos

$$\mathscr{V} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$
$$= -\frac{8N}{\pi} b^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) B_0 \omega \cos \omega t \qquad \text{(V)}.$$

Podemos ver que como la fase de cos ωt está adelantada 90° respecto a la de sen ωt, la fase de la fuerza electromotriz inducida va 90° retrasada con respecto a la del flujo ligado.

■ **EJERCICIO 6.1** Determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito circular de N vueltas con radio b del ejemplo 6-1 si la densidad de flujo magnético es $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0(b - r) \cos \omega t$. ¿Cuál es la relación de fases entre la fuerza electromagnética inducida y el campo magnético?

RESPUESTA: $\mathscr{V} = N\dfrac{\pi}{3}\omega b^3 B_0 \operatorname{sen} \omega t$, fase retrasada 90° con respecto a $\mathbf{B}$

6-2.2 TRANSFORMADORES

Funciones de un transformador

Un transformador es un dispositivo de corriente alterna (ca) que transforma voltajes, corrientes e impedancias. Normalmente consiste en dos o más bobinas acopladas magnéticamente a través de un núcleo ferromagnético común, como se ilustra en la figura 6-1. Para la trayectoria cerrada en el circuito magnético trazado por el flujo magnético Φ tenemos

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathscr{R}\Phi, \tag{6-13}$$

donde N_1, N_2 e i_1, i_2 son el número de vueltas y la corriente en los circuitos primario y secundario, respectivamente. El lado izquierdo de la ecuación (6-13) es la integral de línea cerrada $\oint \mathbf{H} \cdot d\ell$ alrededor del núcleo del transformador, consecuencia de la ley circuital de Ampère expresada en la ecuación (5-63), y representa la *fuerza magnetomotriz* (fmm) neta (unidad en el SI: ampere-vuelta). Ya hemos señalado que, de acuerdo con la ley de Lenz, la fuerza magnetomotriz inducida en el circuito secundario, $N_2 i_2$, se opone al flujo magnético creado por la fuerza magnetomotriz en el circuito primario, $N_1 i_1$. El símbolo $\mathscr{R}$ en el lado derecho de la ecuación (6-13) denota la *reluctancia* del

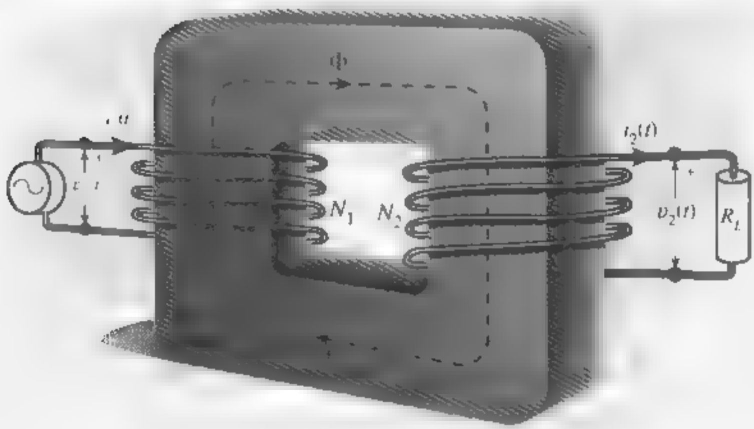


FIGURA 6-1 Diagrama esquemático de un transformador.

circuito magnético, la cual depende de la geometría y es inversamente proporcional a la permeabilidad del material del núcleo.† La ecuación (6-13) para un circuito magnético es análoga a una expresión de la ley del voltaje de Kirchhoff para un circuito eléctrico de corriente continua, y nos dice que la fuerza electromotriz neta alrededor de un circuito cerrado es igual a la suma de las resistencias multiplicada por la corriente. En este caso, $\mathscr{R}$ y $\mathbf{\Phi}$ son análogos a la resistencia y a la corriente, respectivamente.

Condiciones de un transformador ideal

En el caso de los transformadores ideales suponemos que no hay flujo de fuga y que $\mu \to \infty$, $\mathscr{R} = 0$. La ecuación (6-13) se convierte en

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}.} \tag{6-14}$$

Relación de corrientes para un transformador ideal

La ecuación (6-14) establece que ***la razón de las corrientes en los devanados primario y secundario de un transformador ideal es igual a la inversa de la razón de transformación***. La ley de Faraday nos dice que

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \tag{6-15}$$

y

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \tag{6-16}$$

† El cálculo de la reluctancia de un circuito magnético es similar al de la resistencia en un circuito eléctrico, pero el resultado sólo puede ser aproximado debido a la existencia de flujo de fuga y a la no uniformidad de la sección transversal del núcleo del transformador. (El flujo de fuga es la parte del flujo magnético no ligada al circuito magnético.) No profundizaremos aquí en la determinación de $\mathscr{R}$. La unidad en el SI de la reluctancia es el inverso del henry (H^{-1}).

donde los signos apropiados de v_1 y v_2 se han tenido en cuenta por las polaridades indicadas en la figura 6-1. A partir de las ecuaciones (6-15) y (6-16) tenemos

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2}=\frac{N_1}{N_2}.} \tag{6-17}$$

Relación de voltajes para un transformador ideal

De esta manera, ***la razón de los voltajes entre el devanado primario y el secundario de un transformador ideal es igual a la razón de transformación.***

Cuando el devanado secundario termina en una resistencia de carga R_L, como se muestra en la figura 6-1, la carga efectiva vista por la fuente conectada al devanado primario es

$$(R_1)_{efec}=\frac{v_1}{i_1}=\frac{(N_1/N_2)v_2}{(N_2/N_1)i_2}, \tag{6-18}$$

o

Transformación de resistencias por un transformador ideal

$$\boxed{(R_1)_{efec}=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L,} \tag{6-19}$$

que es la resistencia de carga multiplicada por el cuadrado de la razón de transformación En el caso de una fuente senoidal $v_1(t)$ y una impedancia de carga Z_L, la carga efectiva para la fuente es $(N_1/N_2)^2 Z_L$, una transformación de impedancia Tenemos

Transformación de impedancias por un transformador ideal

$$\boxed{(Z_1)_{efec}=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L.} \tag{6-20}$$

En la sección 5-10 señalamos que la inductancia de una bobina es proporcional a la permeabilidad del medio. Por lo tanto, la suposición de una μ infinita para un transformador ideal también implica inductancias infinitas.

Razón por la cual es difícil el análisis preciso de un transformador real

En los transformadores reales tenemos las siguientes condiciones: la existencia de flujo de fuga, inductancias finitas, resistencia distinta de cero en el devanado y la presencia de histéresis y pérdidas por corrientes parásitas. La naturaleza no lineal del núcleo ferromagnético (la dependencia de la permeabilidad con la intensidad del campo magnético) complica aún más el problema de un análisis exacto de los transformadores reales.

Definición de una corriente parásita

Principio del calentamiento por inducción

Cuando un flujo magnético variable con el tiempo fluye por el núcleo ferromagnético, se produce una fuerza electromotriz inducida de acuerdo con la ley de Faraday. Esta fuerza electromotriz inducida producirá corrientes locales en el núcleo conductor, normales al flujo magnético. Estas corrientes se denominan ***corrientes parásitas*** Las corrientes parásitas producen pérdida óhmica de potencia y generan calor local De hecho, éste es el principio del calentamiento por inducción Se han construido hornos

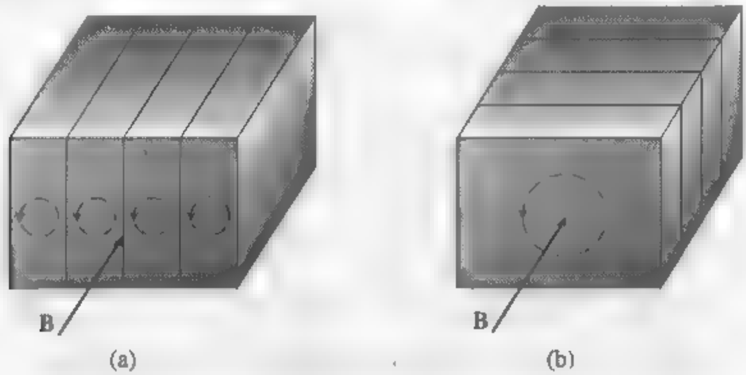


FIGURA 6-2 Núcleos laminados en un campo magnético variable con el tiempo

por inducción que generan temperaturas lo suficientemente altas como para fundir metales. Esta pérdida de potencia por las corrientes parásitas en los transformadores no es deseable y puede reducirse usando materiales para el núcleo que tengan alta permeabilidad pero baja conductividad (μ alta y σ baja). Las ferritas son este tipo de materiales. Una forma económica de reducir las pérdidas por corrientes parásitas en aplicaciones de baja frecuencia-alta potencia es usar núcleos laminados, es decir, formar los núcleos de los transformadores con láminas ferromagnéticas (de hierro) apiladas, cada una eléctricamente aislada de sus vecinas mediante una delgada capa de barniz u óxido. El recubrimiento aislante debe ser paralelo a la dirección del flujo magnético, como se ilustra en la figura 6-2(a), para que las corrientes parásitas normales al flujo estén restringidas a las láminas. Es evidente que la disposición de la figura 6-2(b), con capas aisladas normales al flujo magnético, tiene poco efecto en la reducción de las pérdidas por corrientes parásitas. Puede demostrarse que la pérdida total por corrientes parásitas se reduce al aumentar el número de láminas. La reducción en la pérdida de potencia depende de la forma y el tamaño de la sección transversal, además del método de laminado.

Laminado del núcleo para reducir las pérdidas por corrientes parásitas

■ **EJERCICIO 6.2** Hay que convertir una resistencia de 75 (Ω) a 300 (Ω) usando un transformador ideal. ¿Qué razón de transformación debe tener el transformador?

RESPUESTA: 2:1.

6-2.3 CONDUCTOR MÓVIL EN UN CAMPO MAGNÉTICO ESTÁTICO

Cuando un conductor se mueve con una velocidad **u** en un campo magnético estático (no variable con el tiempo) **B**, como se muestra en la figura 6-3, una fuerza $\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ hará que los electrones que se pueden mover libremente en el conductor se desplacen hacia un extremo del conductor y dejen el otro extremo cargado positivamente. Esta separación de cargas positivas y negativas crea una fuerza de atracción de Coulomb. El proceso de separación de cargas continuará hasta que las fuerzas magnéticas y eléctricas se

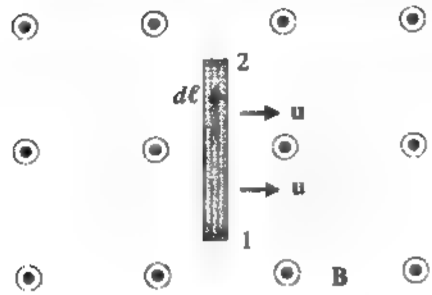


FIGURA 6-3 Barra conductora que se mueve en un campo magnético.

equilibren y se llegue a un estado de equilibrio. Un vez en el equilibrio, al cual se llega muy rápidamente, la fuerza neta sobre las cargas libres en el conductor móvil es cero

Para un observador que se mueve a la par del conductor, no hay movimiento aparente y la fuerza magnética por unidad de carga $\mathbf{F}_m/q$ $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ puede interpretarse como un campo eléctrico inducido que actúa a lo largo del conductor produciendo un voltaje E

$$\frac{F_m}{q} \quad V_{21} = \int_1^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{6-21}$$

Si el conductor móvil forma parte de un circuito cerrado C, la fuerza electromotriz generada alrededor del circuito es

$$\boxed{\mathscr{V}' = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(V)}.} \tag{6-22}$$

Definición de la fuerza electromotriz cinética

Esto se conoce como ***fuerza electromotriz por corte de flujo*** o ***fuerza electromotriz cinética***. Es obvio que sólo la parte del circuito que se mueve en una dirección no paralela al flujo magnético (y que, por consiguiente, lo "corta" en sentido figurado) contribuirá a $\mathscr{V}'$ en la ecuación (6-22).

EJEMPLO 6-2

Una barra metálica se desliza con velocidad constante $\mathbf{u}$ sobre un par de rieles conductores en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0$, como se ilustra en la figura 6-4.

a) Determine el voltaje en circuito abierto V_0 que aparece entre los terminales 1 y 2.

b) Suponiendo que se conecta una resistencia R entre los terminales, calcule la potencia eléctrica disipada en R.

c) Demuestre que esta potencia eléctrica es igual a la potencia mecánica necesaria para mover la barra deslizante con velocidad $\mathbf{u}$. Ignore la resistencia eléctrica de la barra metálica y de los rieles conductores. Ignore también la fricción mecánica en los puntos de contacto.

SOLUCIÓN

a) La barra móvil genera una fuerza electromotriz por corte de flujo. Usamos la ecuación (6-22) para hallar el voltaje en circuito abierto V_0:

$$\begin{aligned} V_0 = V_1 - V_2 &= \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \int_2^1 (\mathbf{a}_x u \times \mathbf{a}_z B_0) \cdot (\mathbf{a}_y \, d\ell) \\ &= -uB_0 h \qquad \text{(V)}. \end{aligned} \tag{6-23}$$

b) Cuando se conecta una resistencia R entre los terminales 1 y 2 fluye una corriente $I = uB_0h/R$ desde el terminal 2 hasta el terminal 1, de manera que la potencia eléctrica, P_e, disipada en R es

$$P_e = I^2R = \frac{(uB_0h)^2}{R} \qquad \text{(W)}. \tag{6-24}$$

c) La potencia mecánica, P_m, necesaria para mover la barra deslizante es

$$P_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \qquad \text{(W)}, \tag{6-25}$$

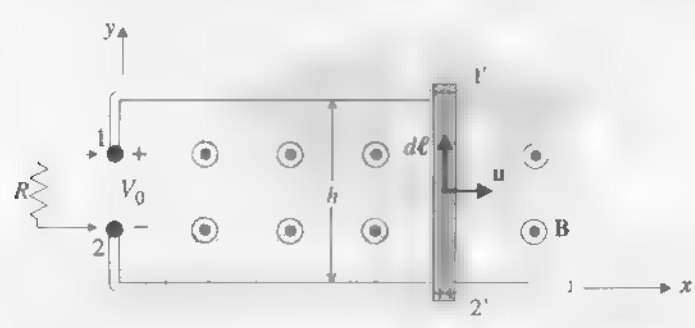
donde $\mathbf{F}$ es la fuerza mecánica requerida para contrarrestar la fuerza magnética, F_m, que ejerce el campo magnético sobre la barra metálica por la que circula corriente. A partir de la ecuación (5-116) tenemos

$$\mathbf{F}_m = I \int_2^{1'} d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = -\mathbf{a}_x I B_0 h \qquad \text{(N)}. \tag{6-26}$$

El signo negativo en la ecuación (6-26) se debe a que la corriente I fluye en dirección opuesta a la de $d\boldsymbol{\ell}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m = \mathbf{a}_x I B_0 h = \mathbf{a}_x u B_0^2 h^2/R \qquad \text{(N)}. \tag{6-27}$$

FIGURA 6-4 Barra metálica que se desliza sobre rieles conductores (ejemplo 6-2)



Al sustituir la ecuación (6-27) en la ecuación (6-25) se demuestra que $P_m = P_e$, que confirma el principio de conservación de la energía.

EJEMPLO 6-3

Generador de disco de Faraday

El ***generador de disco de Faraday*** consiste en un disco circular de metal que gira con velocidad angular constante ω en un campo magnético constante y uniforme con densidad de flujo $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0$ paralelo al eje de rotación. Sobre el eje y en el borde del disco se encuentran unas escobillas de contacto, como se muestra en la figura 6-5. Determine el voltaje en circuito abierto del generador si el radio del disco es b.

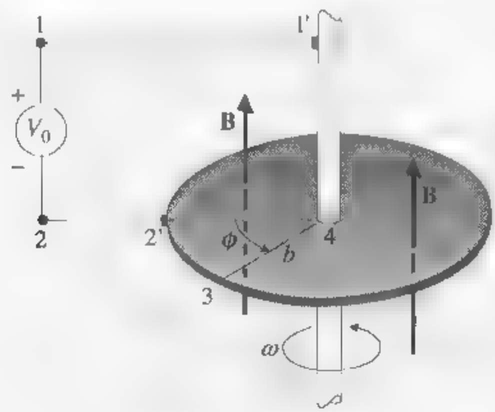
SOLUCIÓN

Consideremos únicamente el circuito 122'34'1. De la parte 2'34 que se mueve con el disco, únicamente la porción 34 "corta" el flujo magnético. A partir de la ecuación (6-22) tenemos

$$\begin{aligned} V_0 &= \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \int_3^4 [(\mathbf{a}_\phi r\omega) \times \mathbf{a}_z B_0] \cdot (\mathbf{a}_r dr) \\ &= \omega B_0 \int_b^0 r\, dr = -\frac{\omega B_0 b^2}{2} \qquad (\mathrm{V}), \end{aligned} \tag{6-28}$$

que es la fuerza electromotriz del generador de disco de Faraday. Para medir V_0 debemos usar un voltímetro con resistencia muy alta, para que no fluya una corriente apreciable por el circuito y modifique el campo magnético aplicado.

FIGURA 6-5 Generador de disco de Faraday (ejemplo 6-3).



6-2.4 CIRCUITO MÓVIL EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE CON EL TIEMPO

Cuando una carga q se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ en una región donde existe tanto un campo eléctrico $\mathbf{E}$ como un campo magnético $\mathbf{B}$, la fuerza electromagnética $\mathbf{F}$ sobre q, según lo medido por un observador de laboratorio, está dada por la ecuación de la fuerza de Lorentz:

Ecuación de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{5-5)(6-29}$$

Para un observador que se mueve con q no hay movimiento aparente y la fuerza sobre q puede interpretarse como debida a un campo eléctrico $\mathbf{E}'$, donde

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \tag{6-30}$$

o

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \tag{6-31}$$

Por consiguiente, cuando un circuito conductor con contorno C y superficie S se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ en un campo $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, usamos la ecuación (6-31) en la ecuación (6-8) para obtener

Forma general de la ley de Faraday

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(V).}} \tag{6-32}$$

La ecuación (6-32) es la forma general de la ***ley de Faraday*** para un circuito móvil en un campo magnético variable con el tiempo. La integral de línea en el lado izquierdo de la ecuación es la fuerza electromotriz inducida en el marco de referencia móvil. El primer término del lado derecho representa la fuerza electromotriz estática debida a la variación temporal de $\mathbf{B}$, y el segundo término representa la fuerza electromotriz cinética debida al movimiento del circuito en $\mathbf{B}$.

Si designamos el lado izquierdo de la ecuación (6-32) con

$$\mathscr{V}' = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{6-33}$$

= fuerza electromotriz inducida en el circuito C medida en el marco móvil,

puede demostrarse que, en términos generales, la ecuación (6-32) es equivalente a

Otra forma de la ley de Faraday

$$\boxed{\begin{aligned} \mathscr{V}' &= -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{(V),} \end{aligned}} \tag{6-34}$$

que tiene la misma forma que la ecuación (6-12). Por supuesto, $\mathscr{V}'$ se reduce a $\mathscr{V}$ si el circuito no está en movimiento. Por consiguiente, la ley de Faraday, que establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado es igual a la razón temporal

negativa de incremento de flujo magnético ligado al circuito, es aplicable tanto a circuitos estacionarios como móviles. Podemos usar la ecuación (6-32) o la (6-34) para calcular la fuerza electromotriz inducida en el caso general.

EJEMPLO 6-4

Use la ecuación (6-34) para determinar el voltaje en circuito abierto del generador de disco de Faraday del ejemplo 6-3.

SOLUCIÓN

Resolvimos el problema del ejemplo 6-3 usando la ecuación (6-22), que es la ecuación (6-32) con $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$. Para poder usar la ecuación (6-34) primero hay que encontrar el flujo magnético ligado al circuito 122'34'1 en la figura 6-5, que es el flujo que atraviesa el área en forma de cuña 2'342'.

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_0 \int_0^b \int_0^{\omega t} r\, d\phi\, dr$$
$$= B_0(\omega t)\frac{b^2}{2} \tag{6-35}$$

y

$$V_0 = \mathscr{V}' = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\omega B_0 b^2}{2}, \tag{6-36}$$

que es el mismo resultado que el de la ecuación (6-28).

■ **EJERCICIO 6.3** Use la ecuación (6-34) para determinar el voltaje en circuito abierto que aparece entre los terminales 1 y 2 del ejemplo 6-2.

RESPUESTA: $-uB_0h$.

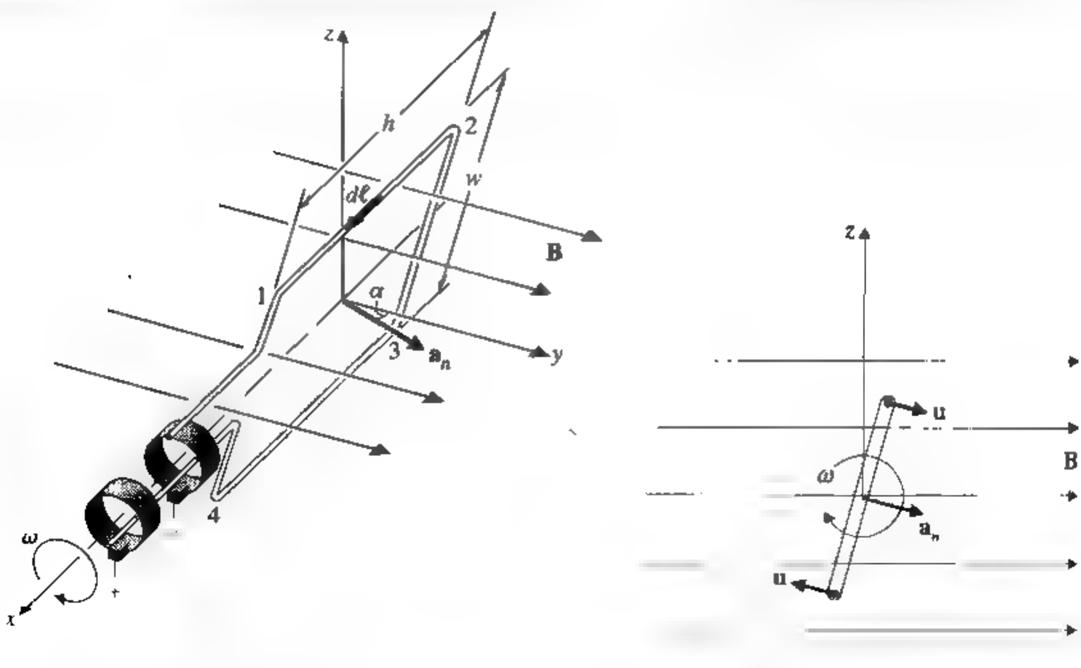
EJEMPLO 6-5

Una espira conductora rectangular de h por w está situada en un campo magnético variable $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y B_0 \operatorname{sen} \omega t$. La normal a la espira forma inicialmente un ángulo α con $\mathbf{a}_y$, como se muestra en la figura 6-6. Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira: (a) cuando la espira está en reposo y (b) cuando la espira gira con una velocidad angular ω sobre el eje x.

SOLUCIÓN

a) Cuando la espira está en reposo se emplea la ecuación (6-12):

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$
$$= (\mathbf{a}_y B_0 \operatorname{sen} \omega t) \cdot (\mathbf{a}_n hw)$$
$$= B_0 hw \operatorname{sen} \omega t \cos \alpha.$$



(a) Vista en perspectiva. (b) Vista desde la dirección + x

FIGURA 6-6 Espira rectangular conductora que gira en un campo magnético variable (ejemplo 6-5).

Por lo tanto,

$$\mathscr{V}_a = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 S\omega \cos \omega t \cos \alpha, \tag{6-37}$$

donde $S = hw$ es el área de la espira. Las polaridades relativas de los terminales son las que se indican. Si se cierra el circuito con una carga externa, $\mathscr{V}_a$ producirá una corriente que se opondrá al cambio en Φ.

b) Cuando la espira gira sobre el eje z la contribución de los dos términos de la ecuación (6-32) es: el primero da la fuerza electromotriz estática $\mathscr{V}_a$ en la ecuación (6-37) y el segundo contribuye con una fuerza electromotriz cinética $\mathscr{V}_a'$, donde

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_a' &= \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&= \int_2^1 \left[\left(\mathbf{a}_n \frac{w}{2}\,\omega\right) \times (\mathbf{a}_y B_0 \operatorname{sen} \omega t)\right] \cdot (\mathbf{a}_x\, dx) \\
&\quad + \int_4^3 \left[\left(\quad \mathbf{a}_n \frac{w}{2}\,\omega\right) \times (\mathbf{a}_y B_0 \operatorname{sen} \omega t)\right] \cdot (\mathbf{a}_x\, dx) \\
\mathscr{V}_a' &= 2\left(\frac{w}{2}\,\omega B_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \alpha\right) h.
\end{aligned}$$

Observe que los lados 23 y 41 no contribuyen a $\mathscr{V}_a''$ y que las contribuciones de los lados 12 y 34 son de igual magnitud y tienen la misma dirección. Si $\alpha = 0$ en $t = 0$, entonces $\alpha = \omega t$ y podemos escribir

$$\mathscr{V}_a'' = B_0 S\omega \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \omega t. \tag{6-38}$$

La fuerza electromotriz total inducida o generada en la espira que gira es la suma de $\mathscr{V}_a'$ en la ecuación (6-37) y $\mathscr{V}_a''$ en la ecuación (6-38):

$$\mathscr{V}_t' = -B_0 S\omega(\cos^2 \omega t - \operatorname{sen}^2 \omega t) = -B_0 S\omega \cos 2\omega t, \tag{6-39}$$

que tiene una frecuencia angular de 2ω. Por consiguiente, la disposición ilustrada en la figura 6-6 es un generador de segundo armónico.

Podemos determinar la fuerza electromotriz total inducida $\mathscr{V}_t'$ aplicando directamente la ecuación (6-34). El flujo magnético ligado a la espira en un instante t es

$$\Phi(t) = \mathbf{B}(t) \cdot [\mathbf{a}_n(t)S] = B_0 S \operatorname{sen} \omega t \cos \alpha$$
$$= B_0 S \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \tfrac{1}{2} B_0 S \operatorname{sen} 2\omega t.$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{V}_t' = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} B_0 S \operatorname{sen} 2\omega t\right),$$
$$= -B_0 S\omega \cos 2\omega t$$

como se obtuvo antes.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-1 ¿Qué constituye un *campo electromagnetostático*? ¿De qué manera se relacionan **E** y **B** en un medio conductor en condiciones estáticas?

P.6-2 Escriba el postulado fundamental de la inducción electromagnética.

P.6-3 Enuncie la ley de Lenz.

P.6-4 Escriba la expresión de la fuerza electromotriz estática.

P.6-5 En un transformador ideal, ¿cómo dependen las razones de corriente y de voltaje en el primario y secundario de la razón de transformación?

P.6-6 ¿Qué son las *corrientes parásitas*?

P.6-7 ¿Cuál es el principio del calentamiento por inducción?

P.6-8 ¿Qué materiales tienen alta permeabilidad y baja conductividad y por eso son los preferidos para los núcleos de los transformadores?

P.6-9 ¿Por qué están laminados los núcleos de los transformadores de potencia?

P.6-10 Escriba la forma general de la ley de Faraday.

P.6-11 ¿Qué es un generador de disco de Faraday?

COMENTARIOS

1. **E** *no* es conservativo en una región de campo magnético variable con el tiempo y no puede expresarse como el gradiente de un potencial escalar.
2. Un campo magnético variable con el tiempo ligado a un circuito induce una fuerza electromotriz en el circuito.
3. Los transformadores son inherentemente dispositivos de corriente alterna.
4. En un transformador ideal se supone una permeabilidad infinita en su núcleo e inductancias infinitas en sus devanados.
5. Las láminas aisladas del núcleo de un transformador, usadas para reducir la pérdida de potencia por corrientes parásitas, deben ser paralelas a la dirección del flujo magnético.

6-3 ECUACIONES DE MAXWELL

El postulado fundamental de la inducción electromagnética nos asegura que un campo magnético variable con el tiempo origina un campo eléctrico. Esta aseveración ha sido verificada con numerosos experimentos. Por lo tanto, debemos reemplazar la ecuación $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (Ec. 6-1) por la ecuación (6-7) para el caso variable con el tiempo. Tenemos ahora la siguiente colección de ecuaciones, dos de rotacional, (6-7) y (6-5), y dos de divergencia, (6-2) y (6-4):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (6\text{-}7)(6\text{-}40a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \qquad (6\text{-}5)(6\text{-}40b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \qquad (6\text{-}2)(6\text{-}40c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad (6\text{-}4)(6\text{-}40d)$$

Así mismo, sabemos que siempre debe satisfacerse el principio de conservación de la carga. La expresión matemática de este principio es la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \qquad (6\text{-}41)$$

La pregunta crucial en este momento es si el conjunto de cuatro ecuaciones (6-40a, b, c y d) es consistente con el requisito establecido por la ecuación (6-41) en una situación variable con el tiempo. El que la respuesta es negativa es evidente si se toma la divergencia de la ecuación (6-40b),

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}. \qquad (6\text{-}42)$$

La ecuación (6-42) se desprende de la identidad nula (Ec. (2-109)), la cual establece que la divergencia del rotacional de un campo vectorial que se comporta bien es cero

Puesto que la ecuación (6-41) indica que $\nabla \cdot \mathbf{J}$ no se anula en una situación variable con el tiempo, la ecuación (6-40b) por lo general no es verdadera.

¿Cómo hay que modificar las ecuaciones (6-40a, b, c y d) para que sean consistentes con la ecuación (6-41)? En primer lugar hay que añadir un término $\partial \rho_v / \partial t$ en el lado derecho de la ecuación (6-42):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \tag{6-43}$$

Al usar la ecuación (6-40c) en la ecuación (6-43) tenemos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right),$$

lo cual implica que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.} \tag{6-44}$$

La ecuación (6-44) indica que un campo eléctrico variable con el tiempo producirá un campo magnético, aunque no exista un flujo de corriente libre (es decir, incluso si $\mathbf{J} \quad 0$). El término adicional $\partial \mathbf{D}/\partial t$ es necesario para que la ecuación (6-44) sea consistente con el principio de conservación de la carga.

La razón temporal de cambio de D produce una [redacted] de corriente de desplazamiento.

Es fácil comprobar que $\partial \mathbf{D}/\partial t$ tiene las dimensiones de una densidad de corriente (unidad en el SI: A/m^2). El término $\partial \mathbf{D}/\partial t$ se denomina ***densidad de corriente de desplazamiento*** y su introducción en la ecuación $\nabla \times \mathbf{H}$ fue una de las contribuciones principales de James Clerk Maxwell (1831-1879). Para ser consistentes con la ecuación de continuidad en una situación variable con el tiempo hay que generalizar las ecuaciones de rotacional (6-1) y (6-5). El conjunto de cuatro ecuaciones consistentes que sustituye a las ecuaciones inconsistentes (6-40a, b, c y d) es

Forma diferencial (operador) de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{6-45a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{6-45b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \tag{6-45c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{6-45d}$$

Se conocen como ***ecuaciones de Maxwell***. Observe que ρ_v en la ecuación (6-45c) es la densidad volumétrica de *cargas libres* y $\mathbf{J}$ en la ecuación (6-45b) es la densidad de *corrientes libres*, que pueden comprender tanto corriente de convección ($\rho_v \mathbf{u}$) como corriente de conducción ($\sigma \mathbf{E}$). Estas cuatro ecuaciones, junto con la ecuación de continuidad de la ecuación (6-41) y la ecuación de la fuerza de Lorentz (Ec. 5-5), forman

la base de la teoría electromagnética. Podemos usar estas ecuaciones para explicar y predecir *todos* los fenómenos electromagnéticos macroscópicos.

Las cuatro ecuaciones de Maxwell no son [illegible] independientes.

Aunque las cuatro ecuaciones de Maxwell (6-45a, b, c y d) son consistentes, no son del todo independientes. De hecho, las dos ecuaciones de divergencia, (6-45c y d), pueden derivarse de las dos ecuaciones de rotacional, (6-45a y b), usando la ecuación de continuidad, (6-41). Vea el ejercicio 6.4 a continuación.

■ **EJERCICIO 6.4** Obtenga la divergencia de las dos ecuaciones de rotacional (6-45a) y (6-45b) y derive las dos ecuaciones de divergencia (6-45c) y (6-45d) con la ayuda de la ecuación de continuidad (6-41).

6-3.1 FORMA INTEGRAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Las cuatro ecuaciones de Maxwell (6-45a, b, c y d) son ecuaciones diferenciales válidas en todos los puntos del espacio. Al explicar los fenómenos electromagnéticos en un entorno físico debemos tratar con objetos finitos de formas y contornos determinados, por lo cual es conveniente convertir las formas diferenciales a sus equivalentes formas integrales. Tomamos la integral de superficie de ambos lados de las ecuaciones de rotacional (6-45a) y (6-45b) sobre una superficie abierta S con contorno C y aplicamos el teorema de Stokes para obtener

Forma integral de las ecuaciones de Maxwell

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s}} \tag{6-46a}$$

y

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{s}.} \tag{6-46b}$$

Al tomar la integral de volumen de ambos lados de las ecuaciones de divergencia (6-45c) y (6-45d) sobre un volumen V con superficie *cerrada* S y usar el teorema de divergencia tenemos

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v\, dv} \tag{6-46c}$$

y

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0.} \tag{6-46d}$$

TABLA 6-1 ECUACIONES DE MAXWELL Y SU IMPORTANCIA

Forma diferencial	Forma integral	Importancia
$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$	Ley de Faraday
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I + \int_S \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$	Ley circuital de Ampère
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$	Ley de Gauss
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	No hay carga magnética aislada

El conjunto de cuatro ecuaciones (6-46a, b, c y d) es la forma integral de las ecuaciones de Maxwell. En la tabla 6-1 se listan las formas diferenciales e integrales de las ecuaciones de Maxwell, así como su importancia.

EJEMPLO 6-6

Una fuente de corriente alterna de amplitud V_0 y frecuencia angular ω, $v_C = V_0$ sen ωt, está conectada a un condensador de placas paralelas C_1, como se muestra en la figura 6-7. (a) Compruebe que la corriente de desplazamiento en el condensador es la misma que la corriente de conducción en los alambres. (b) Determine la intensidad de campo magnético a una distancia r del alambre.

SOLUCIÓN

a) La corriente de conducción en el alambre de conexión es

$$i_C = C_1 \frac{dv_C}{dt} = C_1 V_0 \omega \cos \omega t.$$

Para un condensador de placas paralelas con área A, separación d entre placas y medio dieléctrico con permitividad ϵ, la capacitancia es

$$C_1 = \epsilon \frac{A}{d}.$$

Si aparece un voltaje v_C entre las placas, la intensidad de campo eléctrico uniforme E en el dieléctrico es igual a $E = v_C/d$ (ignorando los efectos marginales), de manera que

$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{V_0}{d} \operatorname{sen} \omega t.$$

La corriente de desplazamiento es entonces

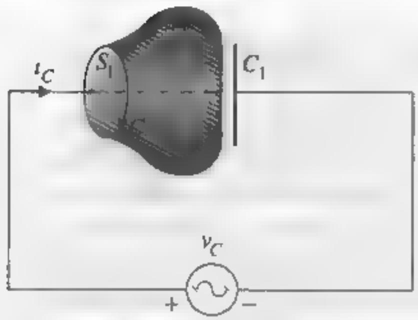


FIGURA 6-7 Condensador de placas paralelas conectado a una fuente de voltaje de corriente alterna (ejemplo 6-6).

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \left(\epsilon \frac{A}{d}\right) V_0 \omega \cos \omega t$$
$$= C_1 V_0 \omega \cos \omega t = i_C,$$

como queríamos comprobar.

b) Podemos hallar la intensidad de campo magnético a una distancia r del alambre de conexión aplicando la ley circuital generalizada de Ampère, ecuación (6-46b), al contorno C de la figura 6-7. Podemos elegir dos superficies abiertas genéricas con borde C: (1) una superficie circular plana S_1, o (2) una superficie curva S_2 que pasa por el medio dieléctrico. La simetría alrededor del alambre asegura una H_ϕ constante a lo largo del contorno C. La integral de línea del lado izquierdo de la ecuación (6-46b) es

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r H_\phi.$$

En el caso de la superficie S_1, sólo el primer término del lado derecho de la ecuación (6-46b) es distinto de cero, ya que no se depositan cargas sobre el alambre y por consiguiente $\mathbf{D} = 0$.

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = i_C = C_1 V_0 \omega \cos \omega t.$$

No fluye corriente de conducción por la superficie S_2, ya que ésta pasa por el medio dieléctrico. El lado derecho de la ecuación (6-46b) sería cero si no estuviera allí la segunda integral de superficie. Esto daría lugar a una contradicción, pero se elimina con la inclusión del término de corriente de desplazamiento de Maxwell. Como vimos en la parte (a), $i_D = i_C$. Por consiguiente, obtenemos el mismo resultado con la elección de la superficie S_1 o S_2. Al igualar las dos integrales anteriores encontramos que

$$H_\phi = \frac{C_1 V_0}{2\pi r} \omega \cos \omega t.$$

6-3.2 CONDICIONES EN LA FRONTERA ELECTROMAGNÉTICA

Para resolver problemas electromagnéticos que comprenden regiones contiguas de parámetros constitutivos diferentes es necesario conocer las condiciones en la frontera (condiciones de contorno) que deben satisfacer los vectores de campo **E**, **D**, **B** y **H** en las superficies de separación de los medios. Las condiciones en la frontera se obtienen aplicando la forma integral de las ecuaciones de Maxwell (6-46a, b, c y d) a una región pequeña de la superficie de separación de dos medios, en una forma parecida a la que se usó para obtener las condiciones en la frontera de los campos eléctricos y magnéticos estáticos. Se supone que las ecuaciones integrales son válidas para regiones con medios discontinuos (deberá revisar los procedimientos de las secciones 3-8 y 5-9). En terminos generales, la aplicación de la forma integral de la ecuación del rotacional a una trayectoria cerrada plana en la frontera, con los lados superior e inferior tocando los medios, da lugar a la condición en la frontera de las componentes tangenciales. Por otra parte, la condición en la frontera de las componentes normales se obtiene con la aplicación de la forma integral de la ecuación de la divergencia a una caja cilíndrica de muy poca altura en la superficie de separación, con las caras superior e inferior en los dos medios contiguos.

Las condiciones en la frontera de las componentes tangenciales de **E** y **H** se obtienen de las ecuaciones (6-46a) y (6-46b), respectivamente.

Condición en la frontera de la componente tangencial de E

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t} \qquad (\text{V/m});} \tag{6-47a}$$

Condición en la frontera de la componente tangencial de H

$$\boxed{\mathbf{a}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \qquad (\text{A/m}).} \tag{6-47b}$$

Observamos que las ecuaciones (6-47a) y (6-47b) para el caso variable con el tiempo son las mismas que la ecuación (3-72) para campos eléctricos estáticos y la ecuación (5-71) para campos magnéticos estáticos, respectivamente, a pesar de la existencia de términos variables con el tiempo en las ecuaciones (6-46a) y (6-46b).

De forma similar, las condiciones en la frontera de las componentes normales de **D** y **B** se obtienen de las ecuaciones (6-46c) y (6-46d):

Condición en la frontera de la componente normal de D

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \qquad (\text{C/m}^2),} \tag{6-47c}$$

donde la dirección normal de referencia es hacia fuera del medio 2; y

Condición en la frontera de la componente normal de B

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n} \qquad (\text{T}).} \tag{6-47d}$$

Estas ecuaciones son, respectivamente, las mismas que la ecuación (3-75b) para los campos eléctricos estáticos y la ecuación (5-68) para los campos magnéticos estáticos, ya que partimos de las mismas ecuaciones de divergencia.

A continuación se resumen las condiciones en la frontera de dos casos especiales importantes.

A. *Superficie de separación entre dos medios sin pérdidas*
Un medio lineal sin pérdidas puede especificarse por una permitividad ϵ y una permeabilidad μ, con $\sigma = 0$. Por lo general no hay cargas libres ni corrientes superficiales en la superficie de separación entre dos medios sin pérdidas. Establecemos $\rho_s = 0$ y $\mathbf{J}_s = 0$ en las ecuaciones (6-47c) y (6-47b) y obtenemos las condiciones en la frontera listadas en la tabla 6-2. Puede verse que en este caso E_t, H_t, D_n y B_n son continuos en la superficie de separación.

B. *Superficie de separación entre un dieléctrico y un conductor perfecto*
Un conductor perfecto es aquel que tiene una conductividad infinita. En el mundo físico tenemos abundantes "buenos conductores", como la plata, el cobre, el oro y el aluminio, con conductividades del orden de 10^7 (S/m) (vea la tabla del apéndice B-4). Los buenos conductores muchas veces se consideran como perfectos en lo que respecta a las condiciones en la frontera, con el fin de simplificar la solución analítica de problemas de campos. El campo eléctrico es cero en el *interior* de un conductor perfecto (de lo contrario produciría una densidad de corriente infinita) y todas las cargas que tenga el conductor residirán exclusivamente en la superficie. La interrelación entre (**E**, **D**) y (**B**, **H**) a través de las ecuaciones de Maxwell asegura que **B** y **H** también son cero en el *interior* de un conductor en una *situación variable con el tiempo*. Considere la superficie de separación entre un dieléctrico sin pérdidas (medio 1) y un conductor perfecto (medio 2). En el medio 2, $\mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{D}_2 = 0$ y $\mathbf{B}_2 = 0$. Las condiciones en la frontera generales de las ecuaciones (6-47a, b, c y d) se reducen a las que se listan en la tabla 6-3. En este caso, E_t y B_n son continuos, pero H_t y D_n son discontinuos en una cantidad igual a la densidad superficial de corriente J_s y la densidad superficial de carga ρ_s, respectivamente. Es importante señalar que al aplicar las ecuaciones (6-49b) y (6-49c), la normal de referencia se dirige hacia fuera de la superficie del conductor (medio 2).

TABLA **6-2** CONDICIONES EN LA FRONTERA ENTRE DOS MEDIOS SIN PÉRDIDAS

$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{6-48a}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \longrightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{6-48b}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \tag{6-48c}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \longrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \tag{6-48d}$$

TABLA 6-3 CONDICIONES EN LA FRONTERA ENTRE UN DIELÉCTRICO (MEDIO 1) Y UN CONDUCTOR PERFECTO (MEDIO 2) (PARA VARIACIÓN CON EL TIEMPO)

En el lado del medio 1	En el lado del medio 2	
$E_{1t} = 0$	$E_{2t} = 0$	(6-49a)
$\mathbf{a}_{n2} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s$	$H_{2t} = 0$	(6-49b)
$D_{1n} = \rho_s$	$D_{2n} = 0$	(6-49c)
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$	(6-49d)

■ **EJERCICIO 6.5** Suponga que el plano $y = 0$ separa el aire en el semiespacio superior ($y > 0$) de un buen conductor y que en la superficie de separación existen una densidad superficial de carga $\rho_s = C_1$ sen βx y una densidad superficial de corriente $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_x C_2 \cos \beta x$ (C_1, C_2 y β son constantes.) Determine **E** y **H** en el aire en la superficie de separación.

RESPUESTA: $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y(C_1/\epsilon_0)$ sen βx, $\mathbf{H} = \mathbf{a}_z C_2 \cos \beta x$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-12 Escriba la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

P.6-13 Explique la importancia de la *corriente de desplazamiento*

P.6-14 Escriba la forma integral de las ecuaciones de Maxwell y relacione cada ecuación con la ley experimental apropiada.

P.6-15 Enuncie las condiciones en la frontera de E_t y B_n.

P.6-16 Enuncie las condiciones en la frontera de H_t y D_n.

P.6-17 ¿Por qué es perpendicular a la superficie del conductor el campo **E** que está inmediatamente afuera de un conductor perfecto?

P.6-18 ¿Por qué es tangencial a la superficie del conductor el campo **H** que está inmediatamente afuera de un conductor perfecto?

P.6-19 ¿Puede existir un campo magnético estático en el interior de un conductor perfecto? Explique. ¿Puede existir un campo magnético variable con el tiempo? Explique.

COMENTARIOS

1. Un campo magnético variable produce un campo eléctrico y un campo eléctrico variable produce una corriente de desplazamiento que contribuye al campo magnético. En situaciones variables con el tiempo, los campos eléctricos y magnéticos se acoplan a través de las ecuaciones del rotacional de Maxwell.
2. Las cuatro ecuaciones de Maxwell no son todas independientes.
3. La componente tangencial de **E** y la componente normal de **B** son continuas en la superficie de separación de dos medios cualesquiera.

6-4 FUNCIONES DE POTENCIAL

En la sección 5-3 presentamos el concepto del potencial magnético vector **A** debido a la naturaleza solenoidal de **B** ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$):

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \text{(T)}.} \tag{6-50}$$

Si sustituimos la ecuación (6-50) en la forma diferencial de la ley de Faraday (Ec. 6-7) obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}), \tag{6-51}$$

o

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{6-52}$$

Puesto que la suma de las dos cantidades vectoriales entre paréntesis en la ecuación (6-52) es irrotacional, puede expresarse como el gradiente de un escalar. Para ser consistentes con la definición del potencial eléctrico escalar V de la ecuación (3-26) para la electrostática, escribimos

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V,$$

de lo cual obtenemos

En el caso variable con el tiempo, **E** es una función tanto del potencial [redacted] escalar *V* como del potencial magnético vector **A**.

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{(V/m)}.} \tag{6-53}$$

En el caso estático, $\partial \mathbf{A}/\partial t = 0$ y la ecuación (6-53) se reduce a $\mathbf{E} = -\nabla V$. Por consiguiente, podemos determinar **E** usando solamente V, y **B** a partir de **A** usando la ecuación (6-50). Para campos variables con el tiempo **E** depende tanto de V como de **A**; es decir, la intensidad de campo eléctrico puede ser el resultado de las acumulaciones de carga a través del término $-\nabla V$ y de campos magnéticos variables con el tiempo por medio del término $-\partial \mathbf{A}/\partial t$. Puesto que **B** también depende de **A**, **E** y **B** están acoplados.

Sustituyamos las ecuaciones (6-50) y (6-53) en la ecuación (6-45b) y usemos las relaciones constitutivas $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ y $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Tenemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right), \tag{6-54}$$

donde se ha supuesto un medio homogéneo. Recordando la identidad vectorial para $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ dada por la ecuación (5-16a), podemos escribir la ecuación (6-54) como

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \nabla\left(\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},$$

o

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right). \tag{6-55}$$

La definición de un vector requiere la especificación de su rotacional y su divergencia. Aunque el rotacional de **A** se designó como **B** en la ecuación (6-50), tenemos la libertad de elegir la divergencia de **A**. Sea

Condición de Lorentz de los potenciales

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} = 0,} \tag{6-56}$$

que hace nulo el segundo término del lado derecho de la ecuación (6-55) y ésta se reduce a la forma más simple posible. Tenemos entonces

Ecuación de onda para el potencial vector A

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}.} \tag{6-57}$$

La ecuación (6-57) es la ***ecuación de onda no homogénea para el potencial vector* A**. Se denomina ecuación de onda porque sus soluciones representan ondas que se propagan con velocidad igual a $1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Esto se verá mejor en la sección 6-4.1, donde se analiza la solución de las ecuaciones de onda. La relación entre **A** y V en la ecuación (6-56) se conoce como ***condición de Lorentz*** (o ***gauge de Lorentz***) ***de los potenciales***. En el caso de campos estáticos se reduce a la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ de la ecuación (5-19).

La ecuación de onda correspondiente al potencial escalar V es

Ecuación de onda para el potencial escalar V

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon},} \tag{6-58}$$

que es la ***ecuación de onda no homogénea para el potencial escalar V***. De esta manera, la condición de Lorentz en la ecuación (6-56) separa las ecuaciones de onda de **A** y V. Observe la similitud entre las ecuaciones (6-57) y (6-58) y la analogía entre las cantidades: $\mathbf{A} \sim V$, $\mathbf{J} \sim \rho_v$ y $\mu \sim 1/\epsilon$.

■ **EJERCICIO 6.6** Obtenga la ecuación de onda (6-58) correspondiente a V usando la ecuación (6-53) en la ecuación (6-40c).

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-20 ¿Cómo se definen el potencial eléctrico escalar V y el potencial magnético vector $\mathbf{A}$?

P.6-21 ¿Qué es una ecuación de onda?

COMENTARIOS

Las funciones de potencial variables con el tiempo V y $\mathbf{A}$ satisfacen la ecuación de onda.

6-4.1 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE ONDA

Consideremos ahora la solución de la ecuación de onda no homogénea (6-58) para un potencial escalar V debido a una distribución de carga ρ_v en una región finita. Situemos una carga puntual elemental $\rho_v\, dv'$ en el origen en el instante t. A una distancia R lejos del origen podemos suponer una simetría esférica (es decir, V depende únicamente de R y t, no de θ ni de ϕ). Con base en la ecuación (3-129), podemos escribir la ecuación (6-58) como

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{6-59}$$

Introducimos ahora una nueva variable

$$V(R, t) = \frac{1}{R}U(R, t), \tag{6-60}$$

que simplifica la ecuación (6-59) a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \tag{6-61}$$

La ecuación (6-61) es una ecuación de onda unidimensional homogénea. Puede comprobarse por sustitución directa (véase el Prob. P.6-11) que *cualquier* función de $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ que sea diferenciable dos veces será una solución de la ecuación (6-61). Escribimos

$$U(R, t) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}). \tag{6-62}$$

La función a la nueva distancia $R + \Delta R$ en un instante posterior $t + \Delta t$ es

$$U(R + \Delta R, t + \Delta t) = f[t + \Delta t - (R + \Delta R)\sqrt{\mu\epsilon}\,]$$

que es igual a $f(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ y conserva su forma si Δt $\Delta R\sqrt{\mu\epsilon}$ $\Delta R\, u_p$ La cantidad

La velocidad de propagación de la onda en un medio con parámetros constitutivos ϵ y μ es $1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{6-63}$$

es la ***velocidad de propagación de la onda***, una característica del medio. En el aire es igual a $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. A partir de las ecuaciones (6-60) y (6-62) tenemos

$$V(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/u_p). \tag{6-64}$$

Para determinar cuál debe ser la función $f(t - R/u_p)$ específica, hay que observar en la ecuación (3-29) que para una carga puntual estática $\rho(t)\Delta v'$ en el origen,

$$\Delta V(R) = \frac{\rho_v(t)\,\Delta v'}{4\pi\epsilon R}. \tag{6-65}$$

Al comparar las ecuaciones (6-64) y (6-65) podemos identificar

$$\Delta f(t - R/u_p) = \frac{\rho_v(t - R/u_p)\,\Delta v'}{4\pi\epsilon}. \tag{6-66}$$

El potencial debido a una distribución de carga en un volumen V' es entonces

Determinación del potencial escalar V retardado a partir de la distribución de carga

$$\boxed{V(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho_v(t - R/u_p)}{R}\,dv' \qquad \text{(V)}.} \tag{6-67}$$

La ecuación (6-67) indica que el potencial escalar a una distancia R de la fuente en un instante t depende del valor de la densidad de carga en un instante *anterior* $(t - R/u_p)$. Por esta razón, $V(R, t)$ en la ecuación (6-67) se denomina ***potencial escalar retardado***.

La solución de la ecuación de onda no homogénea (Ec. 6-57) para el potencial magnético vector **A** puede realizarse exactamente de la misma manera que hicimos con V. La ecuación vectorial (6-57) de **A** puede descomponerse en tres ecuaciones escalares, cada una de éstas similar a la ecuación (6-58) de V. El ***potencial vector retardado*** está expresado entonces por

Determinación del potencial vector A retardado a partir de la distribución de corriente

$$\boxed{\mathbf{A}(R, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(t - R/u_p)}{R}\,dv' \qquad \text{(Wb/m)}.} \tag{6-68}$$

En la teoría de circuitos se ignora el efecto del retardo temporal.

Los campos eléctrico y magnético derivados por diferenciación de **A** y V serán evidentemente funciones de $(t - R/u_p)$ y, por consiguiente, retardados en el tiempo. Se requiere tiempo para que las ondas electromagnéticas se propaguen y se sientan los efectos de las cargas y las corrientes variables con el tiempo en puntos distantes. En la teoría de circuitos se ignora este efecto de retardo temporal y se supone una respuesta instantánea.

■ **EJERCICIO 6.7** Una señal de radar enviada desde la Tierra a la Luna se recibe de vuelta en la Tierra tras un retardo de 2.562 (s). Determine la distancia entre las superficies de la Tierra y la Luna en ese momento, en kilómetros y en millas.

RESPUESTA: 3.843×10^5 (km) o 238 844 millas.

■ **EJERCICIO 6.8** ¿Cuál es la distancia equivalente a un año luz?

RESPUESTA: 9.46×10^{12} (km) o 5.88 billones de millas.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-22 ¿Qué significa el *potencial retardado* en el electromagnetismo?

P.6-23 ¿De qué manera dependen el tiempo de retardo y la velocidad de propagación de la onda de los parámetros constitutivos del medio?

COMENTARIOS

1. La respuesta a distancia de los cambios en las distribuciones de corriente y carga *no es instantánea*, sino *retardada* con el tiempo.
2. La velocidad de propagación de la onda es una característica del medio y es *independiente de la frecuencia*.

6-5 CAMPOS CON DEPENDENCIA ARMÓNICA CON EL TIEMPO

Las ecuaciones de Maxwell y todas las ecuaciones derivadas de ellas que hemos presentado en este capítulo son válidas para cantidades electromagnéticas con una dependencia con el tiempo arbitraria. La forma real de las funciones temporales que toman las cantidades de campo depende de las funciones fuente ρ_v y $\mathbf{J}$. Las funciones temporales senoidales ocupan una posición única en la ingeniería. Son fáciles de generar; las funciones temporales periódicas arbitrarias pueden desarrollarse fácilmente en series de Fourier de componentes senoidales armónicas; y las funciones transitorias no periódicas pueden expresarse como integrales de Fourier. Por lo tanto, en el caso de funciones fuente con una dependencia temporal arbitraria, los campos electrodinámicos pueden determinarse en términos de los originados por las diversas componentes en frecuencia de las funciones fuente. La aplicación del principio de superposición (suma de los resultados producidos por las diversas frecuencias) nos proporciona los campos totales. En esta sección examinaremos las relaciones de campo *con dependencia armónica con el tiempo* (estado estacionario senoidal).

Los campos con dependencia armónica con el tiempo son campos senoidales.

6-5.1 USO DE FASORES: REPASO

Es conveniente usar fasores para los campos con dependencia armónica con el tiempo. Al llegar a este punto haremos una breve digresión para repasar el uso de los fasores Conceptualmente, es más sencillo analizar un fasor escalar. La expresión instantánea

(dependiente del tiempo) de una cantidad escalar senoidal, como una corriente i, puede escribirse como función coseno o seno. *Si* elegimos una función coseno como *referencia* (que normalmente está fijada por la forma funcional de la excitación), todos los resultados derivados harán referencia a la función coseno. La especificación de una cantidad senoidal requiere el conocimiento de tres parámetros: amplitud, frecuencia y fase. Por ejemplo,

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi), \tag{6-69}$$

donde I_0 es la amplitud, ω es la frecuencia angular (rad/s) (ω siempre es igual a $2\pi f$, donde f es la frecuencia en hertz); y ϕ es el ángulo de fase con respecto a la función coseno. Si lo deseamos, también podemos escribir $i(t)$ en la ecuación (6-69) como función seno: $i(t) = I_0$ sen $(\omega t + \phi')$, con $\phi' = \phi + \pi/2$. Es importante decidir desde el principio si la referencia será una función coseno o seno, y después seguir ese criterio durante todo el problema.

Trabajar directamente con una expresión instantánea como la función coseno es poco conveniente cuando hay que hacer diferenciaciones o integraciones de $i(t)$, ya que dan lugar tanto a funciones seno (diferenciación o integración de primer grado) como a funciones coseno (diferenciación o integración de segundo grado), y porque es tedioso combinar funciones seno y coseno. Por ejemplo, la ecuación de malla de un circuito RLC serie con voltaje aplicado $v(t) = V_0 \cos \omega t$ es

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = v(t). \tag{6-70}$$

Si escribimos la corriente resultante $i(t)$ en la forma de la ecuación (6-69), la ecuación (6-70) da

$$I_0\left[-\omega L \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + R\cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{\omega C}\operatorname{sen}(\omega t + \phi)\right]$$
$$= V_0 \cos \omega t. \tag{6-71}$$

Es evidente que hay que realizar complicadas manipulaciones matemáticas para determinar las incógnitas I_0 y ϕ a partir de la ecuación (6-71).

Es mucho más sencillo emplear funciones exponenciales†, escribiendo el voltaje aplicado como

$$v(t) = V_0 \cos \omega t = \mathscr{R}_e[(V_0 e^{j0})e^{j\omega t}]$$
$$= \mathscr{R}_e(V_s e^{j\omega t}) \tag{6-72}$$

e $i(t)$ en la ecuación (6-69) como

$$i(t) = \mathscr{R}_e[(Ie^{j\phi})e^{j\omega t}]$$
$$= \mathscr{R}_e(I_s e^{j\omega t}), \tag{6-73}$$

donde $\mathscr{R}_e$ significa "la parte real de". En las ecuaciones (6-72) y (6-73),

† $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j$ sen ωt, $\cos \omega t = \mathscr{R}_e(e^{j\omega t})$, sen $\omega t = \mathscr{I}_m(e^{j\omega t})$

$$V_s = V_0 e^{j0} = V_0 \tag{6-74}$$

$$I_s = I_0 e^{j\phi} \tag{6-75}$$

Fasores: formas polares de cantidades complejas que contienen información de amplitud y fase

son ***fasores*** (escalares) que contienen información de la amplitud y fase pero son *independientes de t*. El fasor V_s de la ecuación (6-74), con ángulo de fase cero, es el fasor de referencia. A partir de la ecuación (6-73) tenemos

$$\frac{di}{dt} = \mathscr{R}e(j\omega I_s e^{j\omega t}), \qquad \text{y} \tag{6-76}$$

$$\int i\,dt = \mathscr{R}e\left(\frac{I_s}{j\omega} e^{j\omega t}\right). \tag{6-77}$$

Sustituyendo las ecuaciones (6-72) a (6-77) en la ecuación (6-70) se obtiene

$$\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] I_s = V_s, \tag{6-78}$$

de donde se puede obtener fácilmente el fasor de corriente I_s. Observe que el factor de dependencia temporal $e^{j\omega t}$ desaparece de la ecuación (6-78) porque esta presente en cada uno de los términos después de la sustitución en la ecuación (6-70), de manera que se cancela. Una vez determinada I_s, podemos hallar la respuesta instantanea en corriente $i(t)$ a partir de la ecuación (6-73), multiplicando I_s por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real del producto.

Conversión de fasores en funciones temporales senoidales instantáneas

Si el voltaje aplicado ha sido expresado como *función seno*, tal como $v(t) = V_0$ sen ωt, el problema del circuito RLC serie se resuelve en términos de fasores, exactamente de la misma manera; la única diferencia es que las expresiones instantáneas se obtienen tomando la *parte imaginaria* del producto de los fasores por $e^{j\omega t}$. Los fasores complejos representan las magnitudes y los cambios de fase de las cantidades en la solución de problemas con dependencia armónica con el tiempo.

EJEMPLO 6-7

Escriba la expresión fasorial I_s de las siguientes funciones de corriente, usando la referencia coseno.

a) $i(t) = -I_0 \cos(\omega t - 30°)$, y

b) $i(t) = I_0$ sen $(\omega t + 0.2\pi)$.

SOLUCIÓN

Para una referencia coseno escribimos

$$i(t) = \mathscr{R}e(I_s e^{j\omega t}).$$

a) $$i(t) = -I_0 \cos(\omega t - 30°)$$
$$= \mathscr{R}e[(-I_0 e^{-j30°}) e^{j\omega t}].$$

Por consiguiente, $I_s = -I_0 e^{-j30°} = I_0 e^{-j\pi/6} = I_0 e^{j5\pi/6}$.

b) $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + 0.2\pi)$

$$= \mathcal{R}e[(I_0 e^{j0.2\pi})e^{-j\pi/2} \cdot e^{j\omega t}],$$

donde se requiere el factor $e^{-j\pi/2}$ porque la fase de sen ωt está retrasada 90° o $\pi/2$ (rad) con respecto a cos ωt. Tenemos

$$I_s = (I_0 e^{j0.2\pi})e^{-j\pi/2} = I_0 e^{-j0.3\pi}.$$

■ **EJERCICIO 6.9** Determine las expresiones fasoriales I'_s de las funciones de corriente del ejemplo 6-7, usando la referencia seno, $i(t) = \mathcal{I}m\,(I'_s e^{j\omega t})$.

RESPUESTA: (a) $-I_0 e^{j\pi/3}$, o $I_0 e^{-j2\pi/3}$. (b) $I_0 e^{j0.2\pi}$.

EJEMPLO 6-8

Escriba las expresiones instantáneas $v(t)$ para los siguientes fasores, usando una referencia coseno:

a) $V_s = V_0 e^{j\pi/4}$, y

b) $V_s = 3 - j4$.

SOLUCIÓN

a) $v(t) = \mathcal{R}e[V_s e^{j\omega t}]$

$$= \mathcal{R}e[(V_0 e^{j\pi/4})e^{j\omega t}]$$

$$= V_0 \cos(\omega t + \pi/4).$$

b) $V_s = 3 - j4 = \sqrt{3^2 + 4^2}\, e^{j\tan^{-1}(-4/3)}$

$$= 5e^{-j53.1°}.$$

Por lo tanto,

$$v(t) = \mathcal{R}e[(5e^{-j53.1°})e^{j\omega t}]$$

$$= 5\cos(\omega t - 53.1°).$$

■ **EJERCICIO 6.10** Escriba la expresión fasorial V_s del voltaje $v(t) = 10 \cos(\omega t - 45°)$.

RESPUESTA: $10e^{-j\pi/4}$.

■ **EJERCICIO 6.11** Escriba la expresión instantánea $v(t)$ para el fasor $V_s = 4 + j3$ usando una referencia coseno.

RESPUESTA: $5 \cos(\omega t + 36.9°)$.

■ **EJERCICIO 6.12** Escriba la expresión instantánea $v(t)$ para el fasor $V_s = 4 + j3$ usando una referencia seno

RESPUESTA: $5 \operatorname{sen}(\omega t + 126.9°)$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-24 ¿Qué es un *fasor*? ¿Los fasores son funciones de t? ¿Son funciones de ω?

P.6-25 ¿Cuál es la diferencia entre un fasor y un vector?

COMENTARIOS

1. Los fasores son cantidades complejas (expresadas en forma polar) que representan la magnitud y la fase de funciones senoidales.
2. Los ángulos de fase pueden expresarse en radianes o en grados. *No olvide* el signo ° cuando los exprese en grados.
3. *Nunca* combine factores que contengan j con funciones temporales instantáneas. Las expresiones como $j \cos \omega t$, $e^{j\phi} \operatorname{sen} \omega t$ y $(1-j)i(t)$ son incorrectas.

6-5.2 ELECTROMAGNETISMO CON DEPENDENCIA ARMÓNICA CON EL TIEMPO

Los vectores de campo que varían con las coordenadas espaciales y son funciones senoidales del tiempo pueden representarse de forma similar mediante fasores que dependen de las coordenadas espaciales pero no del tiempo. Como ejemplo, podemos escribir un campo $\mathbf{E}$ con dependencia armónica con el tiempo *con referencia a* $\cos \omega t$[†] *como*

$$\mathbf{E}(x, y, z; t) = \mathcal{R}e[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}], \tag{6-79}$$

donde $\mathbf{E}(x, y, z)$ es un ***fasor vectorial*** que contiene información sobre la dirección, magnitud y fase. A partir de las ecuaciones (6-76) y (6-77) podemos ver que, si $\mathbf{E}(x, y, z; t)$ está representado por el fasor vectorial $\mathbf{E}(x, y, z)$, entonces $\partial\mathbf{E}(x, y, z; t)/\partial t$ y $\int \mathbf{E}(x, y, z; t)dt$ estarían representados por los fasores vectoriales $j\omega\, \mathbf{E}(x, y, z)$ y $\mathbf{E}(x, y, z)/j\omega$, respectivamente. Las diferenciaciones y las integraciones de orden superior con respecto a t estarían representadas por multiplicaciones y divisiones, respectivamente, del fasor $\mathbf{E}(x, y, z)$ por potencias superiores de $j\omega$.

A continuación se presentan las ecuaciones de Maxwell con dependencia armónica con el tiempo (6-45a, b, c y d) en términos de los fasores vectoriales de campo ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) y los fasores fuente (ρ_v, $\mathbf{J}$) en un medio simple (lineal, isótropo y homogéneo).

Ecuaciones de Maxwell con dependencia armónica con el tiempo en términos de fasores

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \tag{6-80a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}, \tag{6-80b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v/\epsilon, \tag{6-80c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \tag{6-80d}$$

Para simplificar las expresiones hemos omitido los argumentos de las coordenadas espaciales y el subíndice s que indican una cantidad fasorial. El hecho de que se usen

[†] Si la referencia temporal no se especifica de forma explícita, por costumbre se toma como $\cos \omega t$

las mismas notaciones para fasores y para sus cantidades correspondientes dependientes del tiempo no debe crear mucha confusión, ya que en lo que queda del libro trataremos casi exclusivamente con campos con dependencia armónica con el tiempo (y por consiguiente con fasores). Cuando sea necesario distinguir una cantidad instantánea de un fasor, la dependencia temporal de la cantidad instantánea se indicará de forma explícita con la inclusión de t en el argumento.

PREGUNTA DE REPASO

P.6-26 Analice las ventajas y desventajas del uso de fasores en el electromagnetismo.

COMENTARIOS

1. Las cantidades fasoriales no son funciones de t.
2. Las funciones temporales instantáneas no pueden contener números complejos.
3. Toda expresión electromagnética que contenga j debe ser necesariamente una relación de fasores.

Podemos escribir la ecuación de onda con dependencia armónica con el tiempo (6-58) de un potencial escalar V en términos de fasores, de la siguiente manera

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon(j\omega)^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon},$$

o

Ecuación de Helmholtz para un potencial escalar V

$$\boxed{\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon},} \tag{6-81}$$

donde

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u_p}, \tag{6-82a}$$

o

Definición del número de onda

$$k = \frac{2\pi f}{u_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6-82b}$$

se denomina ***número de onda***. Es una medida del número de longitudes de onda en un intervalo de 2π. De manera análoga, la forma fasorial de una ecuación de onda con dependencia armónica con el tiempo (6-57) para el potencial vector $\mathbf{A}$ es

Ecuación de Helmholtz para un potencial vector A

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}.} \tag{6-83}$$

Las ecuaciones (6-81) y (6-83) se conocen como ***ecuaciones no homogéneas de Helmholtz***.

■ **EJERCICIO 6.13** Escriba la forma fasorial de la condición de Lorentz para los potenciales, ecuación (6-56).

PREGUNTA DE REPASO

P.6-27 Defina el *número de onda*. ¿Cuál es su unidad en el SI?

COMENTARIOS

1. Las ecuaciones de Helmholtz son ecuaciones de onda con dependencia armónica con el tiempo en términos de fasores.
2. El número de onda depende de las características del medio y de la frecuencia de la onda, pero siempre es igual a 2π dividido por la longitud de onda.

La solución de la ecuación no homogénea de Helmholtz (6-81) para V puede obtenerse a partir de la ecuación (6-67). El potencial $V(R, t)$ implica un adelanto temporal R/u_p para ρ_v, que es equivalente a un adelanto en fase de $\omega(R/u_p)$ o kR. Esto requiere un factor multiplicador e^{-jkR} en notación fasorial. Por consiguiente, la *forma fasorial* de la ecuación (6-67) es

Forma fasorial del potencial escalar retardado

$$\boxed{V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho_v e^{-jkR}}{R}\, dv' \qquad \text{(V)}.} \tag{6-84}$$

De forma similar, la solución fasorial de la ecuación (6-83) para $\mathbf{A}$ es

Forma fasorial del potencial vector retardado

$$\boxed{\mathbf{A}(R) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}e^{-jkR}}{R}\, dv' \qquad \text{(Wb/m)}.} \tag{6-85}$$

Éstas son las expresiones de los potenciales escalar y vector retardados debido a fuentes con dependencia armónica con el tiempo. El desarrollo en serie de Taylor del factor exponencial e^{-jkR} es

$$e^{-jkR} = 1 - jkR + \frac{k^2R^2}{2} + \cdots. \tag{6-86}$$

Por lo tanto, si

$$kR = 2\pi\frac{R}{\lambda} \ll 1, \tag{6-87}$$

o si la distancia R es muy pequeña en comparación con la longitud de onda λ, e^{-jkR} puede aproximarse a 1. Las ecuaciones (6-84) y (6-85) se simplifican entonces a las expresiones estáticas de las ecuaciones (3-39) y (5-22), respectivamente

Procedimiento para determinar los campos eléctricos y magnéticos instantáneos

El procedimiento formal para determinar los campos eléctricos y magnéticos debidos a distribuciones de carga y corriente con dependencia armónica con el tiempo es el siguiente:

1. Halle los fasores $V(R)$ y $\mathbf{A}(R)$ a partir de las ecuaciones (6-84) y (6-85).
2. Calcule los fasores $\mathbf{E}(R) = -\nabla V - j\omega\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}(R) = \nabla \times \mathbf{A}$.
3. Determine los valores instantáneos $\mathbf{E}(R, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{E}(R)e^{j\omega t}]$ y $\mathbf{B}(R, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{B}(R)e^{j\omega t}]$ para una referencia coseno.

El grado de dificultad de un problema depende de lo difícil que sea realizar las integraciones del paso 1. En el capítulo 10 usaremos este procedimiento para determinar las propiedades de radiación de las antenas.

EJEMPLO 6-9

Si la intensidad de campo eléctrico de una onda electromagnética en un medio dieléctrico no conductor con permitividad $\epsilon = 9\epsilon_0$ y permeabilidad μ_0 es

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_y 5 \cos (10^9 t - \beta z) \quad \text{(V/m)}, \tag{6-88}$$

calcule la intensidad de campo magnético $\mathbf{H}$ y el valor de β.

SOLUCIÓN

La $\mathbf{E}(z, t)$ dada en la ecuación (6-88) es una función con dependencia armónica con el tiempo con frecuencia angular $\omega = 10^9$ (rad/s). Al usar fasores con referencia coseno tenemos

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_y 5e^{-j\beta z}. \tag{6-89}$$

Podemos calcular la intensidad de campo magnético a partir de la ecuación (6-80a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(z) &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \\
&= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 5e^{-j\beta z} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(-\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial z} E_y\right) \\
&= -\frac{1}{j\omega\mu_0}(\mathbf{a}_x j\beta 5e^{-j\beta z}) = -\mathbf{a}_x \frac{\beta}{\omega\mu_0} 5e^{-j\beta z}.
\end{aligned} \tag{6-90}$$

Para determinar β se usa la ecuación (6-80b). En el caso de un medio no conductor tenemos $\sigma = 0$, $\mathbf{J} = 0$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(z) &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial z} H_x\right) \\
&= \mathbf{a}_y \frac{\beta^2}{\omega^2\mu_0\epsilon} 5e^{-j\beta z}.
\end{aligned} \tag{6-91}$$

Al igualar las ecuaciones (6-89) y (6-91) hacemos

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon} = 3\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{3\omega}{c}$$
$$= \frac{3\times 10^9}{3\times 10^8} = 10 \qquad \text{(rad/m)}.$$

A partir de la ecuación (6-90) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(z) &= -\mathbf{a}_x \frac{5(10)}{(10^9)(4\pi 10^{-7})} e^{-j10z} \\ &= -\mathbf{a}_x 0.0398 e^{-j10z}.\end{aligned} \tag{6-92}$$

El fasor $\mathbf{H}(z)$ de la ecuación (6-92) corresponde a la siguiente función temporal instantánea:

$$\mathbf{H}(z, t) = -\mathbf{a}_x 0.0398 \cos(10^9 t - 10z) \qquad \text{(A/m)}. \tag{6-93}$$

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-28 Escriba la expresión fasorial del potencial eléctrico escalar $V(R)$ en función de la distribución de carga ρ_v.

P.6-29 Escriba la expresión fasorial del potencial magnético vector $\mathbf{A}(R)$ en términos de la distribución de corriente $\mathbf{J}$.

COMENTARIOS

Las intensidades de campo eléctrico y magnético de una onda electromagnética en un medio están claramente relacionadas. Deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell y no es posible especificar de manera independiente sus amplitudes y fases.

6-5.3 EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

En *medios no conductores libres de fuentes*, caracterizados por ϵ y $\mu (\sigma = 0)$, las ecuaciones de Maxwell (6-45a, b, c y d) se reducen a

Ecuaciones de Maxwell en medios no conductores libres de fuentes

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{6-94a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{6-94b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{6-94c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \tag{6-94d}$$

Las ecuaciones (6-94a, b, c y d) son ecuaciones diferenciales de primer grado en las dos variables **E** y **H**. Pueden combinarse para producir una ecuación de segundo grado que contenga únicamente **E** o **H**. Para esto, tomamos el rotacional de la ecuación (6-94a) y usamos la ecuación (6-94b):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Sin embargo, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$, por la ecuación (6-94c). Por lo tanto, tenemos

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \tag{6-95}$$

o, dado que $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Ecuación de onda homogénea para E

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{u_p^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.} \tag{6-96}$$

También podemos obtener una ecuación para **H** de forma similar

Ecuación de onda homogénea para H

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{u_p^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.} \tag{6-97}$$

Las ecuaciones (6-96) y (6-97) son las ***ecuaciones de onda vectoriales homogéneas***

En coordenadas cartesianas podemos descomponer las ecuaciones (6-96) y (6-97) en tres ecuaciones de ondas escalares, homogéneas y unidimensionales. Cada componente de **E** y **H** satisfará una ecuación exactamente igual a la (6-61), cuya solución representa ondas. En el capítulo siguiente analizaremos con detalle el comportamiento ondulatorio en distintos ambientes.

Para campos con dependencia armónica con el tiempo es conveniente usar fasores. De esta manera, la ecuación (6-96) se convierte en

$$\nabla^2\mathbf{E}_s + \frac{\omega^2}{u_p^2}\mathbf{E}_s = 0,$$

o

Ecuación homogénea de Helmholtz para el fasor $\mathbf{E}_s$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E}_s + k^2\mathbf{E}_s = 0,} \tag{6-98†}$$

utilizando la ecuación (6-82a). De forma similar, la ecuación (6-97) conduce a

Ecuación homogénea de Helmholtz para el fasor $\mathbf{H}_s$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{H}_s + k^2\mathbf{H}_s = 0.} \tag{6-99†}$$

† Se ha añadido el subíndice s para subrayar que $\mathbf{E}_s$ y $\mathbf{H}_s$ son fasores y que no son lo mismo que **E** y **H** dependientes del tiempo de las ecuaciones (6-96) y (6-97).

Las soluciones de las ecuaciones (6-98) y (6-99) representan ondas propagantes, las cuales serán el tema de estudio del capítulo siguiente.

PREGUNTA DE REPASO

P.6-30 Explique por qué puede haber soluciones no nulas de los campos eléctricos y magnéticos en regiones libres de fuentes.

COMENTARIOS

1. En medios no conductores libres de fuentes, **E** y **H** satisfacen la misma ecuación de onda homogénea, como lo muestran las ecuaciones (6-96) y (6-97).
2. Para ondas con dependencia armónica con el tiempo en una región libre de fuentes, los fasores $\mathbf{E}_s$ y $\mathbf{H}_s$ satisfacen la misma ecuación homogénea de Helmholtz, como lo muestran las ecuaciones (6-98) y (6-99).
3. Las ecuaciones de Maxwell, y por consiguiente las ecuaciones de onda y de Helmholtz, no imponen límite a la frecuencia de las ondas.

El espectro electromagnético y sus aplicaciones

El espectro electromagnético que se ha investigado experimentalmente se extiende desde frecuencias muy bajas pasando por las de la radio, televisión, microondas, infrarrojo, luz visible, ultravioleta, rayos X y frecuencias de rayos gamma (γ) hasta frecuencias que exceden 10^{24} (Hz). En la figura 6-8 se muestra el espectro electromagnético dividido en intervalos de frecuencia y longitud de onda en escalas logarítmicas, de acuerdo con su aplicación y su existencia natural.

El término "microonda" es un poco nebuloso e impreciso; puede significar ondas electromagnéticas por encima de una frecuencia de 1 (GHz) hasta el límite inferior de la banda infrarroja, abarcando las regiones UHF, SHF, EHF y la región de ondas milimétricas. El intervalo de longitudes de onda de la luz visible va del rojo profundo en 720 (nm) al violeta en 380 (nm), o de 0.72 (μm) a 0.38 (μm), correspondiente a un intervalo de frecuencias de 4.2×10^{14} (Hz) a 7.9×10^{14} (Hz). También se presentan las bandas usadas para radar, comunicación vía satélite, ayudas para la navegación, televisión (TV), radio FM y AM, radio de banda ciudadana (CB), sonar y otras aplicaciones. Las frecuencias por debajo del intervalo VLF pocas veces se emplean para transmisión sin hilos, ya que se requerirían antenas enormes para la radiación eficiente de las ondas electromagnéticas y porque estas frecuencias bajas tienen una razón de datos muy reducida. Se ha propuesto el uso de estas frecuencias para la comunicación global estratégica con submarinos inmersos en agua de mar conductora. En el trabajo con radar se ha encontrado conveniente asignar letras del alfabeto a las diferentes bandas de frecuencia de microondas; éstas se listan en la tabla 6-4.

El espectro de luz visible

Transmisión sin hilos

Bandas de radar de microondas

En el capítulo siguiente analizaremos las características de las ondas electromagnéticas planas y examinaremos su comportamiento al propagarse por fronteras discontinuas.

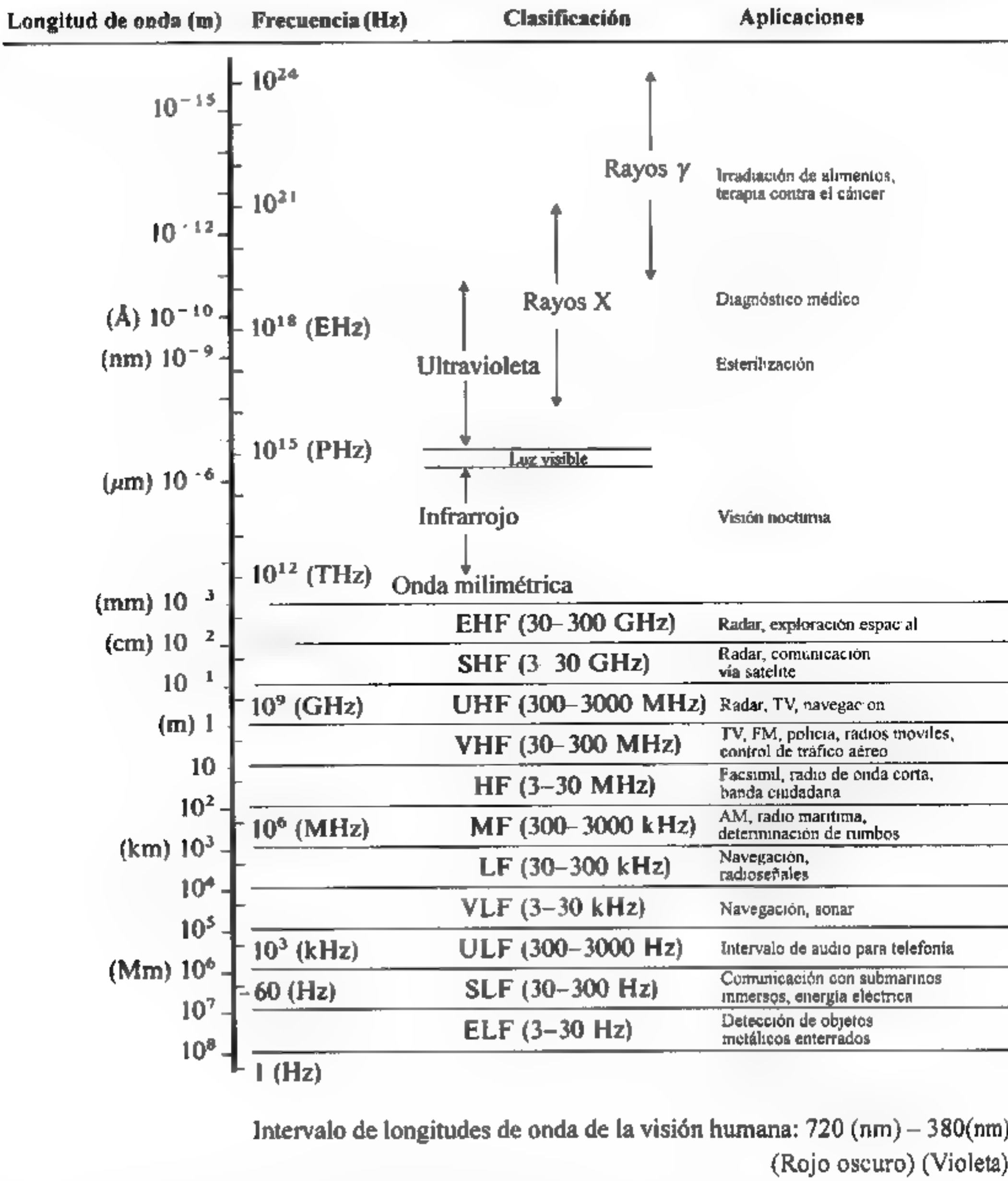


FIGURA 6-8 Espectro de las ondas electromagnéticas.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-31 ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda de la luz visible?

P.6-32 ¿Por qué rara vez se usan en la transmisión sin hilos las frecuencias por debajo del intervalo VLF?

TABLA **6-4** DESIGNACIONES DE LAS BANDAS DE RADAR A FRECUENCIAS DE MICROONDAS

Banda	Intervalo de frecuencias (GHz)	Intervalo de longitudes de onda (cm)
U	40–60	0.75–0.50
Ka	26.5–40	1.13–0.75
K	18–26.5	1.67–1.13
Ku	12.4–18	2.42–1.67
X	8–12.4	3.75–2.42
C	4–8	7.5–3.75
S	2–4	15–7.5
L	1–2	30–15

COMENTARIOS

1. Las ondas electromagnéticas de *cualquier frecuencia* se propagan en un medio con la misma velocidad, $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
2. La frecuencia de funcionamiento de los hornos de microondas es de unos 2.45 (GHz).

RESUMEN

En situaciones variables con el tiempo, los campos eléctricos y magnéticos están acoplados y ya no son suficientes los postulados que presentamos en los capítulos anteriores para los campos estáticos. En este capítulo

- agregamos un postulado fundamental para la inducción electromagnética;
- presentamos la ley de Faraday que relaciona cuantitativamente la fuerza electromotriz inducida en un circuito y la razón temporal de cambio del flujo ligado;
- explicamos que la fuerza electromotriz inducida puede descomponerse en dos partes: una fuerza electromotriz estática y una fuerza electromotriz cinética (por corte de flujo);
- analizamos las características de los transformadores ideales;
- obtuvimos un conjunto de cuatro ecuaciones de Maxwell (dos de divergencia y dos de rotacional) consistentes con la ecuación de continuidad;
- consideramos las condiciones generales en la frontera de los vectores de campo en la superficie de separación de regiones contiguas con parámetros constitutivos diferentes;
- expresamos las intensidades de campo eléctrico y magnético en términos de una función de potencial eléctrico escalar V y una función de potencial magnético vector $\mathbf{A}$,

  a) la ecuación no homogénea de Helmholtz para $\mathbf{E}$, y

- derivamos las ecuaciones de onda no homogéneas para V y $\mathbf{A}$,
- presentamos el concepto de los potenciales retardados,
- convertimos las ecuaciones de onda en ecuaciones de Helmholtz para los campos con dependencia armónica con el tiempo, y
- analizamos el espectro electromagnético en el espacio libre de fuentes.

PROBLEMAS

P.6-1 Exprese la fuerza electromotriz estática inducida en una espira estacionaria en términos del potencial vector variable con el tiempo $\mathbf{A}$.

P.6-2 El circuito de la figura 6-9 está situado en un campo magnético

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 3 \cos\left(5\pi 10^7 t - \tfrac{1}{3}\pi y\right) \qquad (\mu\mathrm{T}).$$

Suponga que $R = 15$ (Ω) y calcule la corriente i.

P.6-3 Una espira conductora rectangular estacionaria de anchura w y altura h está situada cerca de un alambre muy largo por el que circula una corriente i_1, como se ilustra en la figura 6-10. Suponga que $i_1 = I_1 \operatorname{sen} \omega t$ y que la autoinductancia de la espira rectangular es L. Calcule la corriente inducida i_2 en la espira.
SUGERENCIA: Use fasores

P.6-4 Suponga en la figura 6-10 que hay una corriente constante $i_1 = I_0$, pero que la espira rectangular se aleja a velocidad constante $\mathbf{u} = \mathbf{a}_y u_0$. Determine i_2 cuando la espira está en la posición indicada en la figura.

P.6-5 Una espira conductora cuadrada de 10 (cm) por 10 (cm) y resistencia $R = 0.5$ (Ω) gira sobre uno de sus lados en un campo magnético constante $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y 0.04$ (T) con

FIGURA 6-9 Circuito en un campo magnético variable con el tiempo (Prob. P.6-2).

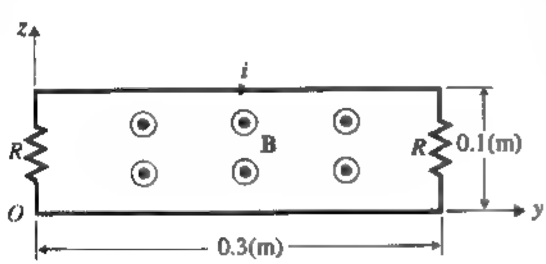
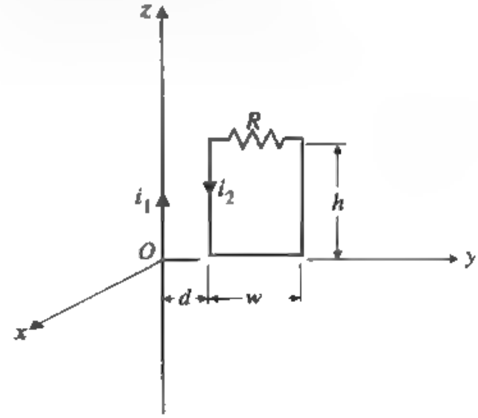


FIGURA 6-10 Espira rectangular cerca de un alambre muy largo por el que circula una corriente (para los problemas P.6-3 y P.6-4).



frecuencia angular $\omega = 100\pi$ (rad/s), como se ilustra en la figura 6-11. Suponga que la espira está inicialmente en el plano xz y calcule la corriente inducida i

a) si se ignora la autoinductancia de la espira, y

b) si la autoinductancia de la espira es 3.5 (mH).

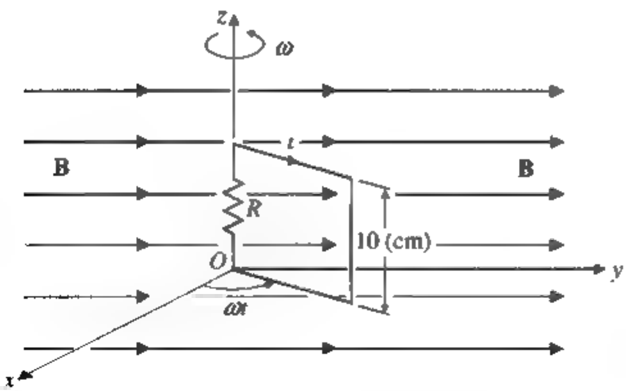


FIGURA 6-11 Espira rectangular giratoria en un campo magnético constante (Prob. P.6-5).

P.6-6 Una barra conductora deslizante oscila sobre dos rieles conductores paralelos en un campo magnético que varía senoidalmente

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z 5 \cos \omega t \qquad \text{(mT)},$$

como se muestra en la figura 6-12. La posición de la barra deslizante está expresada por $x = 0.35(1 - \cos \omega t)$ (m) y los rieles terminan en una resistencia $R = 0.2$ (Ω). Calcule i

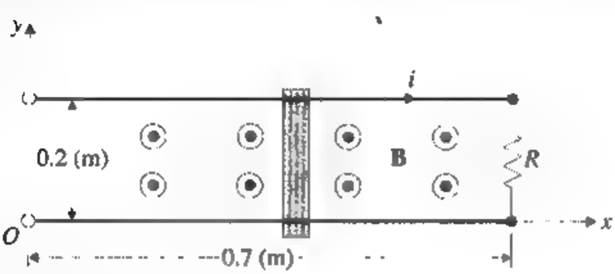


FIGURA 6-12 Barra conductora que se desliza sobre rieles paralelos en un campo magnético variable con el tiempo (Prob. P.6-6).

P.6-7 Determine la frecuencia a la cual la intensidad de un campo eléctrico con dependencia armónica con el tiempo causa una densidad de corriente de conducción y una densidad de corriente de desplazamiento de igual magnitud en

a) el agua de mar con $\epsilon_r = 72$ y $\sigma = 4$ (S/m), y

b) la tierra húmeda con $\epsilon_r = 2.5$ y $\sigma = 10^{-3}$ (S/m).

P.6-8 En los cálculos concernientes al efecto electromagnético de las corrientes en un buen conductor generalmente se ignora la corriente de desplazamiento, incluso a frecuencias de microondas.

a) Suponiendo $\epsilon_r = 1$ y $\sigma = 5.70 \times 10^7$ (S/m) para el cobre, compare la magnitud de la densidad de corriente de desplazamiento con la densidad de corriente de conducción a 100 (GHz).

b) Escriba la ecuación diferencial que rige la intensidad de campo magnético **H** en un buen conductor libre de fuentes.

P.6-9 Una lámina infinita con corriente $\mathbf{J} = \mathbf{a}_x 5$ (A/m), coincidente con el plano xy, separa el aire (región 1, $z > 0$) de un medio con $\mu_{r2} = 2$ (región 2, $z < 0$). Si $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_x 30 + \mathbf{a}_y 40 + \mathbf{a}_z 20$ (A/m), calcule

a) $\mathbf{H}_2$,

b) $\mathbf{B}_2$,

c) el ángulo α_1 que forma $\mathbf{B}_1$ con el eje z, y

d) el ángulo α_2 que forma $\mathbf{B}_2$ con el eje z.

P.6-10 Escriba las condiciones en la frontera que existen en la superficie de separación del espacio libre y un material magnético con permeabilidad infinita (una aproximación)

P.6-11 Demuestre por sustitución directa que cualquier función de $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ diferenciable dos veces es una solución de la ecuación de onda homogénea (Ec. (6-61))

P.6-12 Escriba las ecuaciones escalares para las componentes del conjunto de las cuatro ecuaciones de Maxwell (6-80a, b, c y d):

a) en coordenadas cartesianas si los fasores de campo son únicamente funciones de z, y

b) en coordenadas esféricas si los fasores de campo son únicamente funciones de R

P.6-13 Suponga $E(z, t) = 50 \cos(2\pi 10^9 t - kz)$ (V/m) en el aire. Dibuje las siguientes formas de onda y calcule las abscisas:

a) $E(t)$ en función de t en $z = 100.125\lambda$, donde λ es la longitud de onda,

b) $E(t)$ en función de t en $z = -100.125\lambda$, y

c) $E(z)$ en función de z en $t = T/4$, donde T es el periodo de la onda.

P.6-14 El campo eléctrico de una onda electromagnética

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_0 \cos\left[10^8\pi\left(t - \frac{z}{c}\right) + \psi\right] \qquad \text{(V/m)}$$

es la suma de

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{a}_x 0.03 \operatorname{sen} 10^8\pi\left(t - \frac{z}{c}\right) \qquad \text{(V/m)}$$

y

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{a}_x 0.04 \cos\left[10^8\pi\left(t - \frac{z}{c}\right) - \frac{\pi}{3}\right]. \qquad \text{(V/m)}.$$

Calcule E_0 y ψ.

P.6-15 La intensidad de campo magnético de una onda electromagnética

$$\mathbf{H}(R, t) = \mathbf{a}_\phi H_0 \cos(\omega t - kR) \qquad \text{(A/m)}$$

es la suma de

$$\mathbf{H}_1(R, t) = \mathbf{a}_\phi 10^{-4} \operatorname{sen}(\omega t - kR) \qquad \text{(A/m)}$$

y

$$\mathbf{H}_2(z, t) = \mathbf{a}_\phi 2 \times 10^{-4} \cos(\omega t - kR + \alpha) \qquad \text{(A/m)}.$$

Calcule H_0 y α.

P.6-16 Comience con las ecuaciones fasoriales de Maxwell (6-80a, b, c y d) en un medio simple con distribuciones de carga y corriente con dependencia armónica con el tiempo y obtenga

a) la ecuación no homogénea de Helmholtz para **E**, y
b) la ecuación no homogénea de Helmholtz para **H**.

P.6-17 Un alambre conductor corto por el que circula una corriente con dependencia armónica con el tiempo es una fuente de ondas electromagnéticas. Suponiendo que fluye una corriente uniforme $i(t) = I_0 \cos \omega t$ en un alambre muy corto $d\ell$ colocado sobre el eje z,

a) determine en coordenadas esféricas el potencial vector fasorial retardado **A** a una distancia R, y
b) calcule la intensidad de campo magnético **H** a partir de **A**.

P.6-18 En un cable coaxial con aire como dieléctrico que tiene un conductor interior de radio a y conductor exterior de radio interior b existe una onda electromagnética de 60 (MHz). Suponiendo que los conductores son perfectos y que la forma fasorial de la intensidad de campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{E_0}{r} e^{-jkz} \text{(V/m)}, \qquad a < r < b,$$

a) calcule k,
b) determine **H** a partir de la ecuación $\nabla \times \mathbf{E}$, y
c) calcule las densidades superficiales de corriente en los conductores interior y exterior.

P.6-19 Se sabe que la intensidad de campo eléctrico de una onda esférica en el espacio libre es

$$\mathbf{E}(R, \theta; t) = \mathbf{a}_\theta \frac{10^{-3}}{R} \operatorname{sen}\theta \cos(2\pi 10^9 t - kR) \qquad \text{(V/m)}.$$

Determine la intensidad de campo magnético $\mathbf{H}(R, \theta; t)$ y el valor de k.

P.6-20 Dado

$$\mathbf{E}(x, z; t) = \mathbf{a}_y 0.1 \operatorname{sen}(10\pi x) \cos(6\pi 10^9 t - \beta z) \qquad \text{(V/m)}$$

en el aire, determine $\mathbf{H}(x, z; t)$ y β.

P.6-21 Dado

$$\mathbf{H}(x, z; t) = \mathbf{a}_y 2 \cos(15\pi x) \operatorname{sen}(6\pi 10^9 t - \beta z) \qquad \text{(A/m)}$$

en el aire, determine $\mathbf{E}(x, z; t)$ y β.

CAPÍTULO 7

7-1 DESCRIPCIÓN GENERAL En la sección 6-5 vimos que en un medio simple no conductor libre de fuentes es posible combinar las ecuaciones de Maxwell para generar ecuaciones de onda vectoriales homogéneas en **E** y **H**. Estas dos ecuaciones, (6-96) y (6-97), tienen exactamente la misma forma. Por ejemplo, la ecuación de onda para **E**, libre de fuentes, es

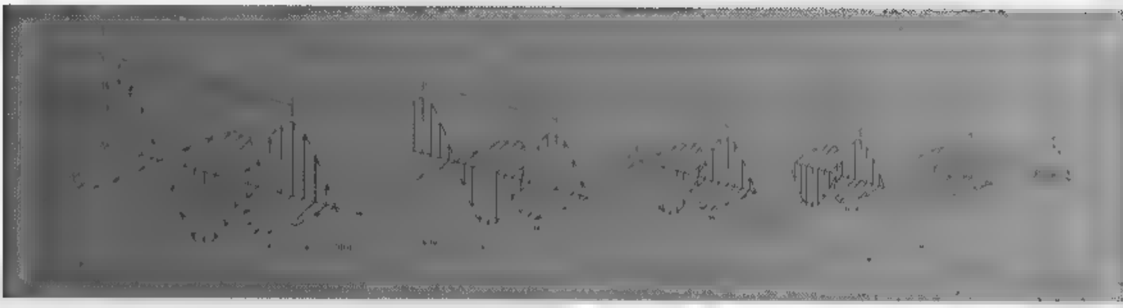
$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{u_p^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad (6\text{-}96)(7\text{-}1)$$

En coordenadas cartesianas podemos descomponer la ecuación (7-1) en tres ecuaciones de onda escalares, homogéneas y unidimensionales. Cada una de estas ecuaciones para las componentes tendrá la forma de la ecuación (6-61), cuya solución representa una onda que se propaga en el medio con una velocidad

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \qquad (6\text{-}63)(7\text{-}2)$$

Puesto que los campos **E** y **H** variables con el tiempo están acoplados a través de las ecuaciones de rotacional de Maxwell, (6-94a) y (6-94b), el resultado es una onda electromagnética, la cual usaremos para explicar la acción electromagnética a distancia. El estudio del comportamiento de las ondas con una dependencia espacial unidimensional es el tema principal de este capítulo.

Daremos inicio al capítulo con el estudio de la propagación de los campos de ondas planas con dependencia armónica con el tiempo en un medio homogéneo ilimitado. Presentaremos los parámetros del medio, como la impedancia intrínseca, la constante de atenuación y la constante de fase. Se explicará el significado de la ***profundidad***



Ondas electromagnéticas planas

de penetración, la profundidad a la que penetra una onda en un buen conductor. Las ondas electromagnéticas transportan potencia electromagnética. Analizaremos el concepto del ***vector de Poynting***, una densidad de flujo de potencia.

Estudiaremos el comportamiento de una onda plana que incide en forma oblicua sobre un plano límite. También examinaremos las leyes que rigen la reflexión y la refracción de ondas planas, así como las condiciones de la no reflexión y la reflexión total.

Definición de una onda plana uniforme

Una ***onda plana uniforme*** es una solución particular de las ecuaciones de Maxwell teniendo **E** la misma dirección, magnitud y fase en planos infinitos perpendiculares a la dirección de propagación (lo mismo para **H**). De manera estricta, una onda plana uniforme no existe en la práctica, ya que para crearla se requeriría una fuente de extensión infinita. Sin embargo, si estamos lo suficientemente alejados de la fuente, el ***frente de onda*** (la superficie de fase constante) será casi esférica y una porción muy pequeña de una esfera gigante es casi un plano. Las características de las ondas planas uniformes son muy simples y su estudio es fundamentalmente importante tanto desde el punto de vista teórico como del práctico.

Definición de frente de onda

7-2 ONDAS PLANAS EN MEDIOS SIN PÉRDIDAS

En este capítulo y los siguientes centraremos nuestra atención en el comportamiento ondulatorio en el estado estacionario senoidal. Representaremos las cantidades senoidales con fasores, sin usar el subíndice *s* por cuestiones de sencillez. En aquellos casos donde

se analicen funciones temporales instantáneas, indicaremos de manera explícita la dependencia temporal de las cantidades relevantes usando el símbolo t en sus argumentos. Las ecuaciones de onda libres de fuentes en un medio simple no conductor se convierten en una ecuación vectorial homogénea de Helmholtz (véase la Ec.(6-98)):

Ecuación vectorial homogénea de Helmholtz para E en medios simples no conductores

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0,} \tag{7-3}$$

donde k es el número de onda. En un medio caracterizado por ϵ y μ tenemos, a partir de la ecuación (6-82a),

$$\boxed{k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u_p} \qquad \text{(rad/m).}} \tag{7-4}$$

La ecuación (7-3) en coordenadas cartesianas equivale a tres ecuaciones escalares de Helmholtz, para las componentes E_x, E_y y E_z. Si escribimos la ecuación para la componente E_x tenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)E_x = 0. \tag{7-5}$$

Considere una onda plana uniforme caracterizada por una E_x uniforme (magnitud uniforme y fase constante) sobre superficies planas perpendiculares a z, es decir,

$$\partial^2 E_x/\partial x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \partial^2 E_x/\partial y^2 = 0.$$

La ecuación (7-5) se simplifica a

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0. \tag{7-6}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria porque E_x, un fasor, depende únicamente de z.

Es fácil ver que la solución de la ecuación (7-6) es

$$\begin{aligned} E_x(z) &= E_x^+(z) + E_x^-(z) \\ &= E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}, \end{aligned} \tag{7-7}$$

donde E_0^+ y E_0^- son constantes arbitrarias que deben determinarse a partir de las condiciones en la frontera (condiciones de contorno).

Examinemos ahora el primer término fasorial del lado derecho de la ecuación (7-7) y escribamos

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_x^+(z) = \mathbf{a}_x E_0^+ e^{-jkz}. \tag{7-8}$$

La expresión instantánea del fasor $\mathbf{E}$ dado por la ecuación (7-8) es, para una referencia coseno,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \mathbf{a}_x E_x^+(z, t) = \mathbf{a}_x \mathscr{R}e[E_x^+(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_x \mathscr{R}e[E_0^+ e^{j(\omega t - kz)}] = \mathbf{a}_x E_0^+ \cos(\omega t - kz). \end{aligned} \tag{7-9}$$

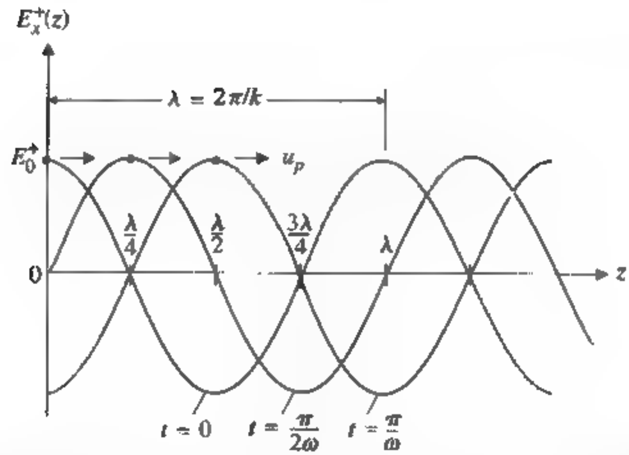


FIGURA 7-1 Onda que se propaga en la dirección z positiva $E_x^+(z, t) = E_0^+ \cos(\omega t - kz)$, para distintos valores de t.

Características de una onda viajera

En la figura 7-1 se ha representado gráficamente la ecuación (7-9) para varios valores de t. En $t = 0$, $E_x^+(z, 0) = E_0^+ \cos kz$ es una curva coseno con amplitud E_0^+. En instantes sucesivos, la curva de hecho *se propaga en la dirección z positiva*. Tenemos entonces una ***onda viajera***. Si nos centramos en un punto específico de la onda (un punto de una fase en particular), asignamos $\cos(\omega t - kz) =$ una constante o

$$\omega t - kz = \text{fase constante},$$

de lo cual obtenemos

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \tag{7-10}$$

Definición de la velocidad de fase

La ecuación (7-10) asegura que la velocidad de propagación de un frente de fase constante (la ***velocidad de fase***) es igual a la velocidad de la luz. El número de onda k tiene una relación clara con la longitud de onda.

$$\boxed{k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda},} \tag{7-11}$$

como se señaló en las ecuaciones (6-82a y b).

Podemos ver, sin tener que volver a representar gráficamente, que el segundo término fasorial del lado derecho de la ecuación (7-7), $E_0^- e^{jkz}$, representa una onda cosenoidal que se propaga en la dirección $-z$ con la misma velocidad u_p. Si nos centramos sólo en la onda que se propaga en la dirección $+z$, entonces hacemos $E_0^- = 0$. Sin embargo, si hay discontinuidades en el medio, también habrá que considerar las ondas reflejadas que se propagan en dirección opuesta, como veremos más adelante en este capítulo.

El campo magnético asociado **H** puede determinarse a partir de la ecuación $\nabla \times \mathbf{E}$ (6-80a):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x^+(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu(\mathbf{a}_x H_x^+ + \mathbf{a}_y H_y^+ + \mathbf{a}_z H_z^+),$$

lo cual nos lleva a

$$H_x^+ = 0, \tag{7-12a}$$

$$H_y^+ = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z}, \tag{7-12b}$$

$$H_z^+ = 0. \tag{7-12c}$$

De esta manera, H_y^+ es la única componente de **H** distinta de cero correspondiente a **E** en la ecuación (7-8). Además, dado que

$$\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(E_0^+ e^{-jkz}) = -jkE_x^+(z),$$

la ecuación (7-12b) produce

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y^+(z) &= \mathbf{a}_y \frac{k}{\omega\mu} E_x^+(z) \\ &= \mathbf{a}_y \frac{1}{\eta} E_x^+(z). \end{aligned} \tag{7-13}$$

Hemos introducido una cantidad nueva, η, en la ecuación (7-13): $\eta = \omega\mu/k$ o, lo que es igual,

Impedancia intrínseca de un medio

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad (\Omega),} \tag{7-14}$$

denominada ***impedancia intrínseca*** del medio. En el aire tenemos $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 377$ (Ω). $H_y^+(z)$ está en fase con $E_x^+(z)$ y podemos escribir la expresión instantánea del campo **H** como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, t) = \mathbf{a}_y H_y^+(z, t) &= \mathbf{a}_y \mathcal{R}e[H_y^+(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_y \frac{E_0^+}{\eta}\cos(\omega t - kz). \end{aligned} \tag{7-15}$$

■ **EJERCICIO 7.1** Partiendo de la expresión fasorial $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x(z) = \mathbf{a}_x E_0\, e^{jkz}$ de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección $-z$ determine el $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y(z)$ asociado. Calcule la razón $E_x(z)/H_y(z)$.

RESPUESTA : $E_x/H_y^- = -\eta$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-1 Defina una *onda plana uniforme.*

P.7-2 ¿Qué es un *frente de onda*?

P.7-3 ¿Qué es una onda viajera?

P.7-4 Defina la *velocidad de fase.*

P.7-5 Defina la *impedancia intrínseca* de un medio. ¿Cuál es el valor de la impedancia intrínseca del espacio libre?

COMENTARIOS

1. La velocidad de fase de una onda electromagnética en un medio sin pérdidas es independiente de su frecuencia y de su dirección de propagación.
2. La razón de las magnitudes de **E** y **H** en una onda plana uniforme es la impedancia intrínseca del medio.
3. La dirección en la que el campo **E** corta a la dirección del campo **H** nos da la dirección de la propagación de onda; las tres direcciones son mutuamente perpendiculares.

EJEMPLO 7-1

Una onda plana uniforme con $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ se propaga en un medio simple sin pérdidas ($\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$) en la dirección $+z$. Suponga que E_x es senoidal con frecuencia 100 (MHz) y que su valor máximo es $+10^{-4}$ (V/m) en $t = 0$ y $z = \frac{1}{8}$(m).

a) Escriba la expresión instantánea de **E** para cualquier t y z.

b) Escriba la expresión instantánea de **H**.

c) Determine las posiciones donde E_x tiene un máximo positivo cuando $t = 10^{-8}$ (s).

SOLUCIÓN

Primero hallamos k:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

$$= \frac{2\pi 10^8}{3 \times 10^8}\sqrt{4} = \frac{4\pi}{3} \qquad \text{(rad/m)}.$$

a) Si usamos $\cos \omega t$ como referencia, la expresión instantánea de **E** es

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_x = \mathbf{a}_x 10^{-4} \cos(2\pi 10^8 t - kz + \psi).$$

Puesto que E_x es igual a $+10^{-4}$ cuando el argumento de la función coseno es igual a cero, es decir, cuando

$$2\pi 10^8 t - kz + \psi = 0,$$

tenemos, en $t = 0$ y $z = \frac{1}{8}$,

$$\psi = kz = \left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \text{(rad)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x 10^{-4} \cos\left(2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \mathbf{a}_x 10^{-4} \cos\left[2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right] \qquad \text{(V/m)}.$$

Esta expresión muestra un desplazamiento de $\frac{1}{8}$ (m) en la dirección $+z$ y pudo haberse escrito directamente a partir del enunciado del problema.

b) La expresión instantánea de $\mathbf{H}$ es

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y = \mathbf{a}_y \frac{E_x}{\eta},$$

donde

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 60\pi \qquad (\Omega).$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{a}_y \frac{10^{-4}}{60\pi} \cos\left[2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right] \qquad \text{(A/m)}.$$

c) En $t = 10^{-8}$, igualamos el argumento de la función coseno a $\pm 2n\pi$ para que E_x sea un máximo positivo:

$$2\pi 10^8(10^{-8}) - \frac{4\pi}{3}\left(z_m - \frac{1}{8}\right) = \pm 2n\pi,$$

de lo cual obtenemos

$$z_m = \frac{13}{8} \pm \frac{3}{2} n \quad \text{(m)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad z_m > 0.$$

Si examinamos con mayor detenimiento este resultado, observaremos que la longitud de onda en el medio es

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{3}{2} \qquad \text{(m)}.$$

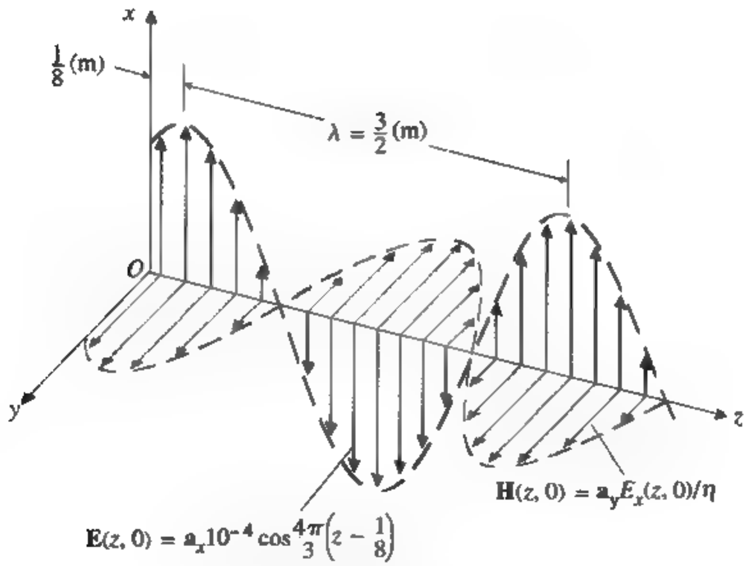


FIGURA 7-2 Campos **E** y **H** de una onda plana uniforme en $t = 0$ (ejemplo 7-1)

Por lo tanto, el valor máximo positivo de E_x ocurre en

$$z_m = \frac{13}{8} \pm n\lambda \qquad \text{(m)}.$$

En la figura 7-2 se muestran los campos **E** y **H** como funciones de z para el tiempo de referencia $t = 0$.

7-2.1 EFECTO DOPPLER

Significado del efecto Doppler

Cuando hay movimiento relativo entre una fuente con dependencia armónica con el tiempo y un receptor, la frecuencia de la onda detectada por el receptor tiende a ser diferente de la que emite la fuente. Este fenómeno se conoce como ***efecto Doppler***†. El efecto Doppler se manifiesta en la acústica y en el electromagnetismo. Es probable que usted haya experimentado los cambios en frecuencia del silbato de una locomotora que se mueve a gran velocidad. A continuación se explica el efecto Doppler.

Supongamos que la fuente (transmisor) T de una onda con dependencia armónica con el tiempo de frecuencia f se mueve con velocidad **u** en una dirección que forma

† C. Doppler (1803-1853).

(a) En $t = 0$. (b) En $t = \Delta t$.

FIGURA 7-3 Ilustración del efecto Doppler.

un ángulo θ relativo a la línea recta entre el transmisor y un receptor estacionario, R, como se ilustra en la figura 7-3(a). La onda electromagnética emitida por T en el aire en un tiempo de referencia $t = 0$ llegará a R en

$$t_1 = \frac{r_0}{c}. \tag{7-16}$$

En un instante posterior $t = \Delta t$, T se ha movido a una posición nueva T' y la onda emitida por T' en ese instante llegará a R en

$$\begin{aligned} t_2 &= \Delta t + \frac{r'}{c} \\ &= \Delta t + \frac{1}{c}\left[r_0^2 - 2r_0(u\,\Delta t)\cos\theta + (u\,\Delta t)^2\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{7-17}$$

Si $(u\Delta t)^2 \ll r_0^2$, la ecuación (7-17) se convierte en

$$t_2 \cong \Delta t + \frac{r_0}{c}\left(1 - \frac{u\,\Delta t}{r_0}\cos\theta\right).$$

Por lo tanto, el tiempo transcurrido en R, $\Delta t'$, correspondiente a Δt en T es

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t_2 - t_1 \\ &= \Delta t\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right), \end{aligned} \tag{7-18}$$

que es diferente de Δt.

Si Δt representa un periodo de la fuente con dependencia armónica con el tiempo (es decir, si $\Delta t = 1/f$), la frecuencia de la onda que recibe R es

$$\begin{aligned} f' = \frac{1}{\Delta t'} &= \frac{f}{\left(1 - \dfrac{u}{c}\cos\theta\right)} \\ &\cong f\left(1 + \frac{u}{c}\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{7-19}$$

para el caso usual de $(u/c)^2 \ll 1$. La ecuación (7-19) indica de manera clara que la frecuencia percibida por R es más alta que la frecuencia transmitida cuando T se mueve hacia R. A la inversa, la frecuencia percibida es más baja que la transmitida si T se aleja de R. Se obtienen resultados similares si R se mueve y T permanece estacionario

Principio de funcionamiento de un radar de vigilancia de velocidad

El efecto Doppler es la base de funcionamiento del radar (Doppler) empleado por la policía para conocer la velocidad con la que se mueve un vehículo. El desplazamiento en frecuencia de la onda recibida, que se refleja en un vehículo en movimiento, es proporcional a la velocidad del vehículo y puede detectarse y presentarse en una unidad manual. El efecto Doppler es también la causa del efecto observado en astronomía del ***desplazamiento hacia el rojo*** de las rayas de absorción en el espectro de la luz emitida por una estrella lejana. A medida que la estrella se *aleja* a alta velocidad del observador en tierra, la frecuencia recibida se desplaza hacia el extremo *más bajo en frecuencia (rojo)* del espectro.

Fenómeno del desplazamiento hacia el rojo en la astronomía

■ EJERCICIO 7.2 Un tren viaja a 130 (km/hr) hacia un observador que se encuentra en una posición que forma un ángulo de 20° con la línea de visión. El tren hace sonar un silbato de 800 (Hz). ¿Cuál es la frecuencia percibida por el observador? (La velocidad del sonido es aproximadamente 340 (m/s).

RESPUESTA : 880 (Hz).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-6 ¿Qué es el efecto Doppler?

COMENTARIOS

La frecuencia de una onda detectada por un receptor es mayor que la que emitió el transmisor si éste se aproxima al receptor, y es menor si el transmisor se aleja de él.

7-2.2 ONDAS TRANSVERSALES ELECTROMAGNÉTICAS

Hemos visto que una onda plana uniforme caracterizada por $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ que se propaga en la dirección $+z$ tiene asociado un campo magnético $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$. Por lo tanto, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son perpendiculares entre sí y ambos son *transversales* a la dirección de propagación. Éste es el caso específico de una ***onda transversal electromagnética*** (TEM). A continuación examinaremos la propagación de una onda plana uniforme en una dirección arbitraria que no coincide necesariamente con un eje de las coordenadas.

Onda TEM

En lugar de $\mathbf{E}(z)$ en la ecuación (7-8), consideremos

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk_x x - jk_z z}, \tag{7-20}$$

que representa la intensidad eléctrica en la dirección y de una onda plana uniforme que se propaga en las direcciones $+x$ y $+z$. Si definimos un ***vector de número de onda***, $\mathbf{k}$, como

Expresión del vector de número de onda en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{k} = \mathbf{a}_x k_x + \mathbf{a}_z k_z = \mathbf{a}_k k, \tag{7-21}$$

y un vector de posición $\mathbf{R}$ del origen a un punto arbitrario

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z, \tag{7-22}$$

la ecuación (7-20) puede escribirse en forma escueta como

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{R}}. \tag{7-23}$$

Esta situación se ilustra en la figura 7-4. La relación

$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{R} =$ longitud $\overline{OP}$ (una constante)

es la ecuación del plano (lugar geométrico de los puntos extremos del vector de posición **R**) normal a $\mathbf{a}_k$, la dirección de propagación, y es un plano de fase constante y amplitud uniforme.

El campo magnético **H** asociado con el campo eléctrico de la ecuación (7-23) es, a partir de la ecuación (6-80a),

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E} = \frac{E_0}{\omega\mu}(-\mathbf{a}_x k_z + \mathbf{a}_z k_x)e^{-jk_x x - jk_z z}. \tag{7-24}$$

Podemos expresar la ecuación (7-24) en forma más general:

Determinación de H a partir de E de una onda plana uniforme

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu}\mathbf{a}_k \times \mathbf{E} = \frac{1}{\eta}\mathbf{a}_k \times \mathbf{E}.} \tag{7-25}$$

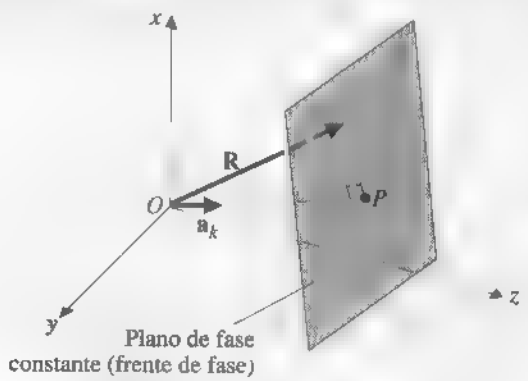
De esta manera es fácil determinar **H** usando la ecuación (7-25), si se conoce el valor de **E** de una onda plana uniforme que se propaga en una dirección determinada

■ **EJERCICIO 7.3** a) Escriba la expresión fasorial del campo eléctrico en dirección z de una onda plana uniforme en el aire con amplitud E_0 y frecuencia f, que se propaga en dirección $-y$

b) Escriba la expresión del campo magnético asociado.

RESPUESTA : (a) $\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_0 e^{j2\pi fy/c}$

FIGURA 7-4 Vector de posición y vector unitario de onda normal al frente de fase de una onda plana uniforme.



7-2.3 POLARIZACIÓN DE ONDAS PLANAS

Significado de la polarización de una onda uniforme

La ***polarización*** de una onda plana uniforme describe el comportamiento variable con el tiempo del vector de intensidad de campo eléctrico en un punto determinado del espacio. Por ejemplo, si el vector **E** de una onda plana permanece fijo en la dirección x ($\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$, donde E_x puede ser positivo o negativo), se dice que la onda está ***polarizada linealmente*** en la dirección x. No se requiere una descripción aparte del comportamiento del campo magnético, ya que la dirección de **H** está relacionada con la de **E**.

En algunos casos la dirección de **E** de una onda plana en un punto determinado puede cambiar con el tiempo. Considere la superposición de dos ondas polarizadas linealmente, una en la dirección x y la otra en la dirección y y retardada 90° (o $\pi/2$ rad) en la fase temporal. Usando la notación fasorial tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z) &= \mathbf{a}_x E_1(z) + \mathbf{a}_y E_2(z)\\ &= \mathbf{a}_x E_{10}e^{-jkz} - \mathbf{a}_y jE_{20}e^{-jkz},\end{aligned} \tag{7-26}$$

donde E_{10} y E_{20} son números reales que denotan las amplitudes de las dos ondas polarizadas. La expresión instantánea de **E** es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z,t) &= \mathscr{R}e\{[\mathbf{a}_x E_1(z) + \mathbf{a}_y E_2(z)]e^{j\omega t}\}\\ &= \mathbf{a}_x E_{10}\cos(\omega t - kz) + \mathbf{a}_y E_{20}\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Es conveniente asignar $z = 0$ al examinar el cambio de dirección de E en un punto determinado a medida que varía t. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0,t) &= \mathbf{a}_x E_1(0,t) + \mathbf{a}_y E_2(0,t)\\ &= \mathbf{a}_x E_{10}\cos\omega t + \mathbf{a}_y E_{20}\operatorname{sen}\omega t.\end{aligned} \tag{7-27}$$

Conforme ωt aumenta de 0 a $\pi/2$, π y $3\pi/2$, completando el ciclo en 2π, la punta del vector $\mathbf{E}(0, t)$ describirá una trayectoria geométrica elíptica en sentido contrario al de las agujas del reloj. En forma analítica tenemos

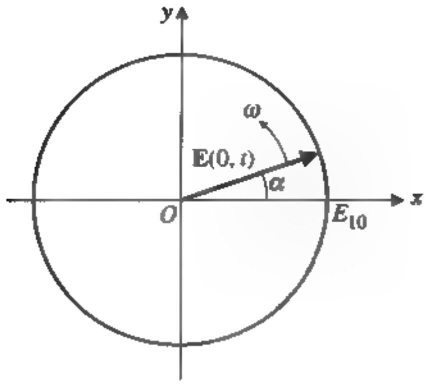
$$\cos\omega t = \frac{E_1(0,t)}{E_{10}}$$

y

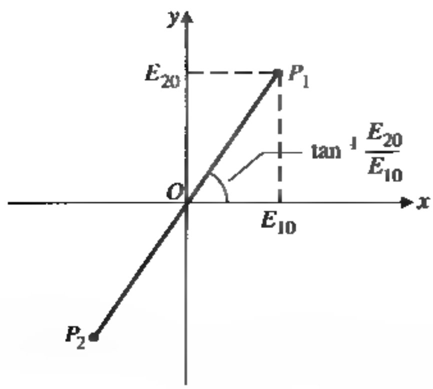
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\omega t &= \frac{E_2(0,t)}{E_{20}}\\ &= \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\left[\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right]^2},\end{aligned}$$

que nos conduce a la siguiente ecuación de una elipse:

$$\left[\frac{E_2(0,t)}{E_{20}}\right]^2 + \left[\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right]^2 = 1. \tag{7-28}$$



(a)



(b)

FIGURA 7-5 Diagrama de polarización para la suma de dos ondas polarizadas linealmente en cuadratura espacial en $z = 0$: (a) polarización circular, $E(0, t) = E_{10}(\mathbf{a}_x \cos \omega t + \mathbf{a}_y \operatorname{sen} \omega t)$; (b) polarización lineal, $\mathbf{E}(0, t) = (\mathbf{a}_x E_{10} + \mathbf{a}_y E_{20}) \cos \omega t$.

Significado de las ondas polarizadas elíptica y circularmente

De esta manera, **E**, la suma de dos ondas polarizadas linealmente en cuadratura tanto espacial como temporal, estará ***elípticamente polarizada*** si $E_{20} \neq E_{10}$ y ***circularmente polarizada*** si $E_{20} = E_{10}$. En la figura 7-5(a) se muestra un círculo de polarización genérico.

Cuando $E_{20} = E_{10}$, el ángulo instantáneo α que forma **E** con el eje x en $z = 0$ es

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{E_2(0, t)}{E_1(0, t)} = \omega t, \tag{7-29}$$

lo que indica que **E** gira a una razón uniforme con una velocidad angular ω en sentido *contrario al de giro de las agujas del reloj*. Si los dedos de la mano derecha siguen el sentido de giro de **E**, el pulgar apunta en la dirección de propagación de la onda

Onda polarizada circularmente de mano derecha (o positiva)

Ésta es una ***onda circularmente polarizada positiva*** o ***de mano derecha***

Si comenzamos con un $E_2(z)$, que va 90° ($\pi/2$ rad) *por delante* de $E_1(z)$ en fase temporal, las ecuaciones (7-26) y (7-27) serían, respectivamente,

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_{10}e^{-jkz} + \mathbf{a}_y jE_{20}e^{-jkz} \tag{7-30}$$

y

$$\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{a}_x E_{10}\cos \omega t - \mathbf{a}_y E_{20}\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{7-31}$$

Onda polarizada circularmente de mano izquierda (o negativa)

Al comparar las ecuaciones (7-31) y (7-27) vemos que $\mathbf{E}$ todavía estará polarizado elípticamente. Si $E_{20} = E_{10}$, $\mathbf{E}$ estará polarizado circularmente y el ángulo con respecto al eje x en $z = 0$ será $-\omega t$, lo cual indica que $\mathbf{E}$ girará con velocidad angular *ω en el sentido de las agujas del reloj*; ésta es una ***onda circularmente polarizada negativa*** o ***de mano izquierda.***

Si $E_2(z)$ y $E_1(z)$ están en cuadratura espacial pero en fase temporal, la expresión instantánea de $\mathbf{E}$ en $z = 0$ es

Onda polarizada linealmente

$$\mathbf{E}(0, t) = (\mathbf{a}_x E_{10} + \mathbf{a}_y E_{20})\cos \omega t. \tag{7-32}$$

La punta de $\mathbf{E}(0, t)$ estará en el punto P_1 de la figura 7-5(b) cuando $\omega t = 0$. Su magnitud disminuirá hacia cero conforme ωt aumente hacia $\pi/2$. Tras esto, $\mathbf{E}(0, t)$ comenzará a aumentar gradualmente en dirección opuesta, hacia el punto P_2 donde $\omega t = \pi$. Decimos que el $\mathbf{E}$ suma está linealmente polarizado a lo largo de una línea que forma un ángulo $\tan^{-1}(E_{20}/E_{10})$ con el eje x.

En el caso general donde $E_2(z)$ y $E_1(z)$ están en cuadratura espacial, pueden tener amplitudes diferentes ($E_{20} \neq E_{10}$) y pueden diferir en fase en una cantidad arbitraria (distinta de cero y que no sea un múltiplo entero de $\pi/2$). Su $\mathbf{E}$ suma estará polarizado elípticamente.

EJEMPLO 7-2

Demuestre que una onda plana linealmente polarizada puede descomponerse en una onda polarizada circularmente de mano derecha y una onda polarizada circularmente de mano izquierda de igual amplitud.

SOLUCIÓN

Considere una onda plana polarizada linealmente que se propaga en la dirección $+z$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\mathbf{E}$ está polarizado en la dirección x. Si empleamos la notación fasorial tenemos

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_0 e^{-jkz}. \tag{7-33}$$

Pero esto puede escribirse como

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_{rc}(z) + \mathbf{E}_{lc}(z), \tag{7-34}$$

donde

$$\mathbf{E}_{rc}(z) = \frac{E_0}{2}(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z} \tag{7-34a}$$

y

$$\mathbf{E}_{lc}(z) = \frac{E_0}{2}(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}. \tag{7-34b}$$

Podemos descomponer una onda plana polarizada linealmente en dos ondas polarizadas circularmente de igual magnitud.

Basándonos en el análisis previo, podemos reconocer que $\mathbf{E}_{rc}(z)$ en la ecuación (7-34a) y $\mathbf{E}_{lc}(z)$ en la ecuación (7-34b) representan las ondas polarizadas circularmente de mano derecha y mano izquierda, respectivamente, cada una con amplitud $E_0/2$. Así hemos demostrado el enunciado de este problema. Por supuesto, también es verdadero el enunciado inverso: la suma de dos ondas polarizadas circularmente de igual magnitud que giran en sentido opuesto es una onda polarizada linealmente.

■ **EJERCICIO 7.4** Describa la polarización de una onda cuya intensidad eléctrica está descrita por $\mathbf{E}(x, t) = (\mathbf{a}_y E_{10} - \mathbf{a}_z E_{20})$ sen $(\omega t - kx)$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-7 ¿Qué es una onda TEM?

P.7-8 ¿La impedancia intrínseca de un medio sin pérdidas es una función de la frecuencia? Explique.

P.7-9 ¿Qué quiere decir la *polarización* de una onda? ¿Cuándo está polarizada linealmente una onda? ¿Cuándo está polarizada circularmente?

P.7-10 Se combinan dos ondas ortogonales polarizadas linealmente que tienen la misma frecuencia. Enuncie las condiciones en las cuales la resultante será (a) otra onda polarizada linealmente, (b) una onda polarizada circularmente y (c) una onda polarizada elípticamente.

COMENTARIOS

1. En una onda TEM en un medio sin pérdidas ilimitado: (a) **E** y **H** están en fase, y (b) $|\mathbf{E}| = \eta|\mathbf{H}|$.
2. El campo **E** de las estaciones de radio AM está polarizado linealmente, con el campo **E** perpendicular a la tierra. La antena receptora debe estar en posición vertical para lograr la máxima recepción.
3. El campo **E** de las señales de televisión está polarizado linealmente en dirección horizontal. Observe la posición horizontal de las antenas receptoras de señales de televisión en el techo de las casas.
4. La onda radiada por las estaciones de radio FM usualmente tiene polarización circular.

7-3 ONDAS PLANAS EN MEDIOS CON PÉRDIDAS

Hasta ahora hemos considerado la propagación de ondas en medios simples sin pérdidas y sin fuentes ($\rho_v = 0$, $\mathbf{J} = 0$). Si un medio es conductor ($\sigma \neq 0$), fluirá una corriente $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ debido a la existencia de $\mathbf{E}$. En este caso debemos cambiar la ecuación con dependencia armónica con el tiempo $\nabla \times \mathbf{H}$ (6-80b) a

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} = j\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\mathbf{E} \\ &= j\omega\epsilon_c\mathbf{E}\end{aligned} \tag{7-35}$$

con

Permitividad compleja de medios con pérdidas

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \qquad \text{(F/m)}. \tag{7-36}$$

Las otras tres ecuaciones (6-80a, c y d) no cambian. Por lo tanto, las ecuaciones previamente presentadas para medios no conductores serán aplicables a medios conductores si se sustituye ϵ por la ***permitividad compleja*** ϵ_c de la ecuación (7-36).

En la sección 3-6.2 vimos que, al aplicar a cuerpos materiales un campo eléctrico externo variable con el tiempo, se producen pequeños desplazamientos de cargas ligadas que a su vez originan una densidad de volumen de polarización. Este vector de polarización variará con la misma frecuencia que el campo aplicado. Al aumentar la frecuencia, la inercia de las partículas cargadas tiende a evitar que el desplazamiento de partículas se mantenga en fase con los cambios del campo, lo cual produce un mecanismo de amortiguamiento de vibraciones que produce pérdida de potencia debido al trabajo necesario para superar las fuerzas de amortiguamiento. Este fenómeno de polarización fuera de fase puede caracterizarse por una susceptibilidad eléctrica compleja y por consiguiente por una permitividad compleja. Si el cuerpo o medio material tiene además una cantidad importante de portadores de carga libres, como los electrones en un conductor, los electrones y huecos en un semiconductor o los iones en un electrólito, también se presentarán pérdidas óhmicas. Al estudiar estos medios es costumbre incluir los efectos de las pérdidas óhmicas y por amortiguamiento en la parte imaginaria de la permitividad compleja ϵ_c:

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \qquad \text{(F/m)}, \tag{7-37}$$

donde ϵ' y ϵ'' pueden ser funciones de la frecuencia. Alternativamente, podemos definir una conductividad equivalente que represente todas las pérdidas y escribir

$$\sigma = \omega\epsilon'' \qquad \text{(S/m)}. \tag{7-38}$$

Al combinar las ecuaciones (7-37) y (7-38) se obtiene la ecuación (7-36).

Tangente de pérdidas de medios con pérdidas

La razón ϵ''/ϵ' se denomina ***tangente de pérdidas*** porque es una medida de la pérdida de potencia en el medio:

$$\tan\delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \cong \frac{\sigma}{\omega\epsilon}. \tag{7-39}$$

la cantidad δ_c en la ecuación (7-39) se conoce como ***ángulo de pérdidas***

Diferencia entre un buen conductor y un buen aislante

Se dice que un medio es un ***buen conductor*** si $\sigma \gg \omega\epsilon$ y un ***buen aislante*** si $\omega\epsilon \gg \sigma$. Así, un material puede ser un buen conductor a frecuencias bajas pero tener las propiedades de un dieléctrico con pérdidas a frecuencias muy altas. Por ejemplo, la tierra húmeda tiene una constante dieléctrica ϵ_r y una conductividad σ del orden de 10 y 10^{-2} (S/m), respectivamente. La tangente de pérdidas $\sigma/\omega\epsilon$ de la tierra húmeda es igual a 1.8×10^4 a 1 (kHz), de manera que es un conductor bastante bueno. Sin embargo, $\sigma/\omega\epsilon$ es 1.8×10^{-3} a 10 (GHz) y la tierra húmeda se comporta como un aislante.

EJEMPLO 7-3

En un medio dieléctrico con pérdidas cuya permitividad relativa es 2.5 y cuya tangente de pérdidas es 0.001 existe una intensidad de campo eléctrico senoidal de amplitud 250 (V/m) y frecuencia 1 (GHz). Calcule la potencia media disipada en el medio por metro cúbico.

SOLUCIÓN

Primero hay que hallar la conductividad eficaz del medio con pérdidas

$$\tan \delta_c = 0.001 = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r},$$

$$\sigma = 0.001(2\pi 10^9)\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)(2.5)$$

$$= 1.39 \times 10^{-4}\,(\text{S/m}).$$

La potencia media disipada por unidad de volumen es

$$p = \tfrac{1}{2}JE = \tfrac{1}{2}\sigma E^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \times (1.39 \times 10^{-4}) \times 250^2 = 4.34 \qquad (\text{W/m}^3).$$

■ **EJERCICIO 7.5** Un horno de microondas cocina los alimentos irradiándolos con potencia de microondas generada por un magnetrón. Suponga que la constante dieléctrica de un filete de vaca es 40 y que su tangente de pérdidas es de 0.35 a la frecuencia de funcionamiento de 2.45 (GHz). Use la amplitud de campo eléctrico indicada en el ejemplo 7-3 para calcular la potencia media por metro cúbico. (Ignore el ***efecto de penetración***, el cual se analizará en la subsección 7.3-2.)

RESPUESTA : 59.6 (kW/m³).

Basándonos en el análisis anterior, el estudio del comportamiento para una dependencia armónica con el tiempo de un medio con pérdidas puede realizarse a partir de la ecuación (7-3) con sólo sustituir la k real por un número de onda complejo k_c:

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c}. \tag{7-40}$$

Ahora hay que examinar la solución de la siguiente ecuación homogénea de Helmholtz:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k_c^2\mathbf{E} = 0. \tag{7-41}$$

Para seguir el convenio de notación usado en la teoría de las líneas de transmisión, se acostumbra definir una ***constante de propagación***, γ, tal que

Relación entre la constante de propagación y el número de onda

$$\boxed{\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} \qquad (\text{m}^{-1}).} \tag{7-42}$$

Como γ es compleja, usamos la ecuación (7-36) para escribir

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2}, \tag{7-43}$$

o, a partir de la ecuación (7-37),

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{1/2}, \tag{7-44}$$

donde α y β son las partes real e imaginaria de γ, respectivamente. En breve explicaremos su importancia física. En un medio sin pérdidas, $\sigma = 0$ ($\epsilon'' = 0$, $\epsilon = \epsilon'$), $\alpha = 0$ y $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

Usando la ecuación (7-42), la ecuación (7-41) se convierte en

$$\nabla^2\mathbf{E} - \gamma^2\mathbf{E} = 0. \tag{7-45a}$$

En el caso de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección $+z$ y que está caracterizada por $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ y $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$, la ecuación (7-45a) se reduce a

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} = \gamma^2 E_x. \tag{7-45b}$$

La solución de la ecuación (7-45b) es

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \tag{7-46}$$

Constante de atenuación y su unidad en el SI

donde α y β son cantidades positivas. El primer factor, $e^{-\alpha z}$ se reduce al aumentar z y por consiguiente es un factor de atenuación; α se denomina ***constante de atenuación.*** La unidad en el SI de la constante de atenuación es el neper por metro (Np/m).† El segundo factor, $e^{-j\beta z}$, es un factor de fase; β se conoce como ***constante de fase*** y se expresa en radianes por metro (rad/m). La constante de fase expresa la magnitud del cambio de fase que se produce cuando la onda viaja un metro.

Constante de fase y su unidad en el SI

■ **EJERCICIO 7.6** Suponga que la amplitud de la intensidad eléctrica de una onda plana que se propaga en un medio con pérdidas es 1 (mV/m) en P_1 y 0.8 (mV/m) en P_2 a 50 (m) de distancia. Encuentre

† Un neper es una cantidad sin dimensiones. Si $\alpha = 1$ (Np/m), entonces una amplitud unidad de una onda se reduce al valor e^{-1} ($\cong 0.368$) al propagarse una distancia de 1 (m). Una atenuación de 1 (Np/m) equivale a $20 \log_{10} e = 8.69$ (dB/m).

a) la atenuación total entre los puntos P_1 y P_2, tanto en nepers como en decibeles, y
b) α en (Np/m) y en (dB/m).

RESPUESTA : (a) 0.223 (Np), 1.94 (dB), (b) 0.00446 (Np/m), 0.0388 (dB/m).

7-3.1 DIELÉCTRICOS CON PEQUEÑAS PÉRDIDAS

Un dieléctrico con pequeñas pérdidas es un buen aislante pero imperfecto, con una conductividad equivalente distinta de cero, de manera que $\epsilon'' \ll \epsilon'$ o $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$. Si se presenta esta condición podemos aproximar mediante el desarrollo del binomio la expresión de γ de la ecuación (7-44) a:

Constante de propagación de un dieléctrico con pérdidas

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 - j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right],$$

de donde obtenemos la constante de atenuación

$$\alpha = \mathscr{R}e(\gamma) \cong \frac{\omega\epsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \qquad \text{(Np/m)} \tag{7-47}$$

y la constante de fase

$$\beta = \mathscr{I}m(\gamma) \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right] \qquad \text{(rad/m)}. \tag{7-48}$$

En la ecuación (7-47) podemos ver que la constante de atenuación de un dieléctrico con pequeñas pérdidas es una cantidad positiva y aproximadamente proporcional a la frecuencia. La constante de fase de la ecuación (7-48) varía muy poco con respecto al valor $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ correspondiente a un dieléctrico perfecto (sin pérdidas).

La impedancia intrínseca de un dieléctrico con pequeñas pérdidas es una cantidad compleja.

Impedancia intrínseca de un dieléctrico con pérdidas

$$\begin{aligned}\eta_c &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{-1/2} \\ &\cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 + j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right) \qquad (\Omega).\end{aligned} \tag{7-49}$$

La impedancia intrínseca es la razón de E_x y H_y de una onda plana uniforme, por lo que las intensidades de campo eléctrico y magnético en un dieléctrico con pérdidas no están en fase temporal, como lo están en un medio sin pérdidas.

La velocidad de fase u_p se obtiene de la razón ω/β Usando la ecuación (7-48) tenemos

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right] \qquad \text{(m/s)}, \tag{7-50}$$

que es ligeramente menor que su valor cuando el medio no tiene pérdidas.

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-11 ¿Por qué la permitividad de un medio dieléctrico es una cantidad compleja?

P.7-12 Defina la *tangente de pérdidas* de un medio.

P.7-13 ¿Cuál es la relación entre la *constante de propagación* y el número de onda?

P.7-14 Defina la *constante de atenuación* y la *constante de fase* de una onda que se propaga en un medio. ¿Cuáles son sus unidades en el SI?

COMENTARIOS

1. Los campos eléctrico y magnético de las ondas planas uniformes en medios *con pérdidas* están en cuadratura espacial y tienen distinta fase temporal.
2. Tanto α como β son cantidades reales y ambas son, por lo general, funciones de la frecuencia.
3. La atenuación de la amplitud de la onda en nepers es el logaritmo natural de la razón de la amplitud en el punto inicial y la amplitud en el punto final.
4. 1 (Np) = 8.69 (dB).

7-3.2 BUENOS CONDUCTORES

Un buen conductor es un medio en el cual $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$. En esta situación es conveniente usar la ecuación (7-43) e ignorar 1 en comparación con $\sigma/\omega\epsilon$. Escribimos

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma},$$

o

Constante de propagación de un buen conductor

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong (1+j)\sqrt{\pi f\mu\sigma}, \tag{7-51}$$

donde se han usado las relaciones

$$\sqrt{j} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = e^{j\pi/4} = (1+j)/\sqrt{2}$$

y $\omega = 2\pi f$. La ecuación (7-51) indica que α y β son aproximadamente iguales en un buen conductor y ambos aumentan con $\sqrt{f}$ y $\sqrt{\sigma}$. En un buen conductor,

La constante de atenuación y la constante de fase de un buen conductor son iguales.

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}.} \tag{7-52}$$

Relación entre la impedancia intrínseca y la constante de atenuación de un buen conductor

La impedancia intrínseca de un buen conductor es

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} \qquad (\Omega), \tag{7-53}$$

que tiene un ángulo de fase de 45°. Por consiguiente, la intensidad de campo magnético está 45° retrasada con respecto a la intensidad de campo eléctrico.

La velocidad de fase en un buen conductor es

Velocidad de fase en un buen conductor

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \qquad (\text{m/s}), \tag{7-54}$$

que es proporcional a $\sqrt{f}$ y $1/\sqrt{\sigma}$. Tomemos como ejemplo el cobre:

$$\sigma = 5.80 \times 10^7 \qquad (\text{S/m}),$$

$$\mu = 4\pi \times 10^{-7} \qquad (\text{H/m}),$$

$$u_p = 720\,(\text{m/s}) \qquad \text{a} \qquad 3\,(\text{MHz}),$$

que es muchos órdenes de magnitud más lenta que la velocidad de la luz en el aire. La longitud de onda de una onda plana en un buen conductor es

Longitud de onda en un buen conductor

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u_p}{f} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \qquad (\text{m}). \tag{7-55}$$

En el caso del cobre a 3 (MHz) tenemos $\lambda = 0.24$ (mm). Como punto de comparación, una onda electromagnética de 3 (MHz) tiene una longitud de onda de 100 (m) en el aire.

La constante de atenuación α de un buen conductor a frecuencias muy altas tiende a ser muy grande, de acuerdo con la ecuación (7-52). En el caso del cobre a 3 (MHz),

$$\alpha = \sqrt{\pi(3\times 10^6)(4\pi\times 10^{-7})(5.80\times 10^7)} = 2.62\times 10^4 \qquad (\text{Np/m}).$$

Puesto que el factor de atenuación es $e^{-\alpha z}$, la amplitud de la onda estará atenuada con un factor de $e^{-1} = 0.368$ cuando se propague una distancia $\delta = 1/\alpha$. Esta distancia es de $(1/2.62) \times 10^{-4}$ (m) o 0.038 (mm) en el caso del cobre a 3 (MHz). A 10 (GHz) es sólo de 0.66 (μm), una distancia muy pequeña. Entonces, una onda electromagnética de alta frecuencia se atenúa con gran rapidez al propagarse en un buen conductor. La distancia δ a la cual la amplitud de una onda plana viajera se reduce en un factor de e^{-1} o 0.368 se conoce como ***profundidad de piel*** o ***profundidad de penetración*** del conductor.

Profundidad de penetración

Determinación de la profundidad de penetración a partir de la conductividad y de la permeabilidad del conductor y de la frecuencia

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \qquad (\text{m}).} \tag{7-56}$$

Como $\alpha = \beta$ en un buen conductor, también podemos escribir δ como

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \qquad \text{(m).}} \tag{7-57}$$

La profundidad de penetración de un buen conductor a frecuencias de microondas es tan pequeña que podemos considerar, para fines prácticos, que los campos y las corrientes están confinados a una capa muy delgada (esto es, en la *piel*) de la superficie del conductor.

EJEMPLO 7-4

La intensidad de campo eléctrico de una onda plana uniforme polarizada linealmente que se propaga en el agua de mar en la dirección $+z$ es $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x 100 \cos(10^7 \pi t)$ (V/m) en $z = 0$. Los parámetros constitutivos del agua de mar son $\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4$ (S/m).

a) Determine la constante de atenuación, la constante de fase, la impedancia intrínseca, la velocidad de fase, la longitud de onda y la profundidad de penetración.

b) Calcule la distancia a la cual la amplitud de **E** es el 1% de su valor en $z = 0$

c) Escriba las expresiones de $\mathbf{E}(z, t)$ y $\mathbf{H}(z, t)$ en $z = 0.8$ (m) como funciones de t

SOLUCIÓN

$$\omega = 10^7 \pi \qquad \text{(rad/s)},$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \times 10^6 \text{(Hz)} = 5 \text{(MHz)},$$

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{4}{10^7\pi\left(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right)72} = 200 \gg 1.$$

Podemos usar entonces las fórmulas de buenos conductores.

a) Constante de atenuación:

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{5\pi 10^6 (4\pi 10^{-7}) 4} = 8.89 \qquad \text{(Np/m)}.$$

Constante de fase:

$$\beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 8.89 \qquad \text{(rad/m)}.$$

Impedancia intrínseca:

$$\eta_c = (1 + j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$= (1 + j)\sqrt{\frac{\pi(5 \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})}{4}} = \pi e^{j\pi/4} \qquad (\Omega).$$

Velocidad de fase:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^7\pi}{8.89} = 3.53 \times 10^6 \qquad \text{(m/s)}.$$

Longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{8.89} = 0.707 \qquad \text{(m)}.$$

Profundidad de penetración:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8.89} = 0.112 \qquad \text{(m)}.$$

b) Distancia z_1 a la cual la amplitud de la onda decrece al 1% de su valor en $z = 0$:

$$e^{-\alpha z_1} = 0.01 \qquad \text{o} \qquad e^{\alpha z_1} = \frac{1}{0.01} = 100,$$

$$z_1 = \frac{1}{\alpha} \ln 100 = \frac{4.605}{8.89} = 0.518 \qquad \text{(m)}.$$

c) En notación fasorial,

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}.$$

La expresión instantánea de $\mathbf{E}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \mathcal{R}e[\mathbf{E}(z) e^{j\omega t}] \\ &= \mathcal{R}e[\mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}] = \mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).\end{aligned}$$

En $z = 0.8$ (m) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0.8, t) &= \mathbf{a}_x 100 e^{-0.8\alpha} \cos(10^7\pi t - 0.8\beta) \\ &= \mathbf{a}_x 0.082 \cos(10^7\pi t - 7.11) \\ &= \mathbf{a}_x 0.082 \cos(10^7\pi t - 47.5°)^\dagger \qquad \text{(V/m)}.\end{aligned}$$

Sabemos que una onda plana uniforme es una onda TEM con $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ y que ambos son normales a la dirección de propagación de la onda $\mathbf{a}_z$. Por lo tanto, $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$. Para hallar $\mathbf{H}(z, t)$, la expresión instantánea de $\mathbf{H}$ en función de t, *no debemos cometer el error de escribir* $H_y(z, t) = E_x(z, t)/\eta_c$, ya que esto sería una mezcla de las funciones temporales reales $E_x(z, t)$ y $H_y(z, t)$ con la cantidad compleja η_c. Es necesario emplear cantidades fasoriales $E_x(z)$ y $H_y(z)$, es decir,

$$H_y(z) = \frac{E_x(z)}{\eta_c},$$

† 7.11 (rad) = 7.11 × (180/π) = 407.4°, lo que equivale a 407.4° − 360° = 47.5° en las relaciones de fase

de donde obtenemos la relación entre las cantidades instantáneas

$$H_y(z,t) = \mathcal{R}e\left[\frac{E_x(z)}{\eta_c}e^{j\omega t}\right].$$

En nuestro problema tenemos, en notación fasorial,

$$H_y(0.8) = \frac{100e^{-0.8\alpha}e^{-j0.8\beta}}{\pi e^{j\pi/4}} = \frac{0.082e^{-j7.11}}{\pi e^{j\pi/4}} = 0.026e^{-j1.61}.$$

Observe que *ambos* ángulos deben estar en radianes antes de combinarlos. La expresión instantánea de **H** en $z = 0.8$ (m) es entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(0.8, t) &= \mathbf{a}_y 0.026 \cos(10^7\pi t - 1.61)\\ &= \mathbf{a}_y 0.026 \cos(10^7\pi t - 92.3°) \qquad \text{(A/m)}.\end{aligned}$$

Vemos que una onda plana de 5 (MHz) se atenúa con gran rapidez en el agua de mar y se hace insignificantemente débil a muy corta distancia de la fuente. (Las amplitudes de los campos a una profundidad de 0.8 (m) se reducen a 0.082/100 = 0.00082 veces su valor en la superficie.) La comunicación a larga distancia con submarinos sumergidos es muy difícil, incluso a muy bajas frecuencias.

■ **EJERCICIO 7.7** Determine la frecuencia a la cual la profundidad de penetración en el agua de mar es de diez metros. Calcule la longitud de onda correspondiente en el agua de mar y compárela con la del aire.

RESPUESTA : 633 (Hz), 62.8 (m), 474 (km).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-15 ¿Qué distingue un buen conductor de un buen aislante a una frecuencia determinada?

P.7-16 ¿Qué significa la *profundidad de penetración* de un buen conductor?

COMENTARIOS

1. La constante de atenuación y la constante de fase de un buen conductor son numéricamente iguales.
2. La impedancia intrínseca de un buen conductor tiene un ángulo de fase de 45°.
3. La profundidad de penetración de un buen conductor es numéricamente igual al inverso de su constante de atenuación e inversamente proporcional a $\sqrt{f}$ y $\sqrt{\sigma}$
4. La profundidad de penetración de los buenos conductores es menor que 1 (μm) a 10 (GHz).

7-4 VELOCIDAD DE GRUPO

Definición de la velocidad de fase

En la ecuación (7-10) definimos la velocidad de fase, u_p, de una onda plana de frecuencia única, como la velocidad de propagación de un frente de onda de fase constante. La relación entre u_p y la constante de fase, β, es

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta} \qquad \text{(m/s).}} \tag{7-58}$$

$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ es una función lineal de ω para las ondas planas en un medio sin pérdidas. Por lo tanto, la velocidad de fase $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ es una constante independiente de la frecuencia. Sin embargo, en algunos casos (como la propagación de onda en un dieléctrico con pérdidas, como vimos antes, o en una línea de transmisión o en una guía de ondas) la constante de fase no es una función lineal de ω; las ondas de distinta frecuencia se propagarán con diferente velocidad de fase. Ya que todas las señales que transportan información consisten en una banda de frecuencias, las ondas a las distintas componentes en frecuencia se propagarán con velocidades de fase diferentes, produciendo una distorsión en la forma de onda de la señal. la señal se "dispersa". El fenómeno de la distorsión de la señal causado por el hecho de que la velocidad de fase dependa de la frecuencia se conoce como ***dispersión***. A partir de las ecuaciones (7-50) y (7-39) llegamos a la conclusión de que un dieléctrico con pérdidas es un ***medio dispersor***.

Dispersión

Una señal que transmite información normalmente tiene un intervalo de frecuencias (bandas laterales) muy pequeño alrededor de una portadora de alta frecuencia. Esta señal constituye un "grupo" de frecuencias y forma un paquete de ondas. La ***velocidad de grupo*** es la velocidad de propagación de la envolvente del paquete de ondas (o de un grupo de frecuencias).

Definición de la velocidad de grupo

Considere el más sencillo de los casos: un paquete de ondas que consiste en dos ondas viajeras de igual amplitud y frecuencias angulares ligeramente distintas $\omega_0 + \Delta\omega$ y $\omega_0 - \Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega_0$). Las constantes de fase también serán un poco diferentes, ya que son funciones de la frecuencia. Sean $\beta_0 + \Delta\beta$ y $\beta_0 - \Delta\beta$ las constantes de fase correspondientes a las dos frecuencias. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \cos\,[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] \\ &\quad + E_0 \cos\,[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z] \\ &= 2E_0 \cos\,(t\,\Delta\omega - z\,\Delta\beta)\cos\,(\omega_0 t - \beta_0 z). \end{aligned} \tag{7-59}$$

Como $\Delta\omega \ll \omega_0$, la expresión en la ecuación (7-59) representa una onda que oscila rápidamente con frecuencia angular ω_0 y con una amplitud que varía lentamente con una frecuencia angular $\Delta\omega$. Esta estructura de onda se ilustra en la figura 7-6.

La onda dentro de la envolvente se propaga con una velocidad de fase determinada al poner $\omega_0 t - \beta_0 z$ = constante:

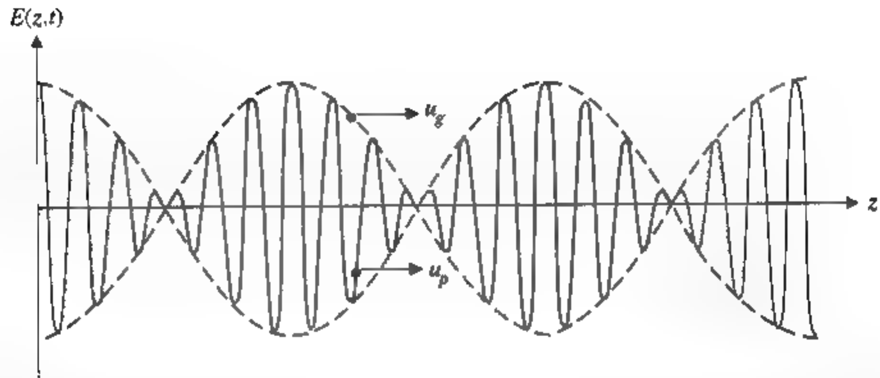


FIGURA 7-6 Suma de dos ondas viajeras con dependencia armónica con el tiempo, con igual amplitud y frecuencias ligeramente distintas en un instante t determinado

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}.$$

Podemos determinar la velocidad de la envolvente (la ***velocidad de grupo*** u_g) igualando a una constante el argumento del primer factor coseno de la ecuación (7-58)

$$t\,\Delta\omega - z\,\Delta\beta = \text{constante},$$

de lo cual obtenemos

$$u_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\Delta\beta/\Delta\omega}.$$

En el límite donde $\Delta\omega \to 0$ tenemos la fórmula para calcular la velocidad de grupo en un medio dispersivo:

Fórmula de la velocidad de grupo en medios dispersivos

$$\boxed{u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} \qquad \text{(m/s).}} \tag{7-60}$$

Ésta es la velocidad de un punto en la envolvente del paquete de ondas, como se ilustra en la figura 7-6 y se identifica como la velocidad de una señal de banda estrecha. La velocidad de grupo en un medio dispersivo puede ser mayor o menor que la velocidad de fase. Se dice que un medio presenta dispersión normal si $u_g < u_p$, y dispersión anómala si $u_g > u_p$. No hay dispersión cuando $u_g = u_p$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-17 ¿Qué significa la *dispersión* de una señal? Proporcione un ejemplo de un medio dispersivo

P.7-18 Defina la *velocidad de grupo*. ¿Cómo difiere la velocidad de grupo de la velocidad de fase?

COMENTARIOS

1. Las señales que transportan información se propagan sin dispersión únicamente en medios no dispersivos.
2. Un medio es no dispersivo si β es una función lineal (directamente proporcional) de ω.

7-5 FLUJO DE POTENCIA ELECTROMAGNÉTICA Y VECTOR DE POYNTING

Las ondas electromagnéticas transportan energía electromagnética. La energía se transporta por el espacio a puntos receptores distantes a través de ondas electromagnéticas. A continuación derivaremos una relación entre la razón de transferencia de tal energía y las intensidades de campos eléctricos y magnéticos asociados con la onda electromagnética que se propaga.

Comenzamos con las ecuaciones de rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \text{(6-45a)(7-61)}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad \text{(6-45b)(7-62)}$$

Podemos comprobar directamente la siguiente identidad de operaciones vectoriales si usamos coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}). \qquad \text{(7-63)}$$

Al sustituir las ecuaciones (7-61) y (7-62) en la ecuación (7-63) se obtiene

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \qquad \text{(7-64)}$$

Para un medio simple cuyos parámetros constitutivos ϵ, μ y σ no cambian con el tiempo, tenemos

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right),$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2\right),$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{E} \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma E^2.$$

Podemos escribir entonces la ecuación (7-64) como sigue:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) - \sigma E^2, \qquad \text{(7-65)}$$

que es una relación de función puntual. Al integrar ambos lados sobre el volumen que nos interesa se obtiene una forma integral de la ecuación 7-65:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) dv - \int_V \sigma E^2 \, dv, \tag{7-66}$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia para convertir la integral de volumen de $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ en la integral de superficie cerrada de $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$.

Vemos que el primero y el segundo términos del lado derecho de la ecuación (7-66) representan la razón de cambio temporal de la energía almacenada en los campos eléctrico y magnético, respectivamente (compare con las ecuaciones (3-106) y (5-106)). El último término es la potencia óhmica disipada en el volumen como resultado del flujo de la densidad de corriente de conducción $\sigma\mathbf{E}$ en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}$. Podemos entonces interpretar el lado derecho de la ecuación (7-66) como la *razón de reducción* de las energías eléctrica y magnética almacenadas, menos la potencia óhmica disipada en forma de calor en el volumen V. Esto debe ser igual a la potencia (razón de energía) que *sale* del volumen a través de su superficie, para ser consistentes con la ley de la conservación de la energía. Por consiguiente, la cantidad $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ es un vector que representa el flujo de potencia por unidad de área. Definamos

$$\boxed{\mathscr{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad (\mathrm{W/m^2}).} \tag{7-67}$$

Definición del vector de Poynting

La cantidad $\mathscr{P}$ se conoce como ***vector de Poynting***, y es un vector de densidad de potencia asociado con el campo electromagnético. La afirmación de que la integral de superficie de $\mathscr{P}$ sobre una superficie cerrada, dada por el lado izquierdo de la ecuación (7-66), es igual a la potencia que sale del volumen encerrado, se conoce como ***teorema de Poynting***. Esta afirmación no está limitada a ondas planas.

Teorema de Poynting

Podemos escribir la ecuación (7-66) de otra manera:

$$-\oint_S \mathscr{P} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V (w_e + w_m)\, dv + \int_V p_\sigma \, dv, \tag{7-68}$$

donde

$$w_e = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \text{ densidad de energía magnética}, \tag{7-69}$$

$$w_m = \tfrac{1}{2}\mu H^2 = \tfrac{1}{2}\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = \text{ densidad de energía eléctrica}, \tag{7-70}$$

$$p_\sigma = \sigma E^2 = J^2/\sigma = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*/\sigma = \text{ densidad de potencia óhmica}. \tag{7-71}$$

Dicho con palabras, la ecuación (7-68) establece que la potencia total que fluye *hacia dentro* de una superficie cerrada en un instante cualquiera será igual a la suma de las razones de incremento de las energías eléctrica y magnética almacenadas y de la potencia óhmica disipada dentro del volumen limitado por la superficie. Un asterisco en una cantidad denota el conjugado complejo de dicha cantidad.

EJEMPLO 7-5

Encuentre el vector de Poynting sobre la superficie de un alambre conductor recto, muy largo (de radio b y conductividad σ) por el que circula una corriente continua I. Verifique el teorema de Poynting.

SOLUCIÓN

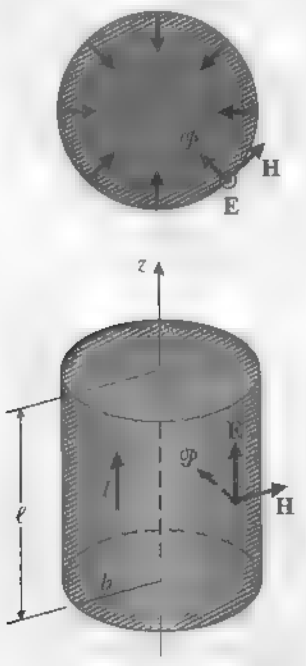
Puesto que se trata de una situación de corriente continua, la corriente en el alambre se distribuye de manera uniforme sobre su sección transversal Supongamos que el eje del alambre coincide con el eje z. En la figura 7-7 se muestra un segmento de longitud ℓ del alambre largo. Tenemos

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_z \frac{I}{\pi b^2}$$

y

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{a}_z \frac{I}{\sigma \pi b^2}$$

FIGURA 7-7 Ilustración del teorema de Poynting (ejemplo 7.5).



En la superficie del alambre,

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_\phi \frac{I}{2\pi b}.$$

Por lo tanto, el vector de Poynting en la superficie del alambre es

$$\begin{aligned}\mathscr{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} &= (\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\phi)\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\\ &= -\mathbf{a}_r \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3},\end{aligned}$$

dirigido en todos los puntos hacia el interior de la superficie del alambre.

Para verificar el teorema de Poynting integramos $\mathscr{P}$ sobre la pared del segmento de alambre de la figura 7-7:

$$\begin{aligned}-\oint_S \mathscr{P}\cdot d\mathbf{s} = -\oint_S \mathscr{P}\cdot \mathbf{a}_r\, ds &= \left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\right)2\pi b\ell\\ &= I^2\left(\frac{\ell}{\sigma\pi b^2}\right) = I^2 R,\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de la resistencia de un alambre recto presentada en la ecuación (4-16), $R = \ell/\sigma S$. El resultado anterior confirma que la integral de superficie negativa del vector de Poynting es exactamente igual a la pérdida de potencia óhmica I^2R en el alambre conductor. Así queda verificado el teorema de Poynting

7-5.1 DENSIDADES DE POTENCIA INSTANTÁNEA Y MEDIA

Hemos visto la conveniencia de usar la notación fasorial al manejar ondas electromagnéticas con dependencia armónica con el tiempo. El valor instantáneo de una cantidad es entonces la parte real del producto de la cantidad fasorial por $e^{j\omega t}$ cuando se usa cos ωt como referencia. Por ejemplo, si tenemos el fasor

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_x(z) = \mathbf{a}_x E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z}, \tag{7-72}$$

la expresión instantánea es

Escritura de la expresión instantánea a partir de un fasor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z,t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] &= \mathbf{a}_x E_0 e^{-\alpha z}\mathscr{R}e[e^{j(\omega t - \beta z)}]\\ &= \mathbf{a}_x E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z).\end{aligned} \tag{7-73}$$

En el caso de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección $+z$ en un medio con pérdidas, el fasor de intensidad de campo magnético asociado es

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{a}_y H_y(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \theta_\eta)}, \tag{7-74}$$

donde θ_η es el ángulo de fase de la impedancia intrínseca $\eta_c = |\eta_c| e^{j\theta_\eta}$ del medio. La correspondiente expresión instantánea de $\mathbf{H}(z)$ es

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathscr{Re}[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta). \tag{7-75}$$

La expresión instantánea del vector de Poynting o vector de densidad de potencia es, basándose en las ecuaciones (7-72) y (7-74),

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(z, t) &= \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \mathscr{Re}[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \times \mathscr{Re}[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} [\cos\theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)].\end{aligned} \tag{7-76}$$ †

En lo que se refiere a la potencia transmitida por una onda electromagnética, su valor medio es una cantidad más relevante que su valor instantáneo. Utilizando la ecuación (7-76) obtenemos el promedio temporal del vector de Poynting, $\mathscr{P}_{av}(z)$

Densidad de potencia media transmitida por una onda plana uniforme en la dirección z

$$\boxed{\mathscr{P}_{av}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{P}(z, t)\,dt = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \qquad (\mathrm{W/m^2}),} \tag{7-77}$$

donde $T = 2\pi/\omega$ es el periodo temporal de la onda. El segundo término del lado derecho de la ecuación (7-76) es una función coseno de frecuencia doble cuyo valor medio es cero en un periodo fundamental. En el caso de la propagación de ondas en un medio con pérdidas, $\eta_c \to \eta$ es real, $\sigma = 0$ y $\theta_\eta = 0$; entonces, la ecuación (7-77) se reduce a

$$\boxed{\mathscr{P}_{av}(z) = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2\eta} \qquad (\mathrm{W/m^2}).} \tag{7-78}$$

Es probable que en el caso general no estemos tratando con una onda que se propaga en la dirección z, así que escribimos

Fórmula general para la densidad de potencia media en una onda que se propaga

$$\boxed{\mathscr{P}_{av} = \tfrac{1}{2}\mathscr{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \qquad (\mathrm{W/m^2}),} \tag{7-79}$$

que es una fórmula general para calcular la densidad de potencia media en una onda que se propaga.

■ **EJERCICIO 7.8** Sustituya en la ecuación (7-79) las expresiones fasoriales de $\mathbf{E}(z)$ y $\mathbf{H}(z)$ dadas por las ecuaciones (7-72) y (7-74) para verificar el valor de $\mathscr{P}_{av}$ obtenido en la ecuación (7-77)

† Aquí hemos usado la identidad trigonométrica $\cos\theta_1 \cos\theta_2 = \frac{1}{2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)]$

EJEMPLO 7-6

Las expresiones fasoriales del campo lejano a una distancia R de un pequeño elemento vertical de corriente $I\,d\ell$, situado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas en el espacio libre, son

$$\mathbf{E}(R,\theta) = \mathbf{a}_\theta E_\theta(R,\theta) = \mathbf{a}_\theta \left(j\frac{60\pi I\,d\ell}{\lambda R} \operatorname{sen}\theta \right) e^{-j\beta R} \qquad (\text{V/m}) \qquad (7\text{-}80)\ (7\text{-}80)$$

y

$$\mathbf{H}(R,\theta) = \mathbf{a}_\phi \frac{E_\theta(R,\theta)}{\eta_0} = \mathbf{a}_\phi \left(j\frac{I\,d\ell}{2\lambda R} \operatorname{sen}\theta \right) e^{-j\beta R} \qquad (\text{A/m}), \qquad (7\text{-}81)$$

donde $\lambda = 2\pi/\beta$ es la longitud de onda.

a) Escriba la expresión del vector de Poynting instantáneo.

b) Calcule la potencia media total radiada por el elemento de corriente

SOLUCIÓN

a) Observamos que $E_\theta/H_\phi = \eta_0 = 120\pi\ (\Omega)$. El vector de Poynting instantáneo es

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(R,\theta;t) &= \mathscr{R}e[\mathbf{E}(R,\theta)e^{j\omega t}] \times \mathscr{R}e[\mathbf{H}(R,\theta)e^{j\omega t}] \\ &= (\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi) 30\pi \left(\frac{I\,d\ell}{\lambda R}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2(\omega t - \beta R) \\ &= \mathbf{a}_R 15\pi \left(\frac{I\,d\ell}{\lambda R}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta [1 - \cos 2(\omega t - \beta R)] \qquad (\text{W/m}^2).\end{aligned}$$

b) El vector de densidad de potencia media es, a partir de la ecuación (7-79),

$$\mathscr{P}_{av}(R,\theta) = \mathbf{a}_R 15\pi \left(\frac{I\,d\ell}{\lambda R}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta, \qquad (7\text{-}82)$$

que, como podemos ver, es igual al valor medio temporal de $\mathscr{P}(R, \theta, t)$ expresado en el apartado (a) de esta solución. La potencia media total radiada se obtiene integrando $\mathscr{P}_{av}(R, \theta)$ sobre la superficie de la esfera de radio R:

$$\begin{aligned}\text{Total } P_{av} &= \oint_S \mathscr{P}_{av}(R,\theta)\cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[15\pi \left(\frac{I\,d\ell}{\lambda R}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \right] R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= 40\pi^2 \left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 I^2 \qquad (\text{W}),\end{aligned} \qquad (7\text{-}83)$$

donde I es la amplitud ($\sqrt{2}$ veces el valor eficaz) de la corriente senoidal en $d\ell$

■ **EJERCICIO 7.9** Remítase al ejemplo 7-6. Suponga $I = 5$ (A) y $d\ell = \lambda/20$, determine la potencia interceptada en el campo lejano a una distancia de 9 (m) por una superficie esférica enfrentada al elemento de corriente y definida por $80° \leq \theta \leq 100°$ y $0° \leq \phi \leq 20°$.

RESPUESTA : 0.354 (W).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-19 Defina el *vector de Poynting*. ¿Cuál es la unidad en el SI de este vector?

P.7-20 Enuncie el teorema de Poynting.

P.7-21 Escriba las expresiones de (a) el vector de Poynting instantáneo y (b) el vector de Poynting promedio temporal; en ambos casos refiérase a un campo electromagnético con dependencia armónica con el tiempo y escriba las expresiones en términos de los vectores de intensidad de campo eléctrico y magnético.

COMENTARIOS

1. El vector de Poynting $\mathscr{P}$ tiene dirección normal a **E** y **H**.
2. El teorema de Poynting es una manifestación del principio de conservación de la energía.
3. Observe que $$\mathscr{P}(z,t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \times \mathscr{R}e[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] \neq \mathscr{R}e[\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}(z)]e^{j\omega t};$$
   es decir, no es correcto obtener primero el producto cruz de **E** por **H** y luego tomar la parte real del producto.

7-6 INCIDENCIA NORMAL DE ONDAS PLANAS SOBRE PLANOS DE DISCONTINUIDAD

Hasta ahora sólo hemos visto la propagación de ondas planas uniformes en un medio homogéneo ilimitado. Lo más común en la práctica es que las ondas se propaguen en regiones limitadas donde están presentes varios medios con parámetros constitutivos diferentes. Una onda electromagnética que se propaga en un medio experimenta una reflexión cuando llega a otro medio con impedancia intrínseca diferente. A menos que el segundo medio sea un conductor perfecto, parte de la potencia incidente se transmite a éste. En esta sección estudiaremos el caso más simple de la incidencia normal de ondas planas uniformes sobre una superficie de discontinuidad plana. En la sección siguiente veremos el caso más general de la incidencia oblicua.

Considere la situación ilustrada en la figura 7-8, donde la onda incidente ($\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$) en el medio 1 (ϵ_1, μ_1) se propaga en la dirección $+z$ hacia el medio 2 (ϵ_2, μ_2). La superficie de separación es el plano $z = 0$. Suponemos que ninguno de los medios presenta pérdidas. Los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético incidentes son ($\mathbf{a}_{ki} = \mathbf{a}_z$):

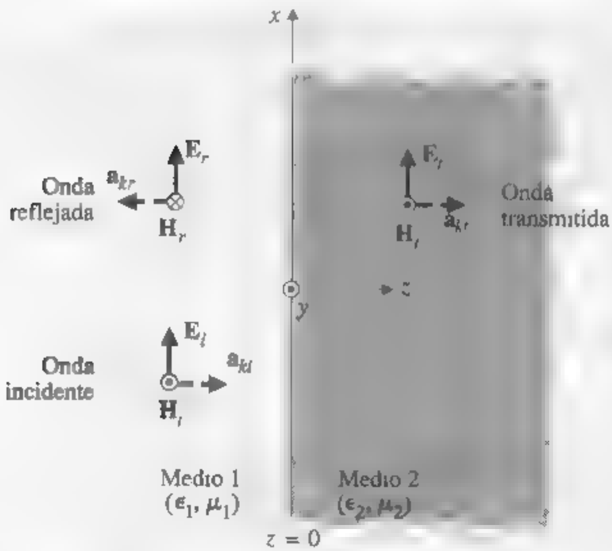


FIGURA 7-8 Onda plana que incide normalmente sobre la frontera de un dieléctrico plano

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}, \tag{7-84}$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}. \tag{7-85}$$

Debido a la discontinuidad del medio en $z = 0$, parte de la onda incidente es reflejada de nuevo hacia el medio 1 y parte se transmite al medio 2. Tenemos entonces

a) *Para la onda reflejada* ($\mathbf{E}_r$, $\mathbf{H}_r$): $\mathbf{a}_{kr} = -\mathbf{a}_z$.

$$\mathbf{E}_r(z) = \mathbf{a}_x E_{r0} e^{j\beta_1 z}, \tag{7-86}$$

$$\mathbf{H}_r(z) = (-\mathbf{a}_z) \times \frac{1}{\eta_1} \mathbf{E}_r(z) = -\mathbf{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}. \tag{7-87}$$

b) *Para la onda transmitida* ($\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$): $\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_z$.

$$\mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_x E_{t0} e^{-j\beta_2 z}, \tag{7-88}$$

$$\mathbf{H}_t(z) = \mathbf{a}_z \times \frac{1}{\eta_2} \mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}, \tag{7-89}$$

donde E_{t0} es la magnitud de $\mathbf{E}_t$ en $z = 0$ y β_2 y η_2 son la constante de fase y la impedancia intrínseca del medio 2, respectivamente. Observe que las direcciones de las flechas de $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_t$ en la figura 7-8 se han dibujado de forma arbitraria, ya que $\mathbf{E}_{r0}$ y $\mathbf{E}_{t0}$ pueden ser positivos o negativos, dependiendo de la magnitud relativa de los parámetros constitutivos de los dos medios.

Para determinar las dos magnitudes desconocidas E_{r0} y E_{t0} se requieren dos ecuaciones, proporcionadas por las condiciones en la frontera y que deben ser satisfechas por los campos eléctrico y magnético. Las componentes tangenciales (componentes en x) de las intensidades de campo eléctrico y magnético deben ser continuas en la superficie de separación $z = 0$ del dieléctrico. Tenemos

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) \qquad \text{o} \qquad E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \tag{7-90}$$

y

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t(0) \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}. \tag{7-91}$$

Al resolver las ecuaciones (7-90) y (7-91) se obtiene

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}, \tag{7-92}$$

$$E_{t0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}. \tag{7-93}$$

Coeficientes de reflexión y de transmisión

Las razones E_{r0}/E_{i0} y E_{t0}/E_{i0} se denominan ***coeficiente de reflexión*** y ***coeficiente de transmisión***, respectivamente. En términos de las impedancias intrínsecas son

$$\boxed{\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \text{(Incidencia normal)}} \tag{7-94}$$

y

$$\boxed{\tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \text{(Incidencia normal)}} \tag{7-95}$$

Las definiciones de Γ y τ que aparecen en las ecuaciones (7-94) y (7-95) son aplicables incluso si los medios son disipativos, es decir, incluso cuando η_1 y/o η_2 sean complejos. Por consiguiente, Γ y τ pueden ser complejos en el caso general. Los coeficientes de reflexión y transmisión están relacionados por la siguiente ecuación:

Relación entre los coeficientes de reflexión y de transmisión para la incidencia normal

$$\boxed{1 + \Gamma = \tau \qquad \text{(Incidencia normal)}} \tag{7-96}$$

El campo total en el medio 1 ($\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$) es la suma de los campos incidentes y reflejados. A partir de las ecuaciones (7-84) y (7-86) tenemos

Onda incidente más onda reflejada → onda estacionaria

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}(1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}), \tag{7-97}$$

que es una función de z. $|\mathbf{E}_1(z)|$ tendrá valores máximo y mínimo en las posiciones donde el factor $(1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z})$ sea máximo y mínimo, respectivamente (La magnitud de $e^{j2\beta_1 z}$ es la unidad.) De hecho, se tiene una onda estacionaria en el medio 1.

La relación entre el valor máximo y el valor mínimo de la intensidad de campo eléctrico de una onda estacionaria se denomina ***razón de onda estacionaria (SWR, Standing-Wave Ratio), S.***

Razón de onda estacionaria

$$\boxed{S = \frac{|E|_{máx}}{|E|_{mín}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \qquad \text{(Sin dimensiones).}} \tag{7-98}$$

Determinación de la magnitud del coeficiente de reflexión a partir de la razón de onda estacionaria

Una relación inversa de la ecuación (7-98) es

$$\boxed{|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} \qquad \text{(Sin dimensiones).}} \tag{7-99}$$

Intervalo de valores de $|\Gamma|$, 0 a +1

Intervalo de valores de S, 1 a ∞

Aunque el valor de Γ varía entre -1 y $+1$, el valor de S puede ir de 1 a ∞. Lo más usual es expresar S en una escala logarítmica. La razón de onda estacionaria en decibeles es de $20 \log_{10} S$. De esta manera, $S = 2$ corresponde a una razón de onda estacionaria de $20 \log_{10} 2 = 6.02$ (dB) y $|\Gamma| = (2-1)/(2+1) = \frac{1}{3}$. Una razón de onda estacionaria de 2 (dB) es equivalente a $S = 1.26$ y $|\Gamma| = 0.115$.

■ **EJERCICIO 7.10** a) Convierta $\Gamma = 0.20$ en S en (dB).
b) Convierta $S = 3$ (dB) en el coeficiente de reflexión $|\Gamma|$.

RESPUESTA : (a) 3.52 (dB), (b) 0.17.

La intensidad de campo magnético en el medio 1 se obtiene considerando las ecuaciones (7-85) y (7-87) para $\mathbf{H}_i(z)$ y $\mathbf{H}_r(z)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(z) &= \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}) \\ &= \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}(1 - \Gamma e^{j2\beta_1 z}). \end{aligned} \tag{7-100}$$

Hay que comparar esto con $\mathbf{E}_1(z)$ en la ecuación (7-97). Γ es real en un medio no disipativo; $|\mathbf{H}_1(z)|$ será un mínimo en las posiciones donde $|\mathbf{E}_1(z)|$ sea un máximo, y viceversa.

$(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)$ constituye la onda transmitida que se propaga en la dirección $+z$ en el medio 2. A partir de las ecuaciones (7-88) y (7-95) tenemos

$$\mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_x \tau E_{i0} e^{-j\beta_2 z}. \tag{7-101}$$

Además, de la ecuación (7-89) obtenemos

$$\mathbf{H}_t(z) = \mathbf{a}_y \frac{\tau}{\eta_2} E_{i0} e^{-j\beta_2 z}. \tag{7-102}$$

EJEMPLO 7-7

Una onda plana uniforme en un medio sin pérdidas con impedancia intrínseca η_1 incide normalmente sobre otro medio sin pérdidas con impedancia intrínseca η_2, a través de una superficie de separación plana.

a) Obtenga la expresión de las densidades de potencia media temporal en ambos medios.
b) Encuentre la razón de onda estacionaria en el medio 1 si $\eta_2 = 2\eta_1$.

SOLUCIÓN

a) La ecuación (7-79) nos proporciona la fórmula para calcular la densidad de potencia media temporal o el vector de Poynting medio temporal:

$$\mathscr{P}_{av} = \tfrac{1}{2}\mathscr{R}e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \tag{7-103}$$

Usamos las ecuaciones (7-97) y (7-100) para el medio 1.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}_{av})_1 &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \mathscr{R}e[(1+\Gamma e^{j2\beta_1 z})(1-\Gamma e^{-j2\beta_1 z})] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \mathscr{R}e[(1-\Gamma^2)+\Gamma(e^{j2\beta_1 z}-e^{-j2\beta_1 z})] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \mathscr{R}e[(1-\Gamma^2)+j2\Gamma \operatorname{sen} 2\beta_1 z] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} (1-\Gamma^2) \qquad (\mathrm{W/m^2}),\end{aligned} \tag{7-104}$$

donde Γ es un número real porque los dos medios no tienen pérdidas.

En el medio 2 usamos las ecuaciones (7-101) y (7-102) para obtener

$$(\mathscr{P}_{av})_2 = \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_2} \tau^2 \qquad (\mathrm{W/m^2}). \tag{7-105}$$

Como estamos tratando con medios sin pérdidas, el flujo de potencia en el medio 1 debe ser igual al del medio 2; es decir,

$$(\mathscr{P}_{av})_1 = (\mathscr{P}_{av})_2, \tag{7-106}$$

o

$$\boxed{1-\Gamma^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}\tau^2.} \tag{7-107}$$

Es fácil comprobar que la ecuación (7-107) es correcta, usando las ecuaciones (7-94) y (7-95).

b) Si $\eta_2 = 2\eta_1$,

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{1}{3}.$$

Entonces, a partir de la ecuación (7-98),

$$S = \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = 2.$$

Expresado en decibeles, $S = 20 \log_{10} 2 = 6.02$ (dB).

EJERCICIO 7.11 Dado un campo $\mathbf{E}_i(z, t) = \mathbf{a}_y 24 \cos(10^8 t - \beta z)$ (V/m) en el aire, que incide normalmente sobre un medio sin pérdidas con $\epsilon_{r2} = 2.25$, $\mu_{r2} = 1$ en la región $z \geq 0$, calcule (a) β, Γ, S, τ; (b) $\mathbf{E}_r(z, t)$; (c) $\mathbf{E}_2(z, t)$; (d) $\mathbf{H}_2(z, t)$; y (e) $(\mathcal{P}_{av})_z$.

RESPUESTA : (a) 1/3 (rad/m), −0.2, 1.5, 0.8; (b) $-\mathbf{a}_y 4.8 \cos(10^8 t + z/3)$ (V/m); (c) $\mathbf{a}_y 19.2 \cos(10^8 t - z/2)$ (V/m); (d) $-\mathbf{a}_x 0.0764 \cos(10^8 t - z/2)$ (A/m); (e) 0.733 (W/m²).

7-6.1 INCIDENCIA NORMAL SOBRE UN BUEN CONDUCTOR

Nuestro análisis de la incidencia normal de ondas planas sobre fronteras planas se ha limitado hasta ahora a medios sin pérdidas. En la práctica es común encontrar situaciones donde uno de los medios es un buen conductor, $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$. Como ejemplos están los reflectores metálicos y las guías de ondas. En estos casos generalmente podemos usar la aproximación de conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$) y obtener buenos resultados. Esta aproximación simplifica todas nuestras fórmulas.

Considere el fasor vectorial de campo incidente dado por las ecuaciones (7-84) y (7-85):

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}, \tag{7-84)(7-108}$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}. \tag{7-85)(7-109}$$

Valores de Γ y τ para la incidencia normal sobre una frontera conductora plana: $\Gamma = -1$, $\tau = 0$

Esta onda incide sobre una frontera plana perfectamente conductora en $z = 0$. Si sustituimos σ por ∞ en la ecuación (7-53) tenemos $\eta_2 = 0$. Esto era de esperarse y la frontera conductora actúa como un cortocircuito. A partir de las ecuaciones (7-94) y (7-95) podemos ver que $\Gamma = -1$ y $\tau = 0$. Por consiguiente, $E_{r0} = \Gamma E_{i0} = -E_{i0}$, y $E_{t0} = \tau E_{i0} = 0$. La onda incidente es totalmente reflejada, con una inversión de fase, y no se transmite potencia a través de una frontera perfectamente conductora. Tenemos

$$\mathbf{E}_r(z) = -\mathbf{a}_x E_{i0} e^{j\beta_1 z}, \tag{7-110}$$

$$\mathbf{H}_r(z) = -\mathbf{a}_y \times \frac{\mathbf{E}_r(z)}{\eta_1} = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}, \tag{7-111}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(z) &= \mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = \mathbf{a}_x E_{i0}(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \\ &= -\mathbf{a}_x j 2 E_{i0} \operatorname{sen} \beta_1 z, \end{aligned} \tag{7-112}$$

$$\mathbf{H}_1(z) = \mathbf{H}_i(z)+\mathbf{H}_r(z) = \mathbf{a}_y\frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z}+e^{j\beta_1 z})$$
$$= \mathbf{a}_y 2\frac{E_{i0}}{\eta_1}\cos\beta_1 z. \qquad (7\text{-}113)$$

Las ecuaciones (7-112) y (7-113) muestran que $\mathbf{E}_1(z)$ y $\mathbf{H}_1(z)$ están en cuadratura temporal ($\mathbf{E}_1$ está retrasado 90° con respecto a $\mathbf{H}_1$ debido al factor $-j$). Ambas expresiones representan ondas estacionarias y, teniendo en cuenta la ecuación (7-79), llegamos a la conclusión de que no hay potencia media asociada con la onda electromagnética total en el medio 1.

Para examinar el comportamiento espacio–temporal del campo total en el medio 1, escribimos primero las expresiones instantáneas correspondientes a los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético, que obtuvimos en las ecuaciones (7-112) y (7-113):

Los campos totales, E y H, exhiben ondas estacionarias para la incidencia normal sobre una frontera conductora plana.

$$\mathbf{E}_1(z,t) = \mathscr{Re}[\mathbf{E}_1(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_x 2E_{i0}\,\text{sen}\,\beta_1 z\,\text{sen}\,\omega t, \qquad (7\text{-}114)$$

$$\mathbf{H}_1(z,t) = \mathscr{Re}[\mathbf{H}_1(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_y 2\frac{E_{i0}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega t. \qquad (7\text{-}115)$$

$\mathbf{E}_1(z,t)$ y $\mathbf{H}_1(z,t)$ poseen ceros y máximos a distancias fijas de la frontera conductora, para todo t. Para un t determinado, tanto $\mathbf{E}_1$ como $\mathbf{H}_1$ varían senoidalmente con la distancia medida desde el plano frontera (z es negativa en el medio 1). En la figura 7-9 se muestran las ondas estacionarias de $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x E_1$ y $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_y H_1$ para varios valores de ωt. Podemos ver que $\mathbf{E}_1$ se anula en la superficie infinitamente conductora; así mismo, es cero en los puntos que son múltiplos de $\lambda_1/2$ desde la frontera. La onda estacionaria de $\mathbf{H}_1$ está desplazada un cuarto de longitud de onda ($\lambda_1/4$) con respecto a la de E

EJEMPLO 7-8

Una onda plana uniforme con polarización y ($\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$), cuya frecuencia es de 100 (MHz), se propaga en el aire en dirección $+x$ e incide normalmente sobre un plano perfectamente conductor en $x = 0$. Suponiendo que la amplitud de $\mathbf{E}_i$ es 6 (mV/m), escriba las expresiones fasoriales e instantáneas de

a) $\mathbf{E}_i$ y $\mathbf{H}_i$ de la onda incidente,

b) $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{H}_r$ de la onda reflejada, y

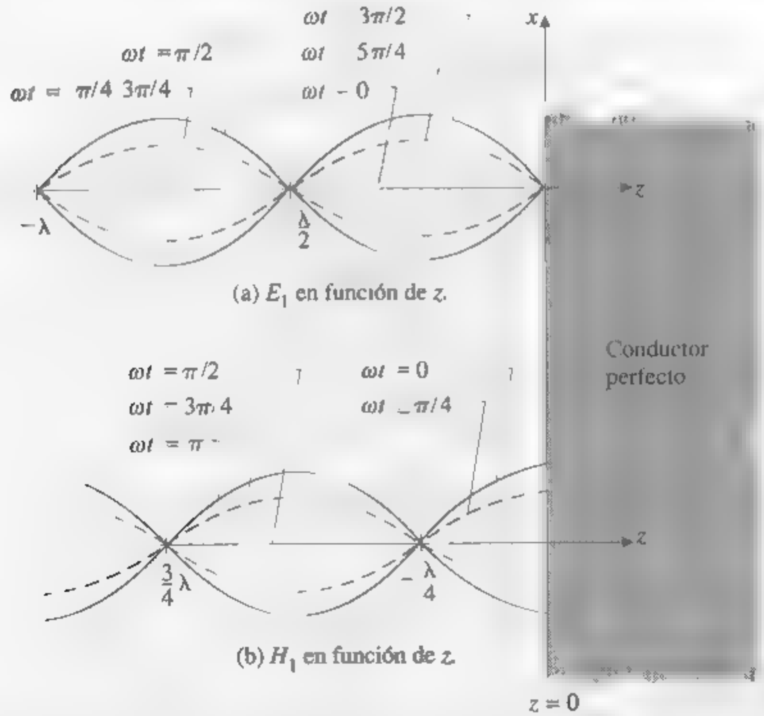
c) $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{H}_1$ de la onda total en el aire.

SOLUCIÓN

A la frecuencia de 100 (MHz),

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\times 10^8 \qquad \text{(rad/s)},$$

$$\beta_1 = k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\times 10^8}{3\times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{(rad/m)},$$



(a) E_1 en función de z.

(b) H_1 en función de z.

FIGURA 7-9 Ondas estacionarias de $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x E_1$ y $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_y H$ para distintos valores de ωt

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \qquad (\Omega).$$

a) *Para la onda incidente (una onda viajera):*

i) Expresiones fasoriales:

$$\mathbf{E}_i(x) = \mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} e^{-j2\pi x/3} \qquad \text{(V/m)},$$

$$\mathbf{H}_i(x) = \frac{1}{\eta_1}\mathbf{a}_x \times \mathbf{E}_i(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{-j2\pi x/3} \qquad \text{(A/m)}.$$

ii) Expresiones instantáneas:

$$\mathbf{E}_i(x, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{E}_i(x)e^{j\omega t}]$$
$$= \mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x\right) \qquad \text{(V/m)},$$

$$\mathbf{H}_i(x, t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x\right) \qquad \text{(A/m)}.$$

b) *Para la onda reflejada (una onda viajera):*

i) Expresiones fasoriales:

$$\mathbf{E}_r(x) = -\mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} e^{j2\pi x/3} \qquad \text{(V/m)},$$

$$\mathbf{H}_r(x) = \frac{1}{\eta_1}(-\mathbf{a}_x) \times \mathbf{E}_r(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{j2\pi x/3} \qquad \text{(A/m)}.$$

ii) Expresiones instantáneas:

$$\mathbf{E}_r(x, t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}_r(x)e^{j\omega t}]$$

$$= -\mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} \cos\left(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x\right) \qquad \text{(V/m)},$$

$$\mathbf{H}_r(x, t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos\left(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x\right) \qquad \text{(A/m)}.$$

c) *Para la onda total (una onda estacionaria):*

i) Expresiones fasoriales:

$$\mathbf{E}_1(x) = \mathbf{E}_i(x) + \mathbf{E}_r(x) = -\mathbf{a}_y j 12 \times 10^{-3} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \qquad \text{(V/m)},$$

$$\mathbf{H}_1(x) = \mathbf{H}_i(x) + \mathbf{H}_r(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \qquad \text{(A/m)}.$$

ii) Expresiones instantáneas:

$$\mathbf{E}_1(x, t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}_1(x)e^{j\omega t}]$$

$$= \mathbf{a}_y 12 \times 10^{-3} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \operatorname{sen}(2\pi \times 10^8 t) \qquad \text{(V/m)},$$

$$\mathbf{H}_1(x, t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \cos(2\pi \times 10^8 t) \qquad \text{(A/m)}.$$

■ **EJERCICIO 7.12** Encuentre las posiciones de $|E_1|_{máx}$ y $|H_1|_{máx}$ en el problema del ejemplo 7-8.

RESPUESTA : $|E_1|_{máx}$ en $x = -(2n + 1)3/4$ (m), $|H_1|_{máx}$ en $x = -3n/2$ (m), $n = 0, 1, 2, \ldots$

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-22 Defina el *coeficiente de reflexión* y el *coeficiente de transmisión*. ¿Cuál es la relación entre ambos para la incidencia normal?

P.7-23 ¿Cuáles son los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión en una superficie de separación con una frontera perfectamente conductora?

P.7-24 ¿Qué es una *onda estacionaria*?

P.7-25 Defina la *razón de onda estacionaria*. ¿Cuál es su relación con el coeficiente de reflexión?

P.7-26 ¿Cuál es la razón de onda estacionaria de la combinación de ondas incidente y reflejada en una frontera perfectamente conductora para incidencia normal?

COMENTARIOS

1. Γ y τ son reales en medios sin pérdidas. Γ puede ser positivo o negativo, pero τ no puede ser negativo.
2. Γ y τ son complejos en medios con pérdidas, lo que implica la introducción de un cambio de fase en la superficie de separación en la reflexión y transmisión.
3. Una onda estacionaria es el resultado de la superposición de una onda incidente y una onda reflejada.
4. Γ y S no tienen dimensiones: $0 \leq |\Gamma| \leq 1$ y $1 \leq S \leq \infty$.
5. Si $\eta_2 < \eta_1$ ($\Gamma < 0$), existe una $|\mathbf{E}_1|$ mínima en la superficie de separación; cuando $\eta_2 > \eta_1$ ($\Gamma > 0$), existe una $|\mathbf{E}_1|$ máxima en la superficie de separación.

7-7 INCIDENCIA OBLICUA DE ONDAS PLANAS SOBRE PLANOS DE DISCONTINUIDAD

Plano de incidencia

Todos los ángulos se miden relativos a la normal a la frontera.

Ahora consideraremos el caso más general de una onda plana uniforme que incide oblicuamente sobre una frontera plana. Remítase a la figura 7-10, donde el plano $z = 0$† es la superficie de separación entre el medio 1 (ϵ_1, μ_1) y el medio 2 (ϵ_2, μ_2). El plano que contiene la normal a la superficie de la frontera y el vector de número de onda $\mathbf{a}_k$ se denomina ***plano de incidencia***. Están en juego tres ángulos: el ***ángulo de incidencia*** θ_i, el ***ángulo de reflexión*** θ_r y el ***ángulo de refracción*** (o ***ángulo de transmisión***) θ_t, que representan respectivamente los ángulos que forman las ondas incidente, reflejada y transmitida con la normal a la frontera. Las líneas AO, $O'A'$ y $O'B$ son las intersecciones de los frentes de onda (superficies de fase constante) de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente, con el plano de incidencia. Puesto que las ondas incidente y reflejada se propagan con la misma velocidad de fase u_{p1} en el medio 1, las distancias $\overline{OA'}$ y $\overline{AO'}$ deben ser iguales. Así,

$$\overline{OO'} \operatorname{sen} \theta_r = \overline{OO'} \operatorname{sen} \theta_i.$$

o

$$\boxed{\theta_r = \theta_i.} \qquad (7\text{-}116)$$

Ley de Snell de la reflexión

La ecuación (7-116) nos asegura que ***el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia***, que es la ***ley de Snell de la reflexión***.

† No se pierde generalidad, ya que siempre es posible asignar el sistema de coordenadas de manera que el eje z sea perpendicular al plano frontera.

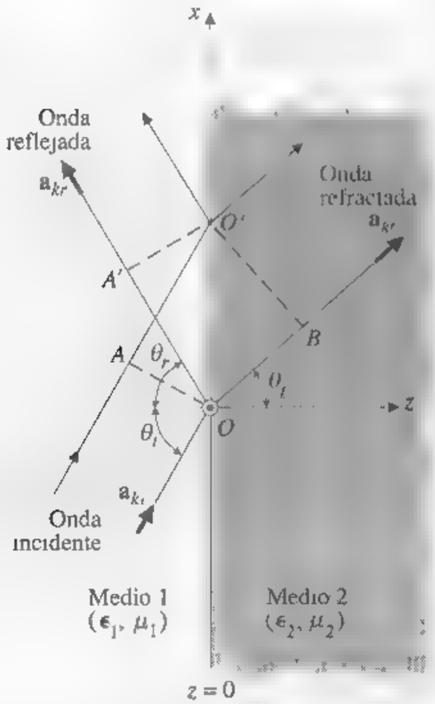


FIGURA 7-10 Onda plana uniforme que incide oblicuamente sobre una frontera dieléctrica plana.

El tiempo necesario para que la onda transmitida se propague de O a B en el medio 2 es igual al tiempo que requiere la onda incidente para propagarse de A a O'. Tenemos

$$\frac{\overline{OB}}{u_{p2}} = \frac{\overline{AO'}}{u_{p1}},$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO'}} = \frac{\overline{OO'}\ \text{sen}\ \theta_t}{\overline{OO'}\ \text{sen}\ \theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}},$$

de donde obtenemos

Ley de Snell de la refracción

$$\boxed{\frac{\text{sen}\ \theta_t}{\text{sen}\ \theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2},} \tag{7-117}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios 1 y 2, respectivamente. El ***índice de refracción*** de un medio es la razón de la velocidad de la luz (onda electromagnética) en el espacio libre a la velocidad en el medio; es decir, $n = c/u_p$. La relación de la ecuación (7-117) se conoce como ***ley de Snell de la refracción***.

Índice de refracción en un medio

Si los medios tienen la misma permeabilidad, $\mu_1 = \mu_2$, la ecuación (7-117) se convierte en

Ley de Snell de la refracción para $\mu_1 = \mu_2$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\operatorname{sen}\theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \qquad (\mu_1 = \mu_2),} \tag{7-118}$$

donde η_1 y η_2 son las impedancias intrínsecas del medio.

Observe que obtuvimos la ley de Snell de la reflexión y la ley de Snell de la refracción a partir de las trayectorias de los haces de las ondas incidente, reflejada y refractada. No se ha mencionado para nada la polarización de las ondas. Por consiguiente, las leyes de Snell son independientes de la polarización de las ondas.

7-7.1 REFLEXIÓN TOTAL

Examinemos ahora la ley de Snell de la ecuación (7-118) para el caso $\epsilon_1 > \epsilon_2$, o sea, cuando la onda en el medio 1 incide sobre un medio 2 menos denso. En esta situación, $\theta_t > \theta_i$. Como θ_t aumenta con θ_i, surge una situación interesante si $\theta_t = \pi/2$, ángulo para el cual la onda refractada se deslizará sobre la superficie de discontinuidad; un incremento adicional en θ_i dará lugar a la ausencia de onda refractada y se dice entonces que la onda incidente es totalmente reflejada. El ángulo de incidencia θ_c (que corresponde al umbral de la ***reflexión total*** $\theta_t = \pi/2$) se denomina ***ángulo crítico***. Si asignamos $\theta_t = \pi/2$ en la ecuación (7-118), tenemos

Fenómeno de la reflexión total cuando $\epsilon_2 < \epsilon_1$

Ángulo crítico

$$\operatorname{sen}\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}, \tag{7-119}$$

o

Fórmula del ángulo crítico

$$\boxed{\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad (\mu_1 = \mu_2).} \tag{7-120}$$

Esta situación se ilustra en la figura 7-11, donde $\mathbf{a}_{ki}$, $\mathbf{a}_{kr}$ y $\mathbf{a}_{kt}$ son los vectores unitarios que denotan la dirección de propagación de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

¿Qué sucede desde el punto de vista matemático si θ_i es mayor que el ángulo crítico θ_c ($\operatorname{sen}\theta_i > \operatorname{sen}\theta_c = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$)? A partir de la ecuación (7-118) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\operatorname{sen}\theta_i > 1, \tag{7-121}$$

lo cual no corresponde a una solución real para θ_t. Aunque sen θ_t es real en la ecuación (7-121), cos θ_t es imaginario cuando sen $\theta_t > 1$:

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_t} = \pm j\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\operatorname{sen}^2\theta_i - 1}. \tag{7-122}$$

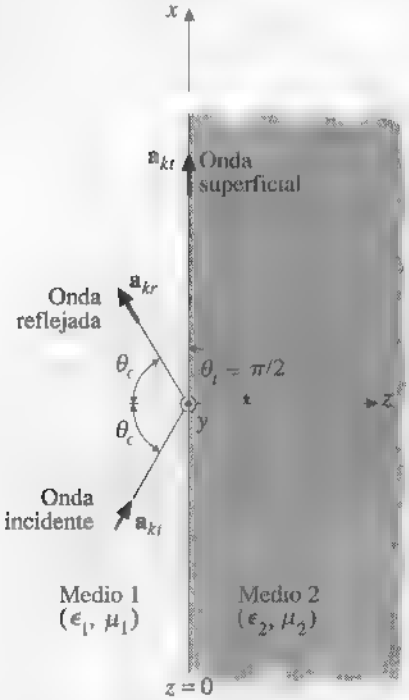


FIGURA 7-11 Onda plana que incide con un ángulo crítico, $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

En el medio 2, el vector unitario $\mathbf{a}_{kt}$ en la dirección de propagación de una onda transmitida (refractada) genérica, como se ilustra en la figura 7-10, es

$$\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_x \operatorname{sen} \theta_t + \mathbf{a}_z \cos \theta_t. \tag{7-123}$$

Tanto $\mathbf{E}_t$ como $\mathbf{H}_t$ varían espacialmente de acuerdo con el siguiente factor:

$$e^{-j\beta_2 \mathbf{a}_{kt} \cdot \mathbf{R}} = e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)}, \tag{7-124}$$

(donde $\mathbf{R}$ es un vector de posición como en la ecuación 7-22). Al usar las ecuaciones (7-118) y (7-119) para $\theta_i > \theta_c$, la expresión de la ecuación (7-124) se convierte en

$$e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_{2x} x}, \tag{7-125}$$

donde

$$\alpha_2 = \beta_2 \sqrt{(\epsilon_1/\epsilon_2) \operatorname{sen}^2 \theta_i - 1} \tag{7-125a}$$

y

$$\beta_{2x} = \beta_2 \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2} \operatorname{sen} \theta_i. \tag{7-125b}$$

Hemos abandonado el signo superior de la ecuación (7-122) porque generaría el resultado imposible de un campo creciente al aumentar z. A partir de la ecuación (7-125)

Ondas evanescentes y superficiales

podemos llegar a la conclusión de que si $\theta_i > \theta_c$, existe una ***onda evanescente*** *a lo largo* de la superficie de discontinuidad (en dirección x), que se atenúa exponencialmente (con rapidez) en el medio 2, en la dirección normal (dirección z). Esta onda está fuertemente ligada a la superficie de discontinuidad y se denomina ***onda superficial***; se ilustra en la figura 7-11. Se trata de una onda plana no uniforme y no se transmite potencia al medio 2 en estas condiciones (véase el Prob. P.7-27).

EJEMPLO 7-9

La permitividad del agua a frecuencias ópticas es $1.75\epsilon_0$. Se sabe que una fuente de luz isótropa a una distancia d bajo el agua produce un área circular iluminada de radio 5 (m). Determine d.

SOLUCIÓN

El índice de refracción del agua es $n_w = \sqrt{1.75} = 1.32$. Remítase a la figura 7-12 El radio del área iluminada, $O'P = 5$ (m), corresponde al ángulo crítico

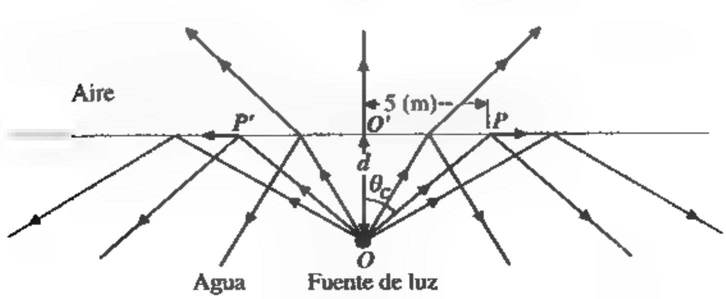
$$\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{n_w}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{1.32}\right) = 49.2°.$$

Por lo tanto,

$$d = \frac{\overline{OP}}{\tan\theta_c} = \frac{5}{\tan 49.2°} = 4.32 \qquad \text{(m)}.$$

Como puede verse en la figura 7-12, un rayo que incide con $\theta_i = \theta_c$ en P produce un rayo reflejado y un rayo refractado tangencial. Una parte de las ondas incidentes con $\theta_i < \theta_c$ se refleja de nuevo en el agua y otra parte se refracta en el aire; las ondas para las cuales $\theta_i > \theta_c$, son totalmente reflejadas (no se muestran las ondas superficiales evanescentes).

FIGURA 7-12 Fuente luminosa subacuática (ejemplo 7-9).



EJEMPLO 7-10

Se puede usar una varilla dieléctrica o fibra de material transparente para guiar la luz o una onda electromagnética en condiciones de reflexión interna total. Determine la mínima constante dieléctrica del medio que sirve de guía para que una onda que incida con cualquier ángulo sobre un extremo quede confinada dentro de la varilla hasta que salga por el extremo opuesto.

SOLUCIÓN

Remítase a la figura 7-13. Para que haya reflexión interna total, θ_1 debe ser mayor o igual que θ_c para el medio dieléctrico que sirve de guía; es decir,

$$\operatorname{sen}\theta_1 \geq \operatorname{sen}\theta_c. \tag{7-126}$$

Como $\theta_1 = \pi/2 - \theta_t$, la ecuación (7-126) se convierte en

$$\cos\theta_t \geq \operatorname{sen}\theta_c. \tag{7-127}$$

A partir de la ley de Snell de la refracción (Ec. 7-118), tenemos

$$\operatorname{sen}\theta_t = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}\operatorname{sen}\theta_i. \tag{7-128}$$

(Observe que los papeles de ϵ_1 y ϵ_2 en la figura 7-13 están intercambiados con respecto a la figura 7-10.) Al sustituir la ecuación (7-128) en la ecuación (7-127) y usando la ecuación (7-119) se obtiene

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\operatorname{sen}^2\theta_i} \geq \operatorname{sen}\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}},$$

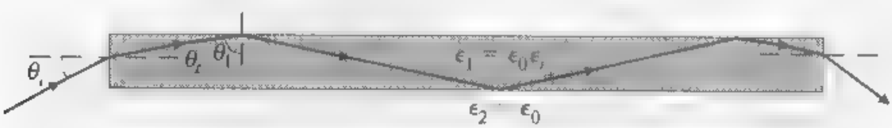
para lo cual se requiere

$$\epsilon_{r1} \geq 1 + \operatorname{sen}^2\theta_i. \tag{7-129}$$

Constante dieléctrica mínima para la fibra óptica

Puesto que el mayor valor del lado derecho de la ecuación (7-129) se alcanza cuando $\theta_i = \pi/2$, es necesario que la constante dieléctrica del medio que sirve de guía sea al menos 2, que corresponde a un índice de refracción $n_1 = \sqrt{2}$. El vidrio y el cuarzo satisfacen este requisito.

FIGURA 7-13 Varilla dieléctrica o fibra que guía una onda electromagnética por reflexión interna total.



■ **EJERCICIO 7.13** Una onda plana uniforme de 30 (MHz) emerge de un medio dieléctrico sin pérdidas ($\epsilon = 2.25\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) al aire a través de una superficie de separación plana en $z = 0$. El ángulo de incidencia es de 30°. Calcule el ángulo de refracción y las constantes de fase tanto en el medio dieléctrico como en el aire.

RESPUESTA : 48.6°, 0.94 (rad/m), 0.63 (rad/m).

■ **EJERCICIO 7.14** Encuentre el ángulo crítico del ejercicio 7.13. Determine las constantes de atenuación y fase en el aire si el ángulo de incidencia es 60°.

RESPUESTA : 41.8°, 0.52 (Np/m), 0.82 (rad/m).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-27 Defina el *plano de incidencia.*

P.7-28 Enuncie con palabras la *ley de Snell de la reflexión.*

P.7-29 Enuncie la *ley de Snell de la refracción* en términos de los índices de refracción de los medios y en términos de las impedancias intrínsecas de dos medios contiguos no magnéticos.

P.7-30 Defina el *ángulo crítico.* ¿Qué significa la *reflexión total*?

P.7-31 Defina la *onda superficial.*

COMENTARIOS

1. Las leyes de Snell son independientes de la polarización.
2. Las leyes de Snell son independientes de la frecuencia de la onda si los parámetros constitutivos del medio son independientes de la frecuencia.
3. Todos los ángulos de las leyes de Snell se miden a partir de la normal a la superficie de separación.
4. La reflexión total sólo es posible si $\epsilon_2 < \epsilon_1$.
5. No se transmite potencia a través de la superficie de discontinuidad cuando $\theta_i > \theta_c$.

7-7.2 LA IONOSFERA

En la atmósfera superior de la Tierra, aproximadamente entre los 50 y 500 (km) de altitud, hay capas de gases ionizados conocidas como la ***ionosfera***. La ionosfera consiste en electrones libres e iones positivos que se producen cuando los átomos y las moléculas de la atmósfera superior absorben la radiación ultravioleta del Sol. Las partículas cargadas tienden a ser atrapadas por el campo magnético de la Tierra. La altitud y el carácter de las capas ionizadas dependen de la naturaleza de la radiación solar y de la composición de la atmósfera. Cambian de manera muy complicada de acuerdo con el ciclo de las manchas solares, la época del año y la hora del día. Las densidades de iones y electrones en las capas ionizadas son prácticamente iguales. Los gases ionizados con densidades iguales de iones y electrones se llaman ***plasmas***.

Composición de la ionosfera

Plasmas

La ionosfera juega un papel muy importante en la propagación de las ondas electromagnéticas y afecta las telecomunicaciones. Como los electrones son mucho más ligeros que los iones positivos, están más acelerados por los campos eléctricos de las ondas electromagnéticas que pasan por la ionosfera. Los análisis efectuados muestran que se puede estudiar el efecto de la ionosfera o el plasma en la propagación de las ondas considerando una permitividad efectiva ϵ_p:

Permitividad efectiva del plasma

$$\boxed{\begin{aligned}\epsilon_p &= \epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\\ &= \epsilon_0\left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right) \qquad \text{(F/m)},\end{aligned}} \tag{7-130}$$

donde ω_p es la ***frecuencia angular del plasma*** y

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}. \tag{7-131}$$

En la ecuación (7-131), N es el número de electrones por unidad de volumen y e y m son, respectivamente, la carga y la masa electrónica.

La constante de propagación se obtiene de las ecuaciones (7-42) y (7-130).

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_0}\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}. \tag{7-132}$$

γ se vuelve real cuando $f < f_p$, lo que indica una atenuación sin propagación. Por otra parte, si $f > f_p$, γ es imaginaria y las ondas electromagnéticas se propagarán sin atenuación por la ionosfera (suponiendo pérdidas insignificantes por colisiones).

Si sustituimos los valores de e, m y ϵ_0 en la ecuación (7-131), llegamos a una fórmula muy sencilla para determinar la frecuencia (de corte) del plasma:

Fórmula de la frecuencia del plasma

$$f_p \cong 9\sqrt{N} \qquad \text{(Hz)}. \tag{7-133}$$

Como mencionamos antes, N no es constante para una determinada altitud; varía de acuerdo con la hora del día, la temporada y otros factores. La densidad de electrones en la ionosfera varía desde $10^{10}/\text{m}^3$ en la capa más baja hasta $10^{12}/\text{m}^3$ en la más alta. Empleando estos valores de N en la ecuación (7-133) se encuentra que f_p varía de 0.9 a 9 (MHz). Por lo tanto, hay que usar frecuencias muy superiores a 9 (MHz) para comunicarse con un satélite o con una estación espacial más allá de la ionosfera, para asegurar que la onda atraviese la capa con el mayor valor de N para cualquier ángulo de incidencia. Las señales con frecuencias inferiores a 0.9 (MHz) no pueden penetrar ni siquiera en la capa más baja de la ionosfera, pero pueden propagarse a grandes distancias alrededor de la Tierra debido a las reflexiones múltiples entre la frontera de la ionosfera y la superficie de la Tierra. Las señales con frecuencias entre 0.9 y 9 (MHz) penetrarán parcialmente en las capas inferiores de la ionosfera, pero serán reflejadas cuando N sea muy grande.

EJEMPLO 7-11

Cuando una nave espacial reingresa en la atmósfera de la Tierra, su velocidad y temperatura ionizan los átomos y las moléculas circundantes y crean un plasma. Se ha estimado que la densidad de electrones es de unos 2×10^8 por (cm^3). Analice el efecto del plasma en las frecuencias que se pueden usar para la comunicación por radio entre la nave espacial y los controladores de la misión en la Tierra.

SOLUCIÓN

Para

$$N = 2 \times 10^8 \text{ por (cm}^3)$$
$$= 2 \times 10^{14} \text{ por (m}^3),$$

la ecuación (7-133) nos da $f_p = 9 \times \sqrt{2 \times 10^{14}} = 12.7 \times 10^7$ (Hz) o 127 (MHz). Por lo tanto, no es posible establecer la comunicación por radio a frecuencias inferiores a 127 (MHz).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-32 ¿Cuál es la composición de la *ionosfera*?

P.7-33 ¿Cuál es la importancia de la *frecuencia del plasma*?

Ya antes señalamos que las leyes de Snell y, por consiguiente, el angulo crítico de la reflexión total son independientes de la polarización del campo eléctrico incidente. Sin embargo, las fórmulas de los coeficientes de reflexión y transmisión dependen de la polarización. En las dos subsecciones siguientes analizaremos de forma separada el comportamiento de la polarización perpendicular y de la polarización paralela.

7-7.3 POLARIZACIÓN PERPENDICULAR

Significado de la polarización perpendicular

En el caso de incidencia oblicua con polarización perpendicular, $\mathbf{E}_i$ es perpendicular al plano de incidencia, como se muestra en la figura 7-14. Al observar que

$$\mathbf{a}_{ki} = \mathbf{a}_x \operatorname{sen} \theta_i + \mathbf{a}_z \cos \theta_i, \tag{7-134}$$

tenemos, a partir de las ecuaciones (7-23) y (7-25),

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen}\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{7-135}$$

$$\mathbf{H}_i(x, z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\mathbf{a}_x \cos \theta_i + \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_i) e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen}\theta_i + z\cos\theta_i)}, \tag{7-136}$$

donde se ha usado β_1 en lugar de k_1 en un medio sin pérdidas.

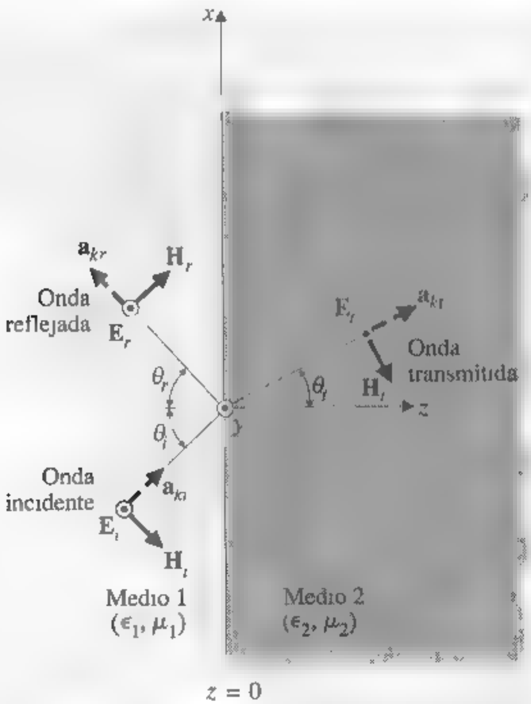


FIGURA 7-14 Onda plana que incide oblicuamente sobre una frontera dieléctrica plana (polarización perpendicular).

Para la onda reflejada,

$$\mathbf{a}_{kr} = \mathbf{a}_x \operatorname{sen} \theta_r - \mathbf{a}_z \cos \theta_r. \tag{7-137}$$

Los campos eléctrico y magnético reflejados son

$$\mathbf{E}_r(x, z) = \mathbf{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)} \tag{7-138}$$

$$\mathbf{H}_r(x, z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1} (\mathbf{a}_x \cos \theta_r + \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_r) e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)}. \tag{7-139}$$

Para la onda transmitida,

$$\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_x \operatorname{sen} \theta_t + \mathbf{a}_z \cos \theta_t, \tag{7-140}$$

tenemos

$$\mathbf{E}_t(x, z) = \mathbf{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)} \tag{7-141}$$

$$\mathbf{H}_t(x, z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} (-\mathbf{a}_x \cos \theta_t + \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_t) e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)}. \tag{7-142}$$

En las ecuaciones anteriores hay cuatro incógnitas: E_{r0}, E_{t0}, θ_r y θ_t. Su determinación es posible a partir de los requisitos de que las componentes tangenciales de **E** y **H** sean continuas en la frontera $z = 0$.

De $E_{iy}(x, 0) + E_{ry}(x, 0) = E_{ty}(x, 0)$ tenemos

$$E_{i0}e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen}\theta_i} + E_{r0}e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen}\theta_r} = E_{t0}e^{-j\beta_2 x \operatorname{sen}\theta_t}. \tag{7-143}$$

En forma similar, de $H_{ix}(x, 0) + H_{rx}(x, 0) = H_{tx}(x, 0)$ tenemos

$$\frac{1}{\eta_1}(-E_{i0}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen}\theta_i} + E_{r0}\cos\theta_r e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen}\theta_r})$$
$$= -\frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-j\beta_2 x \operatorname{sen}\theta_t}. \tag{7-144}$$

Puesto que es necesario satisfacer las ecuaciones (7-143) y (7-144) *para todo* x, los tres factores exponenciales que son funciones de x deben ser iguales ("igualdad de fase"). Por lo tanto,

$$\beta_1 x \operatorname{sen}\theta_i = \beta_1 x \operatorname{sen}\theta_r = \beta_2 x \operatorname{sen}\theta_t,$$

lo cual nos lleva a la ley de Snell de la reflexión ($\theta_r = \theta_i$) y a la ley de Snell de la refracción ($\operatorname{sen}\theta_t/\operatorname{sen}\theta_i = \beta_1/\beta_2 = n_1/n_2$). Con esto podemos escribir las ecuaciones (7-143) y (7-144) de una forma mucho más sencilla:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \tag{7-145}$$

y

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0})\cos\theta_i = \frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t, \tag{7-146}$$

a partir de las cuales podemos hallar E_{r0} y E_{t0} en términos de E_{i0}. Los coeficientes de reflexión y transmisión son

Coeficiente de reflexión para la polarización perpendicular

$$\boxed{\Gamma_\perp = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}} \tag{7-147}^\dagger$$

y

Coeficiente de transmisión para la polarización perpendicular

$$\boxed{\tau_\perp = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}.} \tag{7-148}^\dagger$$

Si $\theta_i = 0$, con lo cual $\theta_r = \theta_t = 0$, estas expresiones se reducen a las correspondientes para la incidencia normal (Ecs. (7-94) y (7-95)), como debería de ser. Así mismo, $\Gamma_\perp$ y $\tau_\perp$ están relacionados de la siguiente manera:

Relación entre los coeficientes de reflexión y de transmisión para la polarización perpendicular

$$\boxed{1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp,} \tag{7-149}$$

que es similar a la ecuación (7-96) para la incidencia normal.

† Estas ecuaciones se conocen también como ***ecuaciones de Fresnel***

Si el medio 2 es un conductor perfecto, $\eta_2 = 0$, tenemos $\Gamma_\perp = -1$ ($E_{r0} = -E_{i0}$) y $\tau_\perp = 0$ ($E_{t0} = 0$). El campo **E** tangencial sobre la superficie del conductor se anula y no se transmite energía a través de una frontera perfectamente conductora.

EJEMPLO 7-12

La expresión instantánea del campo eléctrico de una onda plana uniforme en el aire es

$$\mathbf{E}_i(x, z; t) = \mathbf{a}_y 10 \cos(\omega t + 3x - 4z) \quad \text{(V/m)}.$$

La onda incide sobre una frontera plana perfectamente conductora en $z = 0$.

a) Calcule la constante de fase β_1, la frecuencia angular ω y el ángulo de incidencia θ_i.
b) Determine $\mathbf{E}_r(x, z)$.
c) Analice el comportamiento de $\mathbf{E}_1(x, z; t)$.

SOLUCIÓN

a) La expresión fasorial de $\mathbf{E}_i$ es

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y 10 e^{j3x - j4z},$$

que representa una onda polarizada perpendicularmente que se propaga en las direcciones $-x$ y $+z$. Basándonos en las ecuaciones (7-20) y (7-21) tenemos

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}_{ni} k_i = -\mathbf{a}_x(\beta_1 \operatorname{sen} \theta_i) + \mathbf{a}_z(\beta_1 \cos \theta_i),$$

donde ya hemos hecho la observación de que $k_i = \beta_1$ en el medio sin pérdidas 1. Entonces,

$$\beta_1 \operatorname{sen} \theta_i = 3, \text{ y}$$

$$\beta_1 \cos \theta_i = 4,$$

de lo cual se obtiene

$$\beta_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \text{(rad/m), y}$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \tfrac{3}{4} = 36.9°.$$

Así mismo, $\beta_1 = \omega/c$ y $\omega = \beta_1 c = 5 \times (3 \times 10^8) = 1.5 \times 10^9$ (rad/s).

b) Se sabe que para una superficie de discontinuidad perfectamente conductora, $\Gamma_\perp = -1$, $E_{r0} = -E_{i0} = -10$, y

$$\mathbf{E}_r(x, z) = -\mathbf{a}_y 10 e^{j3x + j4z},$$

que se propaga en las direcciones $-x$ y $-z$.

c)
$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(x, z) &= \mathbf{E}_i(x, z) + \mathbf{E}_r(x, z) \\ &= \mathbf{a}_y 10(e^{-j4z} - e^{j4z})e^{j3x} \\ &= -\mathbf{a}_y 20j(\operatorname{sen} 4z)e^{j3x},\end{aligned}$$

que corresponde a la expresión instantánea

$$\mathbf{E}_1(x, z; t) = \mathbf{a}_y 20\,(\text{sen } 4z)\cos(1.5 \times 10^9 t + 3x - \pi/2).$$

Por consiguiente, $\mathbf{E}_1(x, z, t)$ está compuesto por una onda estacionaria en la dirección z y una onda viajera en la dirección x. La onda estacionaria tiene un valor de cero en $4z = n\pi$ o $z = n\pi/4$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). La onda viajera es una onda plana no uniforme, pues su amplitud no es constante en la dirección z

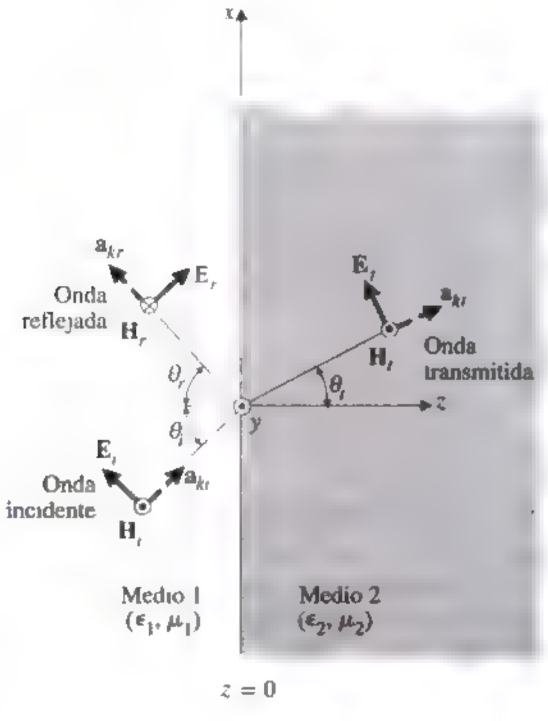
7-7.4 POLARIZACIÓN PARALELA

Significado de la polarización paralela

Cuando una onda plana uniforme con polarización paralela incide de manera oblicua sobre una frontera plana, $\mathbf{E}_i$ está en el plano de incidencia ($\mathbf{H}_i$ es perpendicular al plano de incidencia), como se ilustra en la figura 7-15. Los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético incidentes y reflejados en el medio 1 son

$$\mathbf{E}_i(x, z) = E_{i0}(\mathbf{a}_x \cos\theta_i - \mathbf{a}_z \text{ sen } \theta_i)e^{-j\beta_1(x \text{ sen } \theta_i + z \cos\theta_i)}, \tag{7-150}$$

FIGURA 7-15 Onda plana que incide oblicuamente sobre una frontera dieléctrica plana (polarización paralela).



$$\mathbf{H}_i(x, z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_i + z \cos \theta_i)}, \tag{7-151}$$

$$\mathbf{E}_r(x, z) = E_{r0}(\mathbf{a}_x \cos \theta_r + \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_r) e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)}, \tag{7-152}$$

$$\mathbf{H}_r(x, z) = -\mathbf{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)}. \tag{7-153}$$

Los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético transmitidos en el medio 2 son

$$\mathbf{E}_t(x, z) = E_{t0}(\mathbf{a}_x \cos \theta_t - \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_t) e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)}, \tag{7-154}$$

$$\mathbf{H}_t(x, z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)}. \tag{7-155}$$

Los requisitos de continuidad de las componentes tangenciales de **E** y **H** en $z = 0$ nos llevan de nuevo a las leyes de Snell de la reflexión y de la refracción, así como a las dos ecuaciones siguientes:

$$(E_{i0} + E_{r0}) \cos \theta_i = E_{t0} \cos \theta_t, \tag{7-156}$$

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2} E_{t0}. \tag{7-157}$$

Resolviendo para E_{r0} y E_{t0} en términos de E_{i0} obtenemos

Coeficiente de reflexión para la polarización paralela

$$\boxed{\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}} \tag{7-158}^{\dagger}$$

y

Coeficiente de transmisión para la polarización paralela

$$\boxed{\tau_{\parallel} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}.} \tag{7-159}^{\dagger}$$

Es fácil verificar que

Relación entre los coeficientes de reflexión y de transmisión para la polarización paralela

$$\boxed{1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right).} \tag{7-160}$$

La ecuación (7-160) difiere de la ecuación (7-149) para la polarización perpendicular, excepto cuando $\theta_i = \theta_t = 0$, que es el caso para la incidencia normal.

Si el medio 2 es un conductor perfecto ($\eta_2 = 0$), las ecuaciones (7-158) y (7-159) se simplifican a $\Gamma_{\parallel} = -1$ y $\tau_{\parallel} = 0$, respectivamente, con lo que se anula la componente

[†] Estas ecuaciones se conocen también como ***ecuaciones de Fresnel***

tangencial del campo **E** total sobre la superficie del conductor, como era de esperarse Observe que las direcciones de referencia que se eligieron para $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{H}_r$ en las figuras 7-14 y 7-15 son todas arbitrarias. Las direcciones reales de $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{H}_r$ pueden o no ser iguales a las que se muestran, dependiendo de si $\Gamma_\perp$ en la ecuación (7-147) y $\Gamma_\parallel$ en la ecuación (7-158) es positivo o negativo, respectivamente.

Si se representa gráficamente $|\Gamma_\perp|^2$ y $|\Gamma_\parallel|^2$ en función de θ_i vemos que el primero siempre es mayor que el segundo, excepto cuando $\theta_i = 0$, donde son iguales. Esto significa que cuando una onda no polarizada incide sobre una superficie de separación dieléctrica plana, la onda reflejada tendrá mayor potencia en la componente con polarización perpendicular que en aquella con polarización paralela. Una aplicación conocida de este hecho es el diseño de las gafas de sol Polaroid que reducen los reflejos del sol. Gran parte de la luz solar que reciben los ojos ha sido reflejada en superficies horizontales sobre la tierra. Como $|\Gamma_\perp|^2 > |\Gamma_\parallel|^2$, la luz que llega a los ojos es predominantemente perpendicular al plano de reflexión (el mismo que el plano de incidencia) y por lo tanto el campo eléctrico es paralelo a la superficie terrestre. Las gafas de sol Polaroid están diseñadas para filtrar esta componente.

Principio en el que se basan las gafas de sol Polaroid para reducir los reflejos solares

7-7.5 Ángulo de Brewster de no reflexión

A partir de la expresión del coeficiente de reflexión (Ec (7-158)) podemos observar que el numerador es la diferencia de dos términos. Con esto surge la duda de si hay una combinación de η_1, η_2 y θ_i que hace que $\Gamma_\parallel = 0$ y no haya reflexión Si denotamos este valor particular de θ_i con $\theta_{B\parallel}$, se tiene que satisfacer

$$\eta_2 \cos\theta_t = \eta_1 \cos\theta_{B\parallel}. \tag{7-161}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (7-161) y usando la ecuación (7-117) se obtiene

$$\operatorname{sen}^2\theta_{B\parallel} = \frac{1-(\eta_2/\eta_1)^2}{1-(\eta_2\beta_1/\eta_1\beta_2)^2},$$

o

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta_{B\parallel} = \frac{1-\mu_2\epsilon_1/\mu_1\epsilon_2}{1-(\epsilon_1/\epsilon_2)^2}.} \tag{7-162}$$

El ángulo $\theta_{B\parallel}$ se conoce como ***ángulo de Brewster*** de no reflexión para el caso de polarización paralela.

Ángulo de Brewster de no reflexión

Fórmula del ángulo de Brewster

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta_{B\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1+(\epsilon_1/\epsilon_2)}}, \qquad (\mu_1 = \mu_2).} \tag{7-163}$$

Una forma alternativa de la ecuación (7-163) es

Fórmula alternativa del ángulo de Brewster

$$\boxed{\theta_{B\|} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \qquad (\mu_1 = \mu_2).} \tag{7-164}$$

■ **EJERCICIO 7.15** Compruebe que las ecuaciones (7-163) y (7-164) son equivalentes

Al llegar a este punto es probable que el lector se pregunte por qué no se examinó el ángulo de Brewster de no reflexión para el caso de polarización perpendicular. Matemáticamente podríamos hallar una fórmula para $\theta_{B\perp}$, el ángulo de incidencia θ_i con el cual se anularía $\Gamma_\perp$. Si asignamos cero al numerador de la ecuación (7-147), la condición

$$\eta_2 \cos\theta_{B\perp} = \eta_1 \cos\theta_t, \tag{7-165}$$

junto con la ley de Snell de la reflexión (Ec. (7-117)) produciría

$$\text{sen}^2\,\theta_{B\perp} = \frac{1-\mu_1\epsilon_2/\mu_2\epsilon_1}{1-(\mu_1/\mu_2)^2}. \tag{7-166}$$

Es evidente que $\theta_{B\perp}$ no existe si $\mu_1 = \mu_2$, como sucede usualmente para los medios donde se propagan las ondas.

Debido a la diferencia en las fórmulas de los ángulos de Brewster correspondientes a las polarizaciones perpendicular y paralela, es posible separar estos dos tipos de polarización en una onda no polarizada. Cuando una onda no polarizada, como la luz aleatoria, incide sobre una frontera con el ángulo de Brewster θ_B dado por la ecuación (7-164), sólo se reflejará la componente con polarización perpendicular. Por lo tanto, el ángulo de Brewster también se conoce como ***ángulo de polarización***. En este principio se basa el uso de las ventanas de cuarzo montadas dormando el ángulo de Brewster en los extremos de un tubo láser para controlar la polarización del haz luminoso emitido

EJEMPLO 7-13

Una onda electromagnética incide desde el aire sobre una superficie de agua, que tiene una constante dieléctrica de 80.

a) Determiné el ángulo de Brewster para la polarización paralela, $\theta_{B\|}$, el ángulo de transmisión correspondiente

b) Si la onda tiene polarización perpendicular e incide desde el aire sobre la superficie de agua con un ángulo $\theta_i = \theta_{B\|}$, determine los coeficientes de reflexión y transmisión

SOLUCIÓN

a) El ángulo de Brewster de no reflexión para la polarización paralela puede obtenerse directamente de la ecuación (7-163):

$$\theta_{B\parallel} = \text{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+(1/\epsilon_{r2})}}$$
$$= \text{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+(1/80)}} = 81.0°.$$

El ángulo de transmisión correspondiente es, a partir de la ecuación (7-118),

$$\theta_t = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\,\theta_{B\parallel}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}+1}}\right)$$
$$= \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right) = 6.38°.$$

b) Si la onda incide con polarización perpendicular, se usan las ecuaciones (7-147) y (7-148) para determinar $\Gamma_\perp$ y $\tau_\perp$ en $\theta_i = 81.0°$ y $\theta_t = 6.38°$ ($\eta_1 = 377\ \Omega$, $\eta_2 = 377/\sqrt{\epsilon_{r2}} = 40.1\ \Omega$):

$$\Gamma_\perp = \frac{40.1 \cos 81° - 377 \cos 6.38°}{40.1 \cos 81° + 377 \cos 6.38°} = -0.967,$$

$$\tau_\perp = \frac{2 \times 377 \times \cos 81°}{40.1 \cos 81° + 377 \cos 6.38°} = 0.033.$$

Observamos que se satisface la relación entre $\Gamma_\perp$ y $\tau_\perp$ expresada en la ecuación (7-149).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-34 Defina la polarización perpendicular y la polarización paralela para la incidencia oblicua de ondas planas sobre una frontera plana.

P.7-35 ¿En qué condiciones los coeficientes de reflexión y transmisión para la polarización perpendicular serán iguales a los de la polarización paralela?

P.7-36 Defina el *ángulo de Brewster*. ¿Cuándo existe en la superficie de separación de dos medios no magnéticos?

P.7-37 ¿Por qué el ángulo de Brewster también se conoce como *ángulo de polarización*?

COMENTARIOS

1. Los coeficientes de reflexión y transmisión en una superficie de discontinuidad dependen de la polarización de la onda incidente, de los parámetros constitutivos de los medios y del ángulo de incidencia.
2. A diferencia del ángulo crítico de reflexión total, que sólo existe cuando $\epsilon_2 < \epsilon_1$, siempre existe el ángulo de Brewster de no reflexión para polarización paralela para dos medios no magnéticos, tanto si $\epsilon_2 < \epsilon_1$ como si $\epsilon_2 > \epsilon_1$.

RESUMEN

A grandes distancias de una fuente finita que irradia ondas electromagnéticas, una pequeña porción del frente de onda es casi un plano; por lo tanto, el estudio de las ondas planas uniformes tiene especial importancia En este capítulo

- examinamos el comportamiento de las ondas planas uniformes en medios con y sin pérdidas;
- explicamos el efecto Doppler que se presenta cuando hay movimiento relativo entre una fuente con dependencia armónica con el tiempo y un receptor;
- analizamos la polarización de las ondas planas y mostramos la relación entre las ondas de polarización lineal y circular;
- explicamos el significado de un número de onda complejo y una constante de propagación compleja en un medio con pérdidas;
- estudiamos el efecto de penetración en los conductores y obtuvimos la fórmula para la profundidad de penetración;
- presentamos el concepto de dispersión de la señal y explicamos la diferencia entre las velocidades de fase y de grupo;
- analizamos el flujo de potencia electromagnética y el teorema de Poynting,
- estudiamos la reflexión y la refracción de ondas electromagnéticas en fronteras planas, con incidencia tanto normal como oblicua;
- obtuvimos las leyes de Snell de la reflexión y de la refracción;
- explicamos el efecto de la ionosfera en la propagación de ondas, y
- examinamos las condiciones de reflexión total y de no reflexión.

PROBLEMAS

P.7-1 (a) Obtenga las ecuaciones de onda que rigen los campos **E** y **H** en un medio conductor sin fuentes cuyos parametros constitutivos son ϵ, μ y σ. (b) Obtenga las ecuaciones de Helmholtz correspondientes para campos con dependencia armónica con el tiempo.

P.7-2 Se usa un radar Doppler de 1 (GHz) en tierra para determinar la posición y velocidad de un aeroplano que se aproxima Suponga que la señal reflejada por el aeroplano a un ángulo de elevación de 15 5° presentó un retardo temporal de 0.3 (ms) y un cambio en frecuencia de 2.64 (kHz); determine la distancia, altura y velocidad del aeroplano.

P.7-3 Obtenga una fórmula general que exprese el fasor **E**(**R**) en términos del fasor **H**(**R**) para una onda transversal electromagnética y la impedancia intrínseca del medio, siendo **R** el vector de posición.

P.7-4 La expresión de la intensidad de campo magnético instantáneo de una onda plana uniforme que se propaga por el aire en dirección $+y$ está dada por

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_z 4 \times 10^{-6} \cos\left(10^7 \pi t - k_0 y + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(A/m)}.$$

a) Determine k_0 y la posición donde se anula H_z en $t = 3$ (ms)

b) Escriba la expresión de $\mathbf{E}$ instantáneo.

P.7-5 El campo $\mathbf{E}$ de una onda plana que se propaga en un medio dieléctrico está dado por

$$E(t, z) = \mathbf{a}_x 2 \cos(10^8 t - z/\sqrt{3}) - \mathbf{a}_y \operatorname{sen}(10^8 t - z/\sqrt{3}) \qquad \text{(V/m)}$$

a) Determine la frecuencia y la longitud de onda de la onda.

b) ¿Cuál es la constante dieléctrica del medio?

c) Describa la polarización de la onda.

d) Encuentre el campo $\mathbf{H}$ correspondiente.

P.7-6 Demuestre que una onda plana con la siguiente expresión del campo eléctrico instantáneo

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_{10} \operatorname{sen}(\omega t - kz) + \mathbf{a}_y E_{20} \operatorname{sen}(\omega t - kz + \psi)$$

tiene polarización elíptica.

P.7-7 Una onda plana uniforme de 3 (GHz), polarizada en y, se propaga en la dirección $+x$ en un medio no magnético con constante dieléctrica de 2.5 y tangente de pérdidas de 0.05

a) Determine la distancia a la cual se reducirá a la mitad la amplitud de la onda viajera.

b) Determine la impedancia intrínseca, la longitud de onda, la velocidad de fase y la velocidad de grupo de la onda en el medio.

c) Suponiendo $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y 50 \operatorname{sen}(6\pi 10^9 t + \pi/3)$ (V/m) en $x = 0$, escriba la expresión de $\mathbf{H}$ instantáneo para todo t y x.

P.7-8 Determine y compare la impedancia intrínseca, la constante de atenuación (tanto en Np/m como en dB/m) y la profundidad de penetración del cobre ($\sigma_{cu} = 5.80 \times 10^7$ (S/m)) y el bronce ($\sigma_{br} = 1.59 \times 10^7$ (S/m)) a las siguientes frecuencias: (a) 1 (MHz) y (b) 1 (GHz).

P.7-9 Si la profundidad de penetración del grafito a 100 (MHz) es 0.16 (mm), determine (a) la conductividad del grafito y (b) la distancia que se propaga una onda de 1 (GHz) en el grafito antes de que su intensidad de campo se reduzca en 30 (dB).

P.7-10 Hay un continuo debate sobre los riesgos de la radiación para la salud del ser humano. Los cálculos siguientes sirven para una comparación a grandes rasgos.

a) En Estados Unidos la norma de seguridad personal para trabajo con equipos de microondas es que la densidad de potencia sea inferior a 10 (mW/cm^2). Calcule la norma correspondiente en términos de la intensidad de campo eléctrico y en términos de la intensidad de campo magnético.

b) Se estima que la Tierra recibe energía radiante del Sol a razón de unos 1.3 (kW/m^2) en un día soleado. Suponga que se trata de una onda monocromática plana (que no lo es) y calcule las amplitudes equivalentes de los vectores de intensidad de campo eléctrico y magnético.

P.7-11 Demuestre que el vector de Poynting instantáneo de una onda plana con polarización circular que se propaga en un medio sin pérdidas es una constante independiente del tiempo y de la distancia.

P.7-12 Suponga que la intensidad de campo eléctrico de radiación de un sistema de antenas es

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_\theta E_\theta + \mathbf{a}_\phi E_\phi,$$

y determine la expresión de la intensidad del flujo de potencia media que parte por unidad de área.

P.7-13 Desde el punto de vista del electromagnetismo, la potencia transmitida por un cable coaxial sin pérdidas puede calcularse en términos del vector de Poynting dentro del medio dieléctrico que hay entre el conductor interno y el revestimiento externo Suponga que la aplicación de un voltaje de corriente continua V_0 entre el conductor interno (de radio a) y el revestimiento externo (de radio interior b) ocasiona el flujo de una corriente I por una resistencia de carga. Compruebe que la integración del vector de Poynting sobre la sección transversal del medio dieléctrico es igual a la potencia V_0I que se transmite a la carga.

P.7-14 Una onda plana uniforme en el aire con $\mathbf{E}_i(x, t) = \mathbf{a}_y 50 \operatorname{sen}(10^8 t - \beta x)$ (V/m) incide normalmente sobre un medio sin pérdidas ($\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 8$, $\sigma = 0$) en la región $x \geq 0$. Determine

a) $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{H}_r$,

b) Γ, τ y S, y

c) $\mathbf{E}_t$ y $\mathbf{H}_t$.

P.7-15 Una onda plana uniforme se propaga en la dirección $+z$ (hacia abajo) hacia el océano ($\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4$ S/m). El campo magnético en la superficie del océano ($z = 0$) es $\mathbf{H}(0, t) = \mathbf{a}_y\, 0.3 \cos 10^8 t$ (A/m).

a) Determine la profundidad de penetración y la impedancia intrínseca del agua del océano.

b) Determine las expresiones de $\mathbf{E}(z, t)$ y $\mathbf{H}(z, t)$ en el océano.

c) Calcule la pérdida de potencia media por unidad de área en el océano, como función de z.

P.7-16 Obtenga las razones siguientes para ondas planas uniformes en un medio 1 que inciden normalmente sobre una superficie de separación plana con un medio 2:

a) H_{r0}/H_{i0} y compare el resultado con el coeficiente de reflexión de la ecuación (7-94), y

b) H_{t0}/H_{i0} y compare el resultado con el coeficiente de transmisión de la ecuación (7-95).

P.7-17 Una onda plana con polarización circular de mano derecha, representada por el fasor $\mathbf{E}(z) = E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}$

incide normalmente sobre una pared conductora perfecta en $z = 0$

a) Determine la polarización de la onda reflejada.

b) Calcule la corriente inducida sobre la pared conductora.

c) Obtenga la expresión de la intensidad eléctrica total instantánea utilizando una referencia de tiempo coseno.

P.7-18 Determine la condición en la cual la magnitud del coeficiente de reflexión es igual al coeficiente de transmisión de una onda plana uniforme que incide normalmente sobre una superficie de separación entre dos medios dieléctricos sin pérdidas. ¿Cual es la razón de onda estacionaria en dB para esta condición?

P.7-19 Una onda plana uniforme en el aire con $\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x 10e^{-j6z}$ (V/m) incide normalmente sobre una superficie de separación en $z = 0$ con un medio con pérdidas que tiene constante dieléctrica de 2.25 y tangente de pérdidas de 0.3. Encuentre lo siguiente.

a) Las expresiones fasoriales de $\mathbf{E}_r(z)$, $\mathbf{H}_r(z)$, $\mathbf{E}_t(z)$ y $\mathbf{H}_t(z)$

b) La razón de onda estacionaria para la onda en el aire

c) Las expresiones de los vectores de Poynting de media temporal en el aire y en el medio con pérdidas.

P.7-20 Una onda plana senoidal uniforme en el aire tiene la siguiente expresión fasorial para la intensidad eléctrica:

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y 10e^{-j(6x + 8z)} \text{ (V/m)}.$$

La onda incide sobre un plano conductor perfecto en $z = 0$.

a) Calcule la frecuencia y la longitud de onda.

b) Escriba las expresiones de $\mathbf{E}_i(x, z; t)$ y $\mathbf{H}_i(x, z; t)$ instantáneos

c) Determine el ángulo de incidencia.

d) Determine $\mathbf{E}_r(x, z)$ y $\mathbf{H}_r(x, z)$ de la onda reflejada.

e) Determine $\mathbf{E}_1(x, z)$ y $\mathbf{H}_1(x, z)$ del campo total en el aire.

P.7-21 Una onda plana uniforme con polarización perpendicular incide oblicuamente sobre una frontera plana con $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.25\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, como se ilustra en la figura 7-14. Suponga $E_{i0} = 20$ (V/m), $f = 100$ (MHz) y $\theta_i = 30°$.

a) Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión.

b) Escriba la expresión de $\mathbf{E}_t(x, z; t)$ y $\mathbf{H}_t(x, z; t)$ instantáneos.

P.7-22 Una onda plana uniforme con polarización paralela incide oblicuamente sobre una frontera plana con $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.25\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, como se ilustra en la figura 7-15. Suponga $H_{i0} = 0.053$ (A/m), $f = 100$ (MHz) y $\theta_i = 30°$.

a) Calcule los coeficientes de reflexión y transmisión.

b) Escriba la expresión de $\mathbf{E}_t(x, z; t)$ y $\mathbf{H}_t(x, z; t)$ instantáneos.

P.7-23

a) Proponga un método para medir la densidad máxima de electrones en la ionosfera.

b) Suponiendo $N_{máx} = 8 \times 10^{11}$ por metro cúbico, analice la frecuencia mínima que puede usarse en la comunicación con una estación espacial más allá de la ionosfera.

c) ¿Qué sucede para una incidencia oblicua sobre la ionosfera si se emplea una frecuencia más baja?

P.7-24 Una onda plana uniforme incide en la ionosfera con un ángulo de incidencia $\theta_i = 60°$. Suponga una densidad constante de electrones y una frecuencia de la onda igual a la mitad de la frecuencia del plasma de la ionosfera. Determine

a) $\Gamma_\perp$ y $\tau_\perp$, y

b) $\Gamma_\parallel$ y $\tau_\parallel$.

Interprete el significado de estas cantidades complejas

P.7-25 Una onda electromagnética de 10 (kHz) en el aire, con polarización paralela, incide oblicuamente sobre la superficie del océano con un ángulo casi rasante $\theta_i = 88°$. Usando $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4$ (S/m) para el agua de mar, encuentre (a) el ángulo de refracción θ_t, (b) el coeficiente de transmisión $\tau_\parallel$, y (c) la distancia bajo la superficie del océano donde la intensidad de campo ha disminuido en 30 (dB).

P.7-26 Un rayo de luz incide oblicuamente desde el aire sobre una lámina transparente de grosor d cuyo índice de refracción es n, como se muestra en la figura 7-16. El ángulo de incidencia es θ_i. Encuentre (a) θ_t, (b) la distancia ℓ_1 al punto de salida y (c) la cantidad de desplazamiento lateral ℓ_2 del rayo emergente.

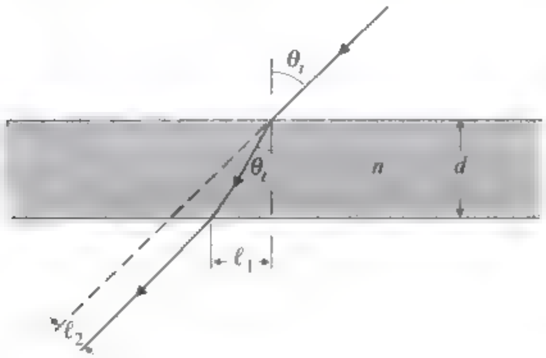


FIGURA 7-16 Rayo de luz que incide oblicuamente sobre una lámina transparente con índice de refracción n (Prob. P.7-26).

P.7-27 Una onda plana uniforme con polarización perpendicular, representada por las ecuaciones (7-135) y (7-136), incide sobre una superficie de discontinuidad plana en $z = 0$, como se ilustra en la figura 7-14. Suponga $\epsilon_2 < \epsilon_1$ y $\theta_i > \theta_c$. (a) Obtenga las expresiones fasoriales del campo transmitido ($\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$) y (b) compruebe que la potencia media transmitida en el medio 2 es cero.

P.7-28 Una onda plana uniforme con frecuencia angular ω en el medio 1 e índice de refracción n_1 incide con el ángulo crítico sobre una superficie de discontinuidad plana en $z = 0$ del medio 2 con índice de refracción n_2 ($< n_1$). Sean E_{i0} y E_{t0} las amplitudes de las intensidades de los campos eléctrico y magnético incidentes y refractados, respectivamente.

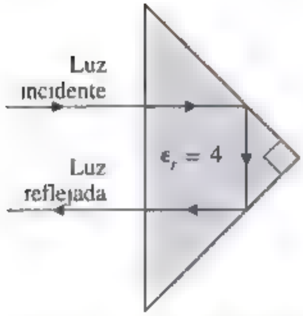


FIGURA 7-17 Reflexión luminosa por un prisma triangular isósceles en ángulo recto (Prob. P.7-30)

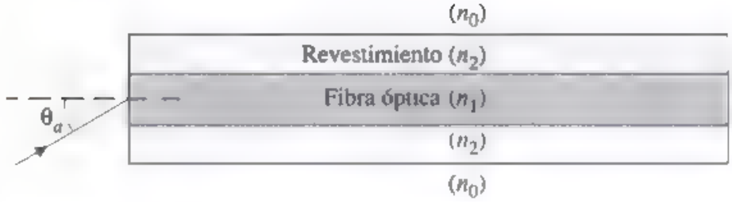


FIGURA 7-18 Fibra óptica con núcleo revestido (Prob. P.7-31)

a) Determine la razón E_{r0}/E_{i0} para polarización perpendicular.
b) Determine la razón E_{r0}/E_{i0} para polarización paralela.
c) Escriba las expresiones de $\mathbf{E}_i(x, z, t)$ y $\mathbf{E}_r(x, z, t)$ instantáneos para polarización perpendicular, en términos de los parámetros ω, n_1, n_2, θ_i y E_{i0}

P.7-29 Una onda electromagnética que surge con polarización perpendicular de una fuente subacuática incide sobre una superficie de separación agua-aire con un ángulo $\theta_i = 20°$. Usando $\epsilon_r = 81$ y $\mu_r = 1$ para el agua dulce, calcule (a) el ángulo crítico θ_c, (b) el coeficiente de reflexión $\Gamma_\perp$, (c) el coeficiente de transmisión $\tau_\perp$ y (d) la atenuación en dB para cada longitud de onda en el aire.

P.7-30 Los prismas triangulares isósceles de vidrio, como el que se muestra en la figura 7-17, se usan comúnmente en los instrumentos ópticos. Suponiendo $\epsilon_r = 4$ para el vidrio, calcule el porcentaje de potencia luminosa incidente que refleja el prisma.

P.7-31 Es costumbre revestir las fibras ópticas con un material de bajo índice de refracción para evitar la interferencia procedente de ondas en las fibras vecinas y como protección mecánica, como puede verse en la figura 7-18, donde $n_2 < n_1$

a) Exprese el ángulo de incidencia máximo θ_a en términos de n_0, n_1 y n_2 para que los rayos meridionales que inciden sobre la cara abierta del núcleo queden atrapados por reflexión interna total dentro del núcleo. (Los ***rayos meridionales*** son aquellos que pasan por el eje de la fibra. El ángulo θ_a se denomina ***ángulo de aceptación*** y sen θ_a es la ***abertura numérica*** (A. N.) de la fibra.)
b) Encuentre θ_a y la apertura numérica si $n_1 = 2$, $n_2 = 1.74$ y $n_0 = 1$.

P.7-32 Demuestre que en la condición de no reflexión en una superficie de separación, la suma del ángulo de Brewster y el ángulo de refracción es $\pi/2$ para.

a) polarización perpendicular ($\mu_1 \neq \mu_2$), y
b) polarización paralela ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$).

P.7-33 Para una onda incidente con polarización paralela, determine la relación entre el ángulo crítico θ_c y el ángulo de Brewster $\theta_{B\parallel}$ para dos medios contiguos de la misma permeabilidad.

CAPÍTULO 8

8-1 DESCRIPCIÓN GENERAL

De acuerdo con nuestro modelo electromagnético, sabemos que las cargas y las corrientes variables con el tiempo son fuentes de campos y ondas electromagnéticas. Las ondas transportan potencia electromagnética y se propagan en el medio circundante a la velocidad de la luz. El efecto de las ondas en un receptor depende, entre otras cosas, de la densidad de potencia media de las ondas en el lugar donde se encuentra el receptor. La densidad de potencia (potencia por unidad de área) es muy baja a grandes distancias, debido al valor tan grande del área total de la esfera de gran tamaño con su centro en las fuentes. Por consiguiente, la transmisión de potencia desde una fuente electromagnética omnidireccional a un receptor es muy ineficiente. Incluso si la fuente radia con la ayuda de una antena altamente direccional, su potencia se expande sobre un área muy amplia a grandes distancias.

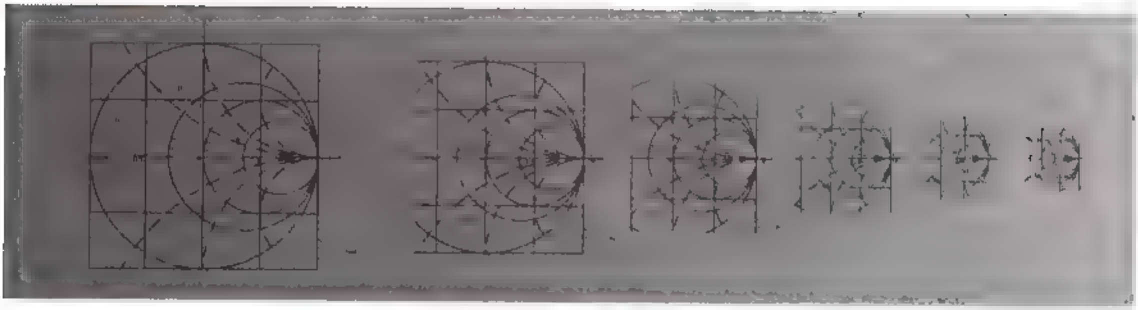
La transmisión de potencia por medio de radiación es muy ineficiente.

Para la transmisión eficiente de potencia e información *de punto a punto* hay que guiar la energía de la fuente. En este capítulo estudiaremos las ondas transversales electromagnéticas (TEM) guiadas por líneas de transmisión. Veremos que varias de las características de las ondas TEM guiadas por una línea de transmisión son las mismas que las de una onda plana uniforme que se propaga en un medio dieléctrico ilimitado, tema que analizamos en el capítulo 7.

Los tres tipos más comunes de líneas de transmisión de dos conductores

Los tres tipos más comunes de líneas de transmisión de dos conductores que propagan ondas TEM son:

a) *Línea de transmisión de placas paralelas.* Este tipo de línea de transmisión consiste en dos placas conductoras paralelas separadas por una lámina de dieléctrico de grosor uniforme (véase la Fig. 8-1(a)). Las líneas de transmisión de placas



Líneas de transmisión

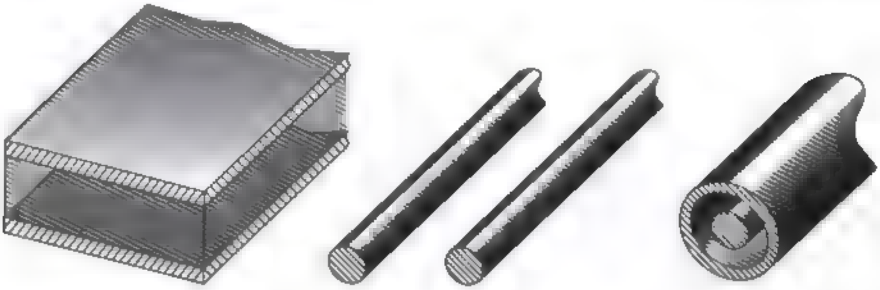
paralelas para frecuencias de microondas pueden fabricarse a bajo costo sobre un sustrato dieléctrico, usando tecnología de circuitos impresos; con frecuencia se les denomina ***microtiras***. En la figura 8-3 se presenta un diagrama que ilustra dos tipos de microtiras.

b) *Línea de transmisión de dos alambres* Esta línea de transmisión consiste en un par de alambres conductores paralelos separados por una distancia uniforme (véase la Fig. 8-1(b)). Como ejemplo están las omnipresentes líneas aéreas telefónicas y de transmisión de energía que se pueden ver en las áreas rurales, así como los cables planos que descienden desde la antena en los tejados hasta el televisor.

c) *Línea de transmisión coaxial* Consiste en un conductor interno y un revestimiento coaxial externo separado por un medio dieléctrico (véase la Fig. 8-1(c)). Esta estructura ofrece la importante ventaja de confinar completamente los campos eléctrico y magnético dentro de la región dieléctrica, de tal manera que es muy inmune a las interferencias externas a la línea Como ejemplos están los cables telefónicos y de TV y los cables de entrada de instrumentos de mediciones de precisión a altas frecuencias

Podemos obtener las ecuaciones generales de la línea de transmisión a partir de un modelo circuital, en términos de la resistencia, inductancia, conductancia y capacitancia por unidad de longitud de la línea. Después, a partir de las ecuaciones de la línea de transmisión, podemos derivar y estudiar todas las características de la propagación de ondas por una línea.

El estudio de las propiedades de las líneas de transmisión en estado estacionario con dependencia armónica con el tiempo es mucho más sencillo con diagramas gráficos, con



(a) Línea de transmisión de placas paralelas.

(b) Línea de transmisión de dos alambres.

(c) Línea de transmisión coaxial.

FIGURA 8-1 Tipos comunes de líneas de transmisión.

lo cual se evita la necesidad de efectuar repetidas veces cálculos con números complejos El diagrama más popular y utilizado es el ***diagrama de Smith***. También analizaremos la forma de usar el diagrama de Smith para determinar las características de las ondas en una línea de transmisión y para realizar la adaptación (o acoplo) de impedancias.

■ **EJERCICIO 8.2** Se usan antenas de media longitud de onda para transmitir

(a) señales de TV UHF a 800 (MHz),
(b) señales de TV VHF a 60 (MHz),
(c) señales de FM a 95 (MHz), y
(d) señales de radionavegación a 100 (kHz).

¿Cuáles son las longitudes respectivas de las antenas?

RESPUESTA: (a) 18.75 (cm), (d) 1500 (m)

PREGUNTAS DE REPASO

P.8-1 ¿Cuáles son los tres tipos más comunes de estructuras que pueden propagar ondas TEM?

P.8-2 Compare las ventajas y desventajas de los cables coaxiales y de las líneas de transmisión de dos alambres.

8-2 ECUACIONES GENERALES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Consideraremos una línea de transmisión uniforme que consiste en dos conductores perfectos en paralelo. La distancia de separación entre los conductores es pequeña en comparación con la longitud de onda de la señal que se propaga. Comenzaremos nuestro análisis escribiendo las ecuaciones de Maxwell para las componentes transversales de **E** y **H**. Veremos que la forma en que estas componentes de los campos dependen de las coordenadas transversales es la misma que en las situaciones estática y sin fuentes. Así podemos determinar los parámetros de una línea de transmisión con los mismos métodos empleados en condiciones estáticas. El voltaje entre los conductores y la

corriente en la línea están muy relacionados con las componentes transversales de **E** y **H**, respectivamente, a través de las ecuaciones (3-28) y (5-63). Por consiguiente, podemos analizar las características de funcionamiento de una línea de transmisión uniforme de dos conductores por la que se propaga una onda TEM en función de las ondas de voltaje y corriente

Las redes eléctricas ordinarias tienen dimensiones físicas mucho más pequeñas que la longitud de onda operativa y pueden representarse con parámetros discretos concentrados.

En esta sección usaremos un modelo circuital para obtener las ecuaciones que rigen las líneas de transmisión uniformes generales de dos conductores. Las líneas de transmisión difieren de las redes eléctricas ordinarias en un aspecto fundamental: las dimensiones físicas de las redes eléctricas son mucho más pequeñas que la longitud de la onda que se propaga, pero las líneas de transmisión normalmente son una fracción considerable de una longitud de onda e incluso su longitud puede ser de varias longitudes de onda. Los elementos de circuito en una red eléctrica ordinaria se consideran discretos, y como tales pueden describirse con parametros concentrados. Se supone que las corrientes que fluyen por elementos de circuito concentrados no varían espacialmente de un elemento a otro y que no existen ondas estacionarias. Por otra parte, una línea de transmisión es una red de parámetros distribuidos y por consiguiente debe describirse con parámetros de circuito distribuidos a lo largo de ella. En una línea de transmisión existen ondas estacionarias, excepto en condiciones de adaptación (las cuales describiremos más adelante en este mismo capítulo).

Las líneas de transmisión usualmente son largas en comparación con la longitud de onda y se representan con parámetros distribuidos.

Considere una longitud diferencial Δz de una línea de transmisión descrita por los cuatro parámetros siguientes:

R, la resistencia por unidad de longitud (ambos conductores), en Ω/m

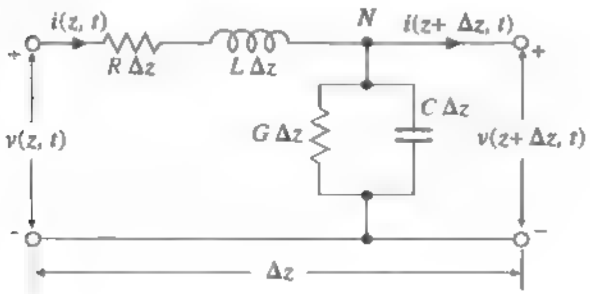
L, la inductancia por unidad de longitud (ambos conductores), en H/m.

G, la conductancia por unidad de longitud, en S/m.

C, la capacitancia por unidad de longitud, en F/m.

Observe que R y L son elementos serie y que G y C son elementos paralelos. En la figura 8-2 se muestra el circuito eléctrico equivalente de este segmento de línea. Las cantidades $v(z, t)$ y $v(z + \Delta z, t)$ denotan los voltajes instantáneos en z y $z + \Delta z$, respectivamente

FIGURA 8-2 Circuito equivalente de la longitud diferencial Δz de una línea de transmisión de dos conductores.



De forma similar, $i(z, t)$ e $i(z + \Delta z, t)$ denotan las corrientes instantáneas en z y $z + \Delta z$, respectivamente. Si aplicamos la ley del voltaje de Kirchhoff obtenemos

$$v(z, t) - R\,\Delta z\, i(z, t) - L\,\Delta z\,\frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0, \tag{8-1}$$

que nos lleva a

$$-\frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} = Ri(z, t) + L\frac{\partial i(z, t)}{\partial t}. \tag{8-2}$$

En el límite donde $\Delta z \to 0$, la ecuación (8-2) se convierte en

Ecuaciones (8-3) y (8-5): un par acoplado de ecuaciones en derivadas parciales de líneas de transmisión, con funciones instantáneas de voltaje y corriente

$$\boxed{-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = Ri(z, t) + L\frac{\partial i(z, t)}{\partial t}.} \tag{8-3}$$

De forma similar, al aplicar la ley de la corriente de Kirchhoff al nodo N de la figura 8-2 se obtiene

$$i(z, t) - G\,\Delta z\, v(z + \Delta z, t) - C\,\Delta z\,\frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0. \tag{8-4}$$

Tras dividir por Δz y dejar que Δz se aproxime a cero, la ecuación (8-4) se convierte en

$$\boxed{-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = Gv(z, t) + C\frac{\partial v(z, t)}{\partial t}.} \tag{8-5}$$

Las ecuaciones (8-3) y (8-5) son un par de ecuaciones en derivadas parciales de primer grado en $v(z, t)$ e $i(z, t)$. Son las ***ecuaciones generales de la línea de transmisión***.

Si hay dependencia armónica con el tiempo, el uso de fasores simplifica las ecuaciones de la línea de transmisión a ecuaciones diferenciales ordinarias. Para una referencia coseno escribimos

$$v(z, t) = \mathcal{R}e[V(z)e^{j\omega t}], \tag{8-6}$$

$$i(z, t) = \mathcal{R}e[I(z)e^{j\omega t}], \tag{8-7}$$

donde los fasores $V(z)$ e $I(z)$ son funciones únicamente de la coordenada espacial z y ambos pueden ser complejos. Si se sustituyen las ecuaciones (8-6) y (8-7) en las ecuaciones (8-3) y (8-5) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias para los fasores $V(z)$ e $I(z)$.

Un par acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de líneas de transmisión, con funciones fasoriales de voltaje y corriente

$$-\frac{dV(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z), \tag{8-8}$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G + j\omega C)V(z). \tag{8-9}$$

Las ecuaciones acopladas (8-8) y (8-9) son las ***ecuaciones de la línea de transmisión con dependencia armónica con el tiempo.*** Estas ecuaciones pueden combinarse para obtener $V(z)$ e $I(z)$. Obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias unidimensionales de segundo grado:

Ecuación diferencial ordinaria de segundo grado de línea de transmisión para el voltaje fasorial

$$\boxed{\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z)} \tag{8-10}$$

y

Ecuación diferencial ordinaria de segundo grado de línea de transmisión para la corriente fasorial

$$\boxed{\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z),} \tag{8-11}$$

donde

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \qquad (m^{-1})} \tag{8-12}$$

Constante de propagación, constante de atenuación y constante de fase de una línea de transmisión

es la ***constante de propagación***, cuyas partes real e imaginaria, α y β, son la ***constante de atenuación*** (Np/m) y la ***constante de fase*** (rad/m) de la línea, respectivamente. La nomenclatura que se usa aquí es similar a la empleada en la propagación de una onda plana en medios con pérdidas, como se definió en la sección 7-3. Estas cantidades en realidad no son constantes, ya que generalmente dependen de ω de una forma bastante complicada. Las ecuaciones (8-10) y (8-11) son ecuaciones básicas de las cuales derivaremos todas las propiedades de dependencia armónica con el tiempo tanto de las líneas de transmisión infinitamente largas como de las de longitud finita. Observando las semejanzas entre las ecuaciones (8-10) y (8-11) y la ecuación (7-45b) podemos llegar a la conclusión de que muchas de las relaciones y conclusiones acerca de **E** y **H** que obtuvimos en el capítulo 7, para la propagación de ondas planas (sin incluir las de incidencia oblicua), también son aplicables a ondas de voltaje y corriente, $V(z)$ e $I(z)$, en líneas de transmisión.

Hay una estrecha similitud entre E y H para la propagación de una onda plana y *V* e *I* en una línea de transmisión.

8-3 PARÁMETROS DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Las propiedades eléctricas de una línea de transmisión a una frecuencia determinada están caracterizadas por completo por sus cuatro parámetros distribuidos R, L, G y C. En esta sección se presentarán las fórmulas de estos parámetros para los tres tipos básicos de líneas de transmisión, en términos de las dimensiones físicas y los parámetros constitutivos del medio.

Nuestra premisa básica es que la conductividad de los conductores en una línea de transmisión por lo general es tan elevada que el efecto que tiene una resistencia serie en el cálculo de la constante de propagación es insignificante, de lo cual se desprende

que las ondas en la línea son aproximadamente ondas transversales electromagnéticas (TEM). Si eliminamos R de la ecuación (8-12) podemos escribir

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{1/2}. \tag{8-13}$$

Sabemos, a partir de la ecuación (7-43), que la constante de propagación de una onda TEM en un medio con parámetros constitutivos (μ, ϵ, σ) es

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2}. \tag{8-14}$$

Sin embargo,

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{8-15}$$

de acuerdo con la ecuación (4-38), por lo tanto, la comparación de las ecuaciones (8-13) y (8-14) conduce a

Relación entre L y C de una línea de transmisión y los parámetros del medio

$$\boxed{LC = \mu\epsilon.} \tag{8-16}$$

La ecuación (8-16) es una relación muy útil, ya que si conocemos L para una línea con un medio determinado, podemos obtener C, y viceversa. Si se conoce C, podemos hallar G a partir de la ecuación (8-15). La resistencia serie R se determina a partir de la pérdida de potencia en los conductores.

A. *Línea de transmisión de placas paralelas*

Dos placas conductoras, cada una de anchura w y separadas por un medio dieléctrico (ϵ, μ) de espesor d.

A partir de la ecuación (3-87) tenemos, ignorando los efectos marginales,

$$\boxed{C = \epsilon\frac{w}{d} \qquad \text{(F/m).}} \qquad \text{(línea de placas paralelas)} \tag{8-17}$$

Usando la ecuación (8-17) en las ecuaciones (8-16) y (8-15) obtenemos

$$\boxed{L = \mu\frac{d}{w} \qquad \text{(H/m)}} \qquad \text{(línea de placas paralelas)} \tag{8-18}$$

y

$$\boxed{G = \sigma\frac{w}{d} \qquad \text{(S/m).}} \qquad \text{(línea de placas paralelas)} \tag{8-19}$$

La determinación de una resistencia serie por unidad de longitud, R, implica que las placas metálicas no son conductores perfectos. La componente tangencial del campo eléctrico no es nula y las ondas que se propagan por líneas de transmisión con pérdidas no son estrictamente TEM. La profundidad de penetración es muy pequeña en buenos conductores a frecuencias lo suficientemente altas. Podemos obtener una expresión aproximada de R si consideramos que la corriente total en los conductores se distribuye de manera uniforme a la profundidad de penetración δ. Sean σ_c y μ_c, respectivamente, la conductividad y la permeabilidad de los conductores. La resistencia por unidad de longitud de un material de anchura w y profundidad δ es, a partir de la ecuación (4-16),

$$R = \frac{1}{\sigma_c S}, \tag{8-20}$$

donde $S = w\delta$. Para las dos placas conductoras tenemos

$$R = \frac{2}{\sigma_c w\delta}, \tag{8-21}$$

que, con base en la ecuación (7-56), se transforma en

$$\boxed{R = \frac{2}{w}\sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \quad (\Omega/\text{m}).} \qquad \text{(líneas de placas paralelas)} \tag{8-22}$$

B. *Línea de transmisión de dos alambres*

Dos alambres conductores, cada uno de radio a y separados una distancia D por un medio dieléctrico (ϵ, μ).

A partir de la ecuación (3-165) tenemos

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (\text{F/m}).} \qquad \text{(línea de dos alambres)} \qquad (8\text{-}23)^\dagger$$

Usando la ecuación (8-23) en las ecuaciones (8-16) y (8-15) obtenemos

$$\boxed{L = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right) \quad (\text{H/m})} \qquad \text{(línea de dos alambres)} \qquad (8\text{-}24)^\dagger$$

y

$$\boxed{G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (\text{S/m}).} \qquad \text{(línea de dos alambres)} \qquad (8\text{-}25)^\dagger$$

† $\cosh^{-1}(D/2a) \cong \ln(D/a)$ si $(D/2a)^2 \gg 1$

Para hallar R usamos la ecuación (8-20). El área de la sección transversal del flujo de corriente en cada alambre con una profundidad de penetración δ es aproximadamente $2\pi a\delta$. Para los dos alambres tenemos

$$R = \frac{1}{\sigma_c(\pi a\delta)}, \tag{8-26}$$

o

$$\boxed{R = \frac{1}{\pi a}\sqrt{\frac{\pi f\mu_c}{\sigma_c}} \qquad (\Omega/\mathrm{m}).} \qquad \text{(línea de dos alambres)} \tag{8-27}$$

C. Línea de transmisión coaxial

Conductor interno de radio a separado por un medio dieléctrico (ϵ, μ) de un tubo exterior concéntrico de radio interior b.

A partir de la ecuación (3-90) tenemos

$$\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \qquad (\mathrm{F/m}),} \qquad \text{(línea coaxial)} \tag{8-28}$$

que, con base en las ecuaciones (8-16) y (8-15), da

$$\boxed{L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad (\mathrm{H/m})} \qquad \text{(línea coaxial)} \tag{8-29}$$

y

$$\boxed{G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \qquad (\mathrm{S/m}).} \qquad \text{(línea coaxial)} \tag{8-30}$$

A frecuencias altas suponemos que la corriente fluye de manera uniforme en los conductores interno y externo con una profundidad de penetración δ. El área de la sección transversal del flujo de corriente en el conductor interno es $S_i = 2\pi a\delta$ y en el conductor externo es $S_o = 2\pi b\delta$. Así, la ecuación (8-20) da

$$R = \frac{1}{\sigma_c S_i} + \frac{1}{\sigma_c S_o} = \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \tag{8-31}$$

o

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f\mu_c}{\sigma_c}} \qquad (\Omega/\mathrm{m}).} \qquad \text{(línea coaxial)} \tag{8-32}$$

Los parámetros R, L, G y C de los tres tipos de líneas de transmisión se listan en la tabla 8-1, donde R_s es la parte real de la impedancia intrínseca del conductor $\eta_c = R_s + jX_s = (1 + j)\sqrt{\pi f \mu_c / \sigma_c}$, dada por la ecuación (7-53). En el parámetro L no se incluye la autoinductancia interna de los conductores, analizada en los ejemplos 5-10 y 5-11. Los cálculos en estos ejemplos se basaron en una corriente continua distribuida de manera uniforme por toda la sección transversal de los conductores. La corriente se desplaza a la superficie a frecuencias altas, debido al efecto de penetración, y la inductancia interna se reduce a un valor insignificante.

■ **EJERCICIO 8.2** Obtenga la fórmula a frecuencias bajas de la resistencia por unidad de longitud de

a) una línea de dos alambres, cada uno de los cuales tiene radio a,

b) un cable coaxial con conductor interno de radio a y conductor externo de radio interior b y radio exterior d.

SUGERENCIA: Use la fórmula de la resistencia para las corrientes continuas

RESPUESTA: (a) $\dfrac{2}{\sigma_c \pi a^2}$, (b) $\dfrac{1}{\sigma_c \pi}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{d^2 - b^2}\right)$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.8-3 ¿Cuál es la diferencia esencial entre una línea de transmisión y una red eléctrica ordinaria?

P.8-4 Explique por qué las ondas en una línea de transmisión con pérdidas no pueden ser ondas transversales electromagnéticas puras.

P.8-5 ¿Las ecuaciones de la línea de transmisión (8-8) a (8-11) son aplicables a voltajes y corrientes de tipo pulso? Explique.

Parámetros distribuidos de líneas de transmisión

TABLA 8-1 PARAMETROS DISTRIBUIDOS DE LINEAS DE TRANSMISION DE PLACAS PARALELAS, DE DOS ALAMBRES Y COAXIALES

Parámetro	Línea de placas paralelas	Línea de dos alambres	Línea coaxial	Unidad
R	$\dfrac{2}{w}R_s$	$\dfrac{R_s}{\pi a}$	$\dfrac{R_s}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$	Ω/m
L	$\mu\dfrac{d}{w}$	$\dfrac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\dfrac{D}{2a}\right)$	$\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$	H/m
G	$\sigma\dfrac{w}{d}$	$\dfrac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(D/2a)}$	$\dfrac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	S/m
C	$\epsilon\dfrac{w}{d}$	$\dfrac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(D/2a)}$	$\dfrac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$	F/m

Nota $R_s = \sqrt{\pi f \mu_c / \sigma_c}$, $\cosh^{-1}(D/2a) \cong \ln(D/a)$ si $(D/2a)^2 \gg 1$. No se incluye la inductancia interna

COMENTARIOS

1. Hay una analogia estrecha entre las características de **E** y **H** en la propagación de ondas planas y las de $V(z)$ e $I(z)$ en las líneas de transmisión.
2. "Constante" de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$. La "constante" de atenuación α y la "constante" de fase β en una línea pueden depender de la frecuencia de manera complicada.
3. Es importante distinguir μ_c y σ_c para conductores de μ y σ para un medio dieléctrico.
4. La resistencia serie, R, de una línea de transmisión *no es* el inverso de la conductancia paralela, G.

8-3.1 LÍNEAS MICROTIRA

Las microtiras son formas modificadas de las líneas de transmisión de placas paralelas.

El desarrollo de los dispositivos y sistemas de microondas de estado sólido ha dado lugar a generalizar el uso de un tipo de líneas de transmisión de placas paralelas llamadas líneas microtira o simplemente ***microtiras***. Una microtira consiste en un sustrato dieléctrico sobre un plano conductor puesto a tierra con una fina tira de metal sobre el sustrato, como se ilustra en la figura 8-3(a). Desde que surgieron las técnicas de circuitos impresos ha sido fácil fabricar microtiras e integrarlas con otros componentes de circuito. Sin embargo, como los resultados que obtuvimos para las líneas de transmisión de placas paralelas se basaban en la suposición de dos placas conductoras anchas (con efectos marginales insignificantes) y de la misma anchura, no podemos esperar que se apliquen de manera exacta a este caso. La aproximación es mayor si el ancho de la tira metálica es mucho más grande que el espesor del sustrato.

Una aproximación TEM es bastante satisfactoria si el sustrato tiene una constante dieléctrica elevada. Es difícil obtener una solución analítica exacta de la microtira de la figura 8-3(a) que satisfaga todas las condiciones en la frontera. Para empezar, no todos los campos estarán confinados al sustrato dieléctrico; algunas líneas de campo escaparán desde la tira conductora superior hacia fuera del dieléctrico, causando por tanto interferencias con los circuitos vecinos. Para que los cálculos sean más precisos se requieren modificaciones semiempíricas en las fórmulas de los parámetros distribuidos y en la impedancia característica.[†] Todas estas cantidades tienden a depender de la frecuencia y las microtiras son dispersoras.

Un método para reducir los campos de dispersión (*stray fields*) de las microtiras es colocar un plano conductor puesto a tierra a ambos lados del sustrato dieléctrico,

[†] Véase, por ejemplo, K. F. Sander y G. A. L. Reed, *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves*, 2da. ed., Sec. 6.5.6, Cambridge University Press, Nueva York, 1986. Véase también D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, Secs. 4.7 y 4.8, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1990.

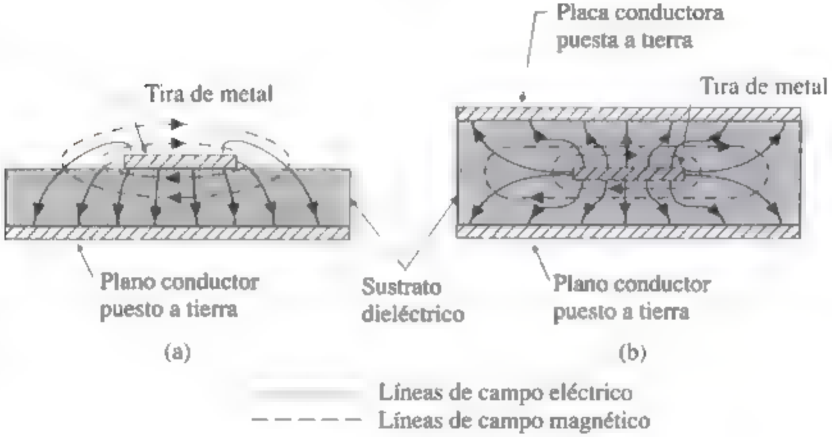


FIGURA 8-3 Dos tipos de líneas microtira.

Las líneas de tres placas minimizan los campos de dispersión.

dejando la delgada tira metálica en el medio, como se muestra en la figura 8-3(b). Esta disposición se conoce como ***línea de tres placas*** o ***triplaca***. Podemos apreciar que las líneas de tres placas son más difíciles y costosas de fabricar y que su impedancia característica es la mitad de la de la microtira correspondiente.

8-4 CARACTERÍSTICAS DE LA ONDA EN UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN INFINITA

En la sección 8-2 obtuvimos las ecuaciones (8-10) y (8-11) que rigen $V(z)$ e $I(z)$ con dependencia armónica con el tiempo en una línea de transmisión. Veamos ahora sus características en una línea infinita. Las soluciones de las ecuaciones (8-10) y (8-11) son

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+(z) + V^-(z) \\ &= V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}, \end{aligned} \tag{8-33}$$

$$\begin{aligned} I(z) &= I^+(z) + I^-(z) \\ &= I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}, \end{aligned} \tag{8-34}$$

donde los supraíndices "+" y "−" denotan ondas que se propagan en la dirección $+z$ y $-z$, respectivamente. Las amplitudes de onda (V_0^+, I_0^+) y (V_0^-, I_0^-) están relacionadas por las ecuaciones (8-8) y (8-9) y podemos comprobar (Ejer. 8.3) que

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{R + j\omega L}{\gamma}. \tag{8-35}$$

Los términos que contienen el factor $e^{\gamma z}$ deben desaparecer en una línea infinita (en realidad, una línea seminfinita con una fuente en el lado izquierdo). Si no fuera así, los términos aumentarían indefinidamente con z, lo que es físicamente imposible. No hay ondas reflejadas y las únicas ondas existentes se propagan en la dirección $+z$. Así,

$$V(z) = V^+(z) = V_0^+ e^{-\gamma z}, \tag{8-36}$$

$$I(z) = I^+(z) = I_0^+ e^{-\gamma z}. \tag{8-37}$$

La razón del voltaje a la corriente para cualquier z en una línea infinitamente larga, $V^+(z)/I^+(z) = V_0^+/I_0^+$, es independiente de z y se denomina ***impedancia característica*** de la línea.

Impedancia característica de una línea de transmisión

$$\boxed{Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + j\omega C} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (\Omega)} \tag{8-38}$$

Observe que γ y Z_0 son propiedades características de una línea de transmisión, sea ésta infinitamente larga o no. Dependen de R, L, G, C y ω, no de la longitud de la línea. Una línea de longitud infinita sólo implica que no hay ondas reflejadas.

■ **EJERCICIO 8.3** Compruebe la relación de la ecuación (8-35) sustituyendo las ecuaciones (8-33) y (8-34) en la ecuación (8-8).

Hay dos casos especiales para γ en la ecuación (8-12) y Z_0 en la ecuación (8-38) que son de particular interés:

1. *Línea sin pérdidas* ($R = 0$, $G = 0$):

En una línea sin pérdidas, α y X_0 son cero y u_p y R_0 son constantes.

a) Constante de propagación:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC}; \tag{8-39}$$

$$\alpha = 0, \tag{8-40}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \qquad \text{(función lineal de } \omega\text{).} \tag{8-41}$$

b) Velocidad de fase:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(constante).} \tag{8-42}$$

Podemos ver, con base en la ecuación (8-16), que la velocidad de fase de las ondas en una línea de transmisión sin pérdidas es igual a la velocidad de propagación, $1/\sqrt{\mu\epsilon}$, de las ondas planas no guiadas en el medio de la línea.

c) Impedancia característica:

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}; \tag{8-43}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{(constante),} \tag{8-44}$$

$$X_0 = 0. \tag{8-45}$$

2. *Línea sin distorsión* ($R/L = G/C$). Si se satisface la condición

Condición para una línea de transmisión sin distorsión

$$\boxed{\frac{R}{L} = \frac{G}{C}} \tag{8-46}$$

se simplifican las expresiones de γ y Z_0.

a) Constante de propagación:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)\left(\frac{RC}{L} + j\omega C\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{C}{L}}(R + j\omega L); \tag{8-47}$$

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \tag{8-48}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \qquad \text{(función lineal de } \omega\text{).} \tag{8-49}$$

b) Velocidad de fase:

Una línea sin distorsión pero con pérdidas tiene las mismas características que una línea sin pérdidas, excepto por una constante de atenuación distinta de cero.

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(constante).} \tag{8-50}$$

c) Impedancia característica:

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{(RC/L) + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \tag{8-51}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{(constante),} \tag{8-52}$$

$$X_0 = 0, \tag{8-53}$$

Como puede verse, las características de una línea sin distorsión son las mismas que para una línea sin pérdidas, con excepción de una constante de atenuación no nula; específicamente, una velocidad de fase constante ($u_p = 1/\sqrt{LC}$) y una impedancia característica real constante ($Z_0 = R_0 = \sqrt{L/C}$).

La velocidad de fase constante es consecuencia directa de la dependencia lineal de la constante de fase β con ω. Normalmente una señal consiste en una banda de frecuencias, por lo que es esencial que las distintas componentes en frecuencia se propaguen juntas por la línea de transmisión con la misma velocidad, para evitar distorsión. Esta condición la satisface una línea sin pérdidas y se cumple de forma aproximada en una línea que tenga muy pocas pérdidas. En el caso de una línea con pérdidas, las amplitudes de onda se atenúan y se produce distorsión cuando las diferentes componentes en frecuencia se atenúan de manera distinta, incluso si se propagan con la misma velocidad. La condición especificada en la ecuación (8-46) nos lleva a que α sea constante y a que u_p sea constante, de ahí el nombre de ***línea sin distorsión***.

La constante de fase de una línea de transmisión con pérdidas se determina desarrollando la expresión de γ de la ecuación (8-12) Normalmente, la constante de fase no es una función lineal de ω; por lo tanto, producirá una velocidad de fase u_p dependiente de la frecuencia. La señal sufre distorsión o ***dispersión*** cuando las diferentes componentes en frecuencia de una señal se propagan por la línea con velocidades distintas Una línea de transmisión general con pérdidas es *dispersiva*, lo mismo que un dieléctrico con pérdidas.

La distorsión (dispersión) de una señal ocurre cuando la constante de fase no es proporcional a la frecuencia.

EJEMPLO 8-1

Ignore los efectos marginales y de las pérdidas y suponga que el sustrato de una microtira tiene un espesor de 0.4 (mm) y constante dieléctrica de 2 25. (a) Determine el ancho w requerido para la tira metálica de manera que la microtira tenga una resistencia característica de 50 (Ω); (b) determine L y C de la línea; y (c) determine u_p en la línea. (d) Repita los apartados (a), (b) y (c) para una resistencia característica de 75 (Ω).

SOLUCIÓN

a) Para hallar w usamos las ecuaciones (8-17) y (8-18) en la ecuación (8-43)

$$w = \frac{d}{Z_0}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{0.4 \times 10^{-3}}{50}\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$= \frac{0.4 \times 10^{-3} \times 377}{50\sqrt{2.25}} = 2 \times 10^{-3} \text{ (m)}, \quad \text{o} \quad 2 \text{ (mm)}.$$

b) $$L = \mu\frac{d}{w} = 4\pi 10^{-7} \times \frac{0.4}{2} = 2.51 \times 10^{-7} \quad \text{(H/m)}, \quad \text{o} \quad 0.251 \quad (\mu\text{H/m}).$$

$$C = \epsilon_0\epsilon_r\frac{w}{d} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 2.25 \times \frac{2}{0.4} = 99.5 \times 10^{-12} \quad \text{(F/m)}, \quad \text{o}$$
99.5 (pF/m).

c) $$u_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{2.25}} = \frac{c}{1.5} = 2 \times 10^8 \quad \text{(m/s)}.$$

d) Como w es inversamente proporcional a Z_0, para $Z_0' = 75(\Omega)$,

$$w' = \left(\frac{Z_0}{Z_0'}\right)w = \frac{50}{75} \times 2 = 1.33 \quad \text{(mm)}.$$

$$L' = \left(\frac{w}{w'}\right)L = \left(\frac{2}{1.33}\right) \times 0.251 = 0.377 \quad (\mu\text{H/m}).$$

$$C' = \left(\frac{w'}{w}\right)C = \left(\frac{1.33}{2}\right) \times 99.5 = 66.2 \quad \text{(pF/m)}.$$

$$u_p' = u_p = 2 \times 10^8 \quad \text{(m/s)}.$$

8-4.1 CONSTANTE DE ATENUACIÓN A PARTIR DE LAS RELACIONES DE POTENCIA

La constante de atenuación de una onda que se propaga en una línea de transmisión es la parte real de la constante de propagación, puede determinarse a partir de la definición básica de la ecuación (8-12). También es posible hallar la constante de atenuación a partir de una relación de potencia. Usando las ecuaciones (8-36) y (8-37) escribimos (omitimos el supraíndice "+" por cuestiones de sencillez).

$$V(z) = V_0 e^{-(\alpha+j\beta)z}, \tag{8-54}$$

$$I(z) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-(\alpha+j\beta)z}. \tag{8-55}$$

La potencia media que se propaga por la línea en una z cualquiera es

$$\begin{aligned} P(z) &= \tfrac{1}{2}\mathcal{R}e[V(z)I^*(z)] \\ &= \frac{V_0^2}{2|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z}. \end{aligned} \tag{8-56}$$

La ley de la conservación de la energía requiere que la razón de disminución de $P(z)$ con la distancia a lo largo de la línea sea igual a la pérdida de potencia media temporal P_L por unidad de longitud. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P(z)}{\partial z} &= P_L(z) \\ &= 2\alpha P(z), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la siguiente fórmula:

Determinación de la constante de atenuación a partir de la relación de potencia

$$\boxed{\alpha = \frac{P_L(z)}{2P(z)} \qquad \text{(Np/m)}.} \tag{8-57}$$

EJEMPLO 8-2

a) Use la ecuación (8-57) para encontrar la constante de atenuación de una línea de transmisión con pérdidas cuyos parámetros distribuidos son R, L, G y C

b) Particularice el resultado del apartado (a) para obtener las constantes de atenuación de una línea con pequeñas pérdidas y de una línea sin distorsion

SOLUCIÓN

a) La pérdida de potencia media temporal por unidad de longitud en una línea de transmisión con pérdidas es

$$\begin{aligned} P_L(z) &= \tfrac{1}{2}[|I(z)|^2 R + |V(z)|^2 G] \\ &= \frac{V_0^2}{2|Z_0|^2}(R + G|Z_0|^2)e^{-2\alpha z} \end{aligned} \tag{8-58}$$

Al sustituir las ecuaciones (8-56) y (8-58) en la ecuación (8-57) se obtiene

Constante de atenuación de una línea de transmisión con pérdidas

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2R_0}(R + G|Z_0|^2) \qquad \text{(Np/m)}.} \tag{8-59}$$

b) Para una línea con pequeñas pérdidas, $Z_0 \cong R_0 = \sqrt{L/C}$, la ecuación (8-59) se convierte en

$$\begin{aligned} \alpha &\cong \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_0} + GR_0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right). \end{aligned} \tag{8-60}$$

En el caso de una línea sin distorsión, la ecuación (8-52) da $Z_0 = R_0 = \sqrt{L/C}$. Por consiguiente, se aplica la ecuación (8-60) y da

$$\alpha = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}\left(1 + \frac{G}{R}\frac{L}{C}\right),$$

que, teniendo en cuenta la condición de la ecuación (8-46), se reduce a

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{8-61}$$

■ **EJERCICIO 8.4** Se construye una línea de transmisión de placas paralelas altamente conductoras de anchura w, separadas por un dieléctrico sin pérdidas cuya constante dieléctrica es ϵ, y cuyo espesor es d. Ignore el efecto marginal y razone cómo debe modificarse lo siguiente si se desea duplicar su impedancia característica cambiando sólo un parámetro: (a) w, (b) d y (c) ϵ_r.

■ **EJERCICIO 8.5** La constante de atenuación a 10 (MHz) de una línea de transmisión coaxial sin distorsión es 0.1 (dB/km). Determine su valor

a) a 50 (Mhz), y

b) a 10 (MHz) si se duplica la constante dieléctrica del material aislante.

RESPUESTA: (a) 0.224 (dB/km), (b) 0.141 (dB/km).

PREGUNTAS DE REPASO

P.8-6 Defina la *constante de propagación* y la *impedancia característica* de una línea de transmisión. Escriba sus expresiones generales en función de R, L, G y C para una excitación senoidal.

P.8-7 ¿Qué son las *microtiras*?

P.8-8 ¿Qué es una *línea de tres placas o triplaca*? ¿Cómo se compara la impedancia característica de una línea de tres placas con la de la microtira correspondiente? Explique.

P.8-9 ¿Qué se quiere decir con "línea sin distorsión"? ¿Qué relación deben satisfacer los parámetros distribuidos de una línea para que ésta no tenga distorsión?

P.8-10 ¿Cuál es la relación entre la constante de atenuación y la pérdida de potencia en una línea de transmisión?

COMENTARIOS

1. La velocidad de propagación de una onda en una línea de transmisión sin pérdidas y en una línea sin distorsión es igual a la velocidad de propagación, $1/\sqrt{\mu\epsilon}$, de una onda plana no guiada en el medio dieléctrico de la línea.
2. Es muy difícil determinar con exactitud los parametros distribuidos y la impedancia característica de las líneas microtira. Normalmente se emplean fórmulas semiempíricas.
3. Una línea sin pérdidas no tiene distorsión, pero una línea sin distorsión puede tener pérdidas.
4. Las líneas con pérdidas generalmente son dispersivas, a menos que se satisfaga la ecuación (8-46).

8-5 CARACTERISTICAS DE LA ONDA EN LINEAS DE TRANSMISION FINITAS

En la sección 8-2 se indicó que las soluciones generales de las ecuaciones de Helmholtz unidimensionales con dependencia armónica con el tiempo (Ecs. (8-10) y (8-11)) para líneas de transmisión son

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \tag{8-62}$$

y

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}, \tag{8-63}$$

donde

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = Z_0, \tag{8-64}$$

como se indicó en la seccion 8-4. En el caso de ondas generadas en $z = 0$ en una línea infinitamente larga solo puede haber ondas directas que se propaguen en la direccion $+z$, de manera que desaparece el segundo término del lado derecho de las ecuaciones (8-62) y (8-63), que corresponden a ondas reflejadas

Consideremos ahora el caso general de una línea de transmisión finita con impedancia característica Z_0 y que termina en una impedancia de carga arbitraria Z_L, como se ilustra en la figura 8-4. La longitud de la línea es ℓ. En $z = 0$ se conecta a la línea una fuente de voltaje *senoidal* $V_g \underline{/0°}$ con impedancia interna Z_g. En este caso,

$$\left(\frac{V}{I}\right)_{z=\ell} = \frac{V_L}{I_L} = Z_L, \tag{8-65}$$

lo cual obviamente no puede satisfacerse sin el segundo término en el lado derecho de las ecuaciones (8-62) y (8-63), a menos que $Z_L = Z_0$. Dadas las γ y Z_0 características de la línea y su longitud ℓ, tenemos cuatro incógnitas. V_0^+, V_0^-, I_0^+ e I_0^- en las ecuaciones (8-62) y (8-63). Estas cuatro incógnitas no son todas independientes, ya que deben satisfacer las relaciones en $z = 0$ y $z = \ell$.

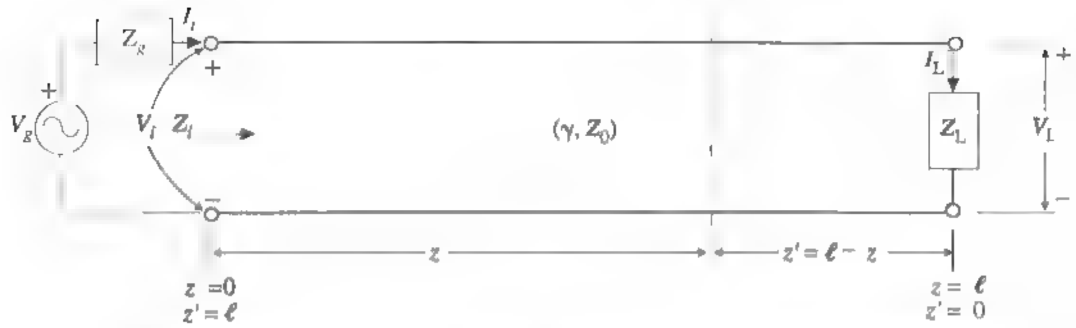


FIGURA 8-4 Línea de transmisión finita terminada en una impedancia de carga Z_L

Haciendo $z = \ell$ en las ecuaciones (8-62) y (8-63) y utilizando la ecuación (8-64), tenemos

$$V_L = V_0^+ e^{-\gamma\ell} + V_0^- e^{\gamma\ell}, \tag{8-66}$$

$$I_L = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma\ell} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma\ell}. \tag{8-67}$$

Al resolver las ecuaciones (8-66) y (8-67) para V_0^+ y V_0^- se tiene

$$V_0^+ = \tfrac{1}{2}(V_L + I_L Z_0)e^{\gamma\ell} = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)e^{\gamma\ell}, \tag{8-68}$$

$$V_0^- = \tfrac{1}{2}(V_L - I_L Z_0)e^{-\gamma\ell} = \frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0)^{-\gamma\ell}. \tag{8-69}$$

Utilizando las ecuaciones (8-68) y (8-69) en las ecuaciones (8-62) y (8-63) se obtiene

$$V(z) = \frac{I_L}{2}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma(\ell - z)} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma(\ell - z)}], \tag{8-70}$$

$$I(z) = \frac{I_L}{2Z_0}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma(\ell - z)} - (Z_L - Z_0)e^{-\gamma(\ell - z)}]. \tag{8-71}$$

Como ℓ y z aparecen juntas en la combinación $(\ell - z)$, es conveniente introducir una variable nueva $z' = \ell - z$, que es la distancia medida hacia atrás desde la carga. Las ecuaciones (8-70) y (8-71) se transforman entonces en

$$V(z') = \frac{I_L}{2}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma z}], \tag{8-72}$$

$$I(z') = \frac{I_L}{2Z_0}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'} - (Z_L - Z_0)e^{-\gamma z'}]. \tag{8-73}$$

Las ecuaciones anteriores se simplifican con el uso de funciones hiperbólicas. Recordando las relaciones

$$e^{\gamma z'} + e^{-\gamma z'} = 2\cosh\gamma z' \qquad \text{y} \qquad e^{\gamma z'} - e^{-\gamma z'} = 2\,\text{senh}\,\gamma z',$$

podemos reescribir las ecuaciones (8-72) y (8-73) como sigue:

$V(z')$ e $I(z')$ de una línea finita, en términos de γ, Z_0, Z_L, I_L y z'

$$\boxed{V(z') = I_L(Z_L \cosh \gamma z' + Z_0 \operatorname{senh} \gamma z'),} \tag{8-74}$$

$$\boxed{I(z') = \frac{I_L}{Z_0}(Z_L \operatorname{senh} \gamma z' + Z_0 \cosh \gamma z'),} \tag{8-75}$$

que pueden usarse para hallar el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea de transmisión en términos de I_L, Z_L, γ y Z_0.

La razón $V(z')/I(z')$ es la impedancia mirando hacia la carga *desde una distancia z' de la carga*

$$Z(z') = \frac{V(z')}{I(z')} = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma z' + Z_0 \operatorname{senh} \gamma z'}{Z_L \operatorname{senh} \gamma z' + Z_0 \cosh \gamma z'}. \tag{8-76}$$

o

La impedancia $Z(z')$ en términos de γ, Z_0, Z_L y z'

$$\boxed{Z(z') = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma z'}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma z'} \qquad (\Omega).} \tag{8-77}$$

En el extremo fuente de la línea, $z' = \ell$, el generador ve en la línea una ***impedancia de entrada*** Z_i.

Fórmula general de la impedancia de entrada Z_i de una línea de longitud ℓ

$$\boxed{Z_i = (Z)_{\substack{z=0 \\ z'=\ell}} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma\ell}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma\ell} \qquad (\Omega).} \tag{8-78}$$

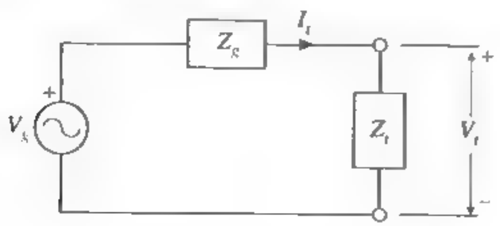
En lo referente a las condiciones en el generador, podemos sustituir la línea de transmisión finita terminada por Z_i, como se ilustra en la figura 8-5. El voltaje de entrada V_i y la corriente de entrada I_i de la figura 8-4 se determinan fácilmente a partir del circuito equivalente de la figura 8-5.

Una línea de transmisión está adaptada cuando $Z_L = Z_0$.

Teniendo en cuenta la ecuación (8-78), es evidente que cuando $Z_L = Z_0$, $Z_i = Z_0$ sin importar la longitud, ℓ, de la línea. En esta condición, se dice que la línea está *adaptada*. Posteriormente hablaremos más acerca de esta condición.

En la mayoría de los casos se puede considerar que los segmentos de línea de transmisión no tienen pérdidas: $\gamma = j\beta$, $Z_0 = R_0$ y $\tanh \gamma\ell = \tanh (j\beta\ell) = j \tan \beta\ell$.

FIGURA 8-5 Circuito equivalente de la línea de transmisión de la figura 8-4, en el extremo del generador.



La fórmula de la ecuación (8-78) para la impedancia de entrada Z_i de una línea sin pérdidas de longitud ℓ terminada en Z_L es entonces

Fórmula de la impedancia de entrada Z_i de una línea sin pérdidas de longitud ℓ

$$\boxed{Z_i = R_0 \frac{Z_L + jR_0 \tan \beta\ell}{R_0 + jZ_L \tan \beta\ell} \quad (\Omega). \qquad \text{(Línea sin pérdidas)}} \tag{8-79}$$

8-5.1 LÍNEAS EN CIRCUITO ABIERTO Y EN CORTOCIRCUITO

Las líneas de transmisión no sólo pueden usarse como estructuras para guiar ondas que transmiten potencia e información de un lugar a otro; también pueden servir como elementos de circuitos a frecuencias ultraaltas (UHF), de 300 (MHz) a 3 (GHz). A estas frecuencias es difícil fabricar elementos de circuito concentrados, como inductancias y capacitancias, y los campos de dispersión son un factor importante. Los elementos en circuito abierto y en cortocircuito (cortocircuitados) pueden actuar como inductancias o capacitancias. Las dimensiones físicas los circuitos de líneas de transmisión son demasiado pequeñas a frecuencias superiores a UHF y en este caso sería conveniente usar las componentes en guías de ondas que se analizarán en el capítulo siguiente.

A. *Línea en circuito abierto* ($Z_L \to \infty$).

A partir de la ecuación (8-79) tenemos

Impedancia de [redacted] línea sin pérdidas terminada en circuito abierto

$$Z_{io} = jX_{io} = -\frac{jR_0}{\tan \beta\ell} = -jR_0 \cot \beta\ell. \tag{8-80}$$

La ecuación (8-80) nos dice que la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas en circuito abierto es puramente reactiva. Sin embargo, la línea puede ser capacitiva o inductiva porque la función cot $\beta\ell$ puede ser positiva o negativa, dependiendo del valor de $\beta\ell$ ($= 2\pi\ell/\lambda$).

Si la longitud de una línea en circuito abierto es muy corta en comparación con una longitud de onda, $\beta\ell \ll 1$, podemos obtener una fórmula muy simple para su reactancia capacitiva si observamos que tan $\beta\ell \cong \beta\ell$. A partir de la ecuacion (8-80),

La impedancia de entrada de una línea muy corta terminada en circuito abierto es puramente capacitiva.

$$Z_i = jX_{io} \cong -j\frac{R_0}{\beta\ell} = -j\frac{\sqrt{L/C}}{\omega\sqrt{LC}\ell} = -j\frac{1}{\omega C\ell}, \tag{8-81}$$

que es la impedancia de una capacitancia de $C\ell$ farads.

Es poco común usar líneas terminadas en circuito abierto como elementos de circuito.

En la práctica no es posible obtener una impedancia de carga infinita en el extremo de una línea de transmisión, sobre todo a frecuencias altas, debido al acoplamiento con objetos cercanos y la radiación por el extremo abierto

B. *Línea en cortocircuito* ($Z_L = 0$).

En este caso la ecuación (8-79) se reduce a

Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas en cortocircuito

$$Z_{is} = jX_{is} = jR_0 \tan \beta\ell. \tag{8-82}$$

Una línea de cuarto de longitud de onda terminada en cortocircuito de hecho es un circuito abierto.

Como tan $\beta\ell$ puede variar entre $-\infty$ y $+\infty$, la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas en cortocircuito puede ser puramente inductiva o capacitiva, dependiendo del valor de $\beta\ell$. En particular, si $\beta\ell = \pi/2$ o $\ell = \lambda/4$, Z_{is} se hace infinita en la ecuación (8-82). Por lo tanto, una línea de transmisión de un cuarto de longitud de onda en cortocircuito es de hecho un circuito abierto.

La impedancia de entrada de una línea muy corta terminada en cortocircuito es puramente inductiva.

Si la longitud de la línea en cortocircuito es muy corta en comparación con una longitud de onda, $\beta\ell \ll 1$, la ecuación (8-82) es aproximadamente

$$Z_{is} = jX_{is} \simeq jR_0\beta\ell = j\sqrt{\frac{L}{C}}\,\omega\sqrt{LC}\,\ell = j\omega L\ell, \tag{8-83}$$

que es la impedancia de una inductancia de $L\ell$ henrys.

■ **EJERCICIO 8.6** Demuestre que una línea de transmisión de un cuarto de longitud de onda sin pérdidas transforma la impedancia de carga en otra impedancia en los terminales de entrada igual al inverso de la impedancia de carga multiplicado por el cuadrado de la resistencia característica, es decir, $Z_i = R_0^2/Z_L$.

■ **EJERCICIO 8.7** Demuestre que una línea de media longitud de onda transforma sin cambio alguno una impedancia de carga a sus terminales de entrada.

8-5.2 IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA Y CONSTANTE DE PROPAGACIÓN A PARTIR DE MEDICIONES EN LA ENTRADA

Podemos determinar la impedancia característica y la constante de propagación de una línea de transmisión midiendo la impedancia de entrada de una sección de línea en condiciones de circuito abierto y cortocircuito. Las expresiones siguientes se derivan directamente de la ecuación (8-78):

$$\textit{Línea en circuito abierto},\ Z_L \to \infty: \qquad Z_{io} = Z_0 \coth \gamma\ell. \tag{8-84a}$$

$$\textit{Línea en cortocircuito},\ Z_L = 0: \qquad Z_{is} = Z_0 \tanh \gamma\ell. \tag{8-84b}$$

Con base en las ecuaciones (8-84a) y (8-84b) tenemos

Cálculo de Z_0 y γ de una línea a partir de las impedancias de entrada medidas en condiciones de circuito abierto y cortocircuito

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{Z_{io}Z_{is}} \qquad (\Omega)} \tag{8-85}$$

y

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\ell}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{Z_{is}}{Z_{io}}} \qquad (\text{rad/m}).} \tag{8-86}$$

Las ecuaciones (8-85) y (8-86) son fáciles de calcular.

EJEMPLO 8-3

Un generador de señales con resistencia interna de 1 (Ω) y voltaje en circuito abierto $v_g(t) = 0.3 \cos 2\pi 10^8 t$ (V) está conectado a una línea de transmisión sin pérdidas de 50(Ω).

La línea tiene 4 (m) de longitud y la velocidad de propagación de la onda en la línea es de 2.5×10^8 (m/s). Para una carga adaptada, encuentre (a) las expresiones instantáneas del voltaje y la corriente en una posición arbitraria de la línea, (b) las expresiones instantáneas del voltaje y la corriente en la carga y (c) la potencia media transmitida a la carga.

SOLUCIÓN

a) Para hallar el voltaje y la corriente en una posición arbitraria de la línea, primero hay que determinar sus valores en el extremo de entrada ($z = 0$, $z' = \ell$). Las cantidades dadas son las siguientes:

$$V_g = 0.3\underline{/0^\circ} \quad \text{(V)}, \qquad \text{un fasor con referencia coseno,}$$
$$Z_g = R_g = 1 \quad (\Omega),$$
$$Z_0 = R_0 = 50 \quad (\Omega),$$
$$\omega = 2\pi \times 10^8 \quad \text{(rad/s)},$$
$$u_p = 2.5 \times 10^8 \quad \text{(m/s)},$$
$$\ell = 4 \quad \text{(m)}.$$

Como la línea está terminada en una carga adaptada, $Z_i = Z_0 = 50$ (Ω). Podemos calcular el voltaje y la corriente en los terminales de entrada teniendo en cuenta el circuito equivalente de la figura 8-5. Tenemos

$$V_i = \frac{Z_i}{Z_g + Z_i} V_g = \frac{50}{1 + 50} \times 0.3\underline{/0^\circ} = 0.294\underline{/0^\circ} \quad \text{(V)},$$
$$I_i = \frac{V_g}{Z_g + Z_i} = \frac{0.3\underline{/0^\circ}}{1 + 50} = 0.0059\underline{/0^\circ} \quad \text{(A)}.$$

Puesto que en una línea adaptada sólo pueden existir ondas que se propaguen en la dirección positiva, utilizamos las ecuaciones (8-54) y (8-55) para el voltaje y la corriente, respectivamente, en una posición arbitraria. Para la línea dada, $\alpha = 0$ y

$$\beta = \frac{\omega}{u_p} = \frac{2\pi \times 10^8}{2.5 \times 10^8} = 0.8\pi \quad \text{(rad/m)}.$$

Por consiguiente,

$$V(z) = 0.294e^{-j0.8\pi z} \quad \text{(V)},$$
$$I(z) = 0.0059e^{-j0.8\pi z} \quad \text{(A)}.$$

Éstos son fasores. Las expresiones instantáneas correspondientes son, a partir de las ecuaciones (8-6) y (8-7),

$$v(z, t) = \mathcal{R}e[0.294e^{j(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z)}]$$
$$= 0.294\cos(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z) \quad \text{(V)},$$
$$i(z, t) = \mathcal{R}e[0.0059e^{j(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z)}]$$
$$= 0.0059\cos(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z) \quad \text{(A)}.$$

b) En la carga, $z = \ell = 4$ (m),

$v(4, t) = 0.294\cos(2\pi 10^8 t - 3.2\pi)$ (V),

$i(4, t) = 0.0059\cos(2\pi 10^8 t - 3.2\pi)$ (A).

c) La potencia media transmitida a la carga en una línea sin pérdidas es igual a la que existe en los terminales de entrada.

$$(P_{av})_L = (P_{av})_i = \tfrac{1}{2}\mathscr{R}e[V(z)I^*(z)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.294 \times 0.0059) = 8.7 \times 10^{-4}\ \text{(W)} = 0.87 \quad \text{(mW)}.$$

EJEMPLO 8-4

Las impedancias en circuito abierto y cortocircuito medidas en los terminales de entrada de una línea de transmisión sin pérdidas de longitud 1.5 (m), que es inferior a un cuarto de longitud de onda, son $-j54.6$ (Ω) y $j103$ (Ω), respectivamente.

a) Calcule Z_0 y γ de la línea.

b) Sin cambiar la frecuencia de operación, calcule la impedancia de entrada de una línea en cortocircuito que tenga dos veces la longitud especificada.

c) ¿Qué longitud debe tener la línea en cortocircuito para que aparezca como un circuito abierto en los terminales de entrada?

SOLUCIÓN

Las cantidades especificadas son

$$Z_{io} = -j54.6, \qquad Z_{is} = j103, \qquad \ell = 1.5.$$

a) Usamos las ecuaciones (8-85) y (8-86) para hallar

$$Z_0 = \sqrt{-j54.6(j103)} = 75 \quad (\Omega),$$
$$\gamma = \frac{1}{1.5}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{j103}{-j54.6}} = \frac{j}{1.5}\tan^{-1}1.373 = j0.628 \quad \text{(rad/m)}.$$

b) Para una línea en cortocircuito del doble de longitud, $\ell = 3.0$ (m),

$$\gamma\ell = j0.628 \times 3.0 = j1.884 \quad \text{(rad)}.$$

La impedancia de entrada es, teniendo en cuenta la ecuación (8-84b),

$$Z_{is} = 75\tanh(j1.884) = j75\tan 108°$$
$$= j75(-3.08) = -j231 \quad (\Omega).$$

Observe que para la línea de 3 (m) en cortocircuito, Z_{is} es ahora una reactancia capacitiva, mientras que en la línea más corta de 1.5 (m) es una reactancia inductiva.

c) Para que una línea en cortocircuito aparezca como un circuito abierto en los terminales de entrada, su longitud debe ser un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda, con la cual $\tan\beta\ell \to \infty$ en la ecuación (8-22).

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.628} = 10 \quad \text{(m)}.$$

Por lo tanto, la longitud requerida de la línea es

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + (n-1)\frac{\lambda}{2}$$
$$= 2.5 + 5(n-1) \quad \text{(m)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

PREGUNTAS DE REPASO

P.8-11 ¿Qué significa una "línea de transmisión adaptada"?

P.8-12 ¿De qué factores depende la impedancia de entrada de una línea de transmisión?

P.8-13 ¿Cuál es la impedancia de entrada de una línea de transmisión sin pérdidas terminada en circuito abierto si la longitud de la línea es (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$ y (c) $3\lambda/4$?

P.8-14 ¿Cuál es la impedancia de entrada de una línea de transmisión sin pérdidas terminada en un cortocircuito si la longitud de la línea es (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$ y (c) $3\lambda/4$?

P.8-15 ¿Es inductiva o capacitiva la impedancia de entrada de una línea de transmisión de $\lambda/8$ de longitud si está (a) terminada en un circuito abierto, (b) terminada en un cortocircuito?

P.8-16 ¿Cuál es la impedancia de entrada de una línea de transmisión sin pérdidas de longitud ℓ que termina en una impedancia de carga Z_L, si (a) $\ell = \lambda/2$ y (b) $\ell = \lambda$?

P.8-17 Describa un método para determinar la impedancia característica y la constante de propagación de una línea de transmisión.

COMENTARIOS

1. La impedancia de entrada de una línea de transmisión que termina en una impedancia característica es igual a la impedancia característica, sin importar la longitud de la línea.
2. Al igual que en el caso de una línea de transmisión infinita, sólo existen ondas directas en una línea que termina en su impedancia característica. Las condiciones del circuito en el extremo de la entrada (emisor) de una línea infinita y de una línea adaptada son iguales.
3. La impedancia de entrada de una línea de longitud ℓ terminada en un cortocircuito es $jR_0 \tan \beta\ell$; puede ser inductiva o capacitiva.
4. La impedancia característica y la constante de propagación de una línea pueden determinarse midiendo las impedancias de entrada con la línea terminada en un circuito abierto y en un cortocircuito.

8-5.3 COEFICIENTE DE REFLEXIÓN Y RAZÓN DE ONDA ESTACIONARIA

En una línea de transmisión de longitud finita, como la que se ilustra en la figura 8-4, las ondas de voltaje y corriente que se propagan desde el extremo del generador hacia la carga Z_L producirán ondas de voltaje y corriente reflejadas si $Z_L \neq Z_0$. Ya hemos determinado el voltaje a una distancia cualquiera $z' = \ell - z$ de la carga mediante la

ecuación (8-72), en la que el término con $e^{\gamma z'}$ representa la onda de voltaje incidente y el término con $e^{-\gamma z'}$ representa la onda de voltaje reflejada. Podemos escribir

$$V(z') = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'}\left[1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}e^{-2\gamma z'}\right]$$

$$= \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'}[1 + \Gamma e^{-2\gamma z'}], \tag{8-87}$$

donde

Definición del coeficiente de reflexión en voltaje de una impedancia de carga Z_L

$$\boxed{\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma|e^{j\theta_\Gamma} \qquad \text{(Sin dimensiones)}} \tag{8-88}$$

es la razón de las amplitudes complejas de las ondas de voltaje reflejada e incidente en la carga ($z' = 0$) y se denomina ***coeficiente de reflexión en voltaje de la impedancia de carga*** Z_L. Tiene la misma forma que la definición del coeficiente de reflexión de la ecuación (7-94) para una onda plana que incide normalmente sobre una superficie de separación plana entre dos medios dieléctricos. Por lo general se trata de una cantidad compleja con magnitud $|\Gamma| \leq 1$.

La ecuación correspondiente a $V(z')$ en la ecuación (8-87) es, a partir de la ecuación (8-73),

$$I(z') = \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'}[1 - \Gamma e^{-2\gamma z'}]. \tag{8-89}$$

El coeficiente de reflexión en corriente es igual al negativo del coeficiente de reflexión en voltaje.

El coeficiente de reflexión en corriente, definido como la razón de las amplitudes complejas de las ondas de corriente reflejada e incidente en la carga ($z' = 0$), es el negativo del coeficiente de reflexión en voltaje, como puede deducirse de la ecuación (8-64). En lo que resta del texto sólo haremos referencia al coeficiente de reflexión en voltaje. Si una línea de transmisión está adaptada (es decir, si $Z_L = Z_0$), $\Gamma = 0$ y no hay reflexión en la carga. Cuando $Z_L \neq Z_0$, existen ondas estacionarias de voltaje y corriente en la línea, de acuerdo con las ecuaciones (8-87) y (8-89), las cuales presentan máximos y mínimos.

De forma análoga al caso de la onda plana descrito por la ecuación (7-98), definimos la razón de los voltajes máximos y mínimos en una línea finita terminada como la ***razón de onda estacionaria (SWR, Standing Wave Ratio)***, S.

Definición de la razón de onda estacionaria (SWR)

$$\boxed{S = \frac{|V_{máx}|}{|V_{mín}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \qquad \text{(Sin dimensiones).}} \tag{8-90}$$

La razón de onda estacionaria puede variar de 1 ($|\Gamma| = 0$, carga adaptada) a ∞ ($|\Gamma| = 1$, circuito abierto o cortocircuito), dependiendo del valor de Z_L. Debido a este amplio intervalo de valores de S, lo más usual es expresarla en una escala logarítmica: $20 \log_{10} S$

en (dB). En una línea no es deseable una razón de onda estacionaria elevada, ya que da lugar a una gran pérdida de potencia La relación inversa de la ecuación (8-90) es

Cálculo de $|\Gamma|$ a partir de la razón de onda estacionaria

$$\boxed{|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} \qquad \text{(Sin dimensiones).}} \tag{8-91}$$

La razón de onda estacionaria en una línea de transmisión puede medirse fácilmente tomando la razón de las intensidades máxima y mínima de campo detectadas por una pequeña sonda que se introduce en la línea a través de una estrecha ranura a lo largo de una sección de la línea. A partir de la ecuación (8-90), $S = |V_{\text{máx}}|/|V_{\text{mín}}|$ y $|\Gamma|$ se obtiene con la ecuación (8-91) Podemos determinar el ángulo θ_Γ a partir de la posición de $V_{\text{máx}}$ o $V_{\text{mín}}$ (La distancia entre dos máximos o dos mínimos consecutivos del voltaje es media longitud de onda.) Una vez que hemos determinado $|\Gamma|$ y θ_Γ, se calcula Z_L usando la ecuación (8-88), como se verá en el ejemplo 8-5.

Para una línea de transmisión *sin pérdidas*, $\gamma = j\beta$ y las ecuaciones (8-87) y (8-89) se convierten en

$$V(z') = \frac{I_L}{2}(Z_L + R_0)e^{j\beta z'}[1 + |\Gamma|e^{j(\theta_\Gamma - 2\beta z')}] \tag{8-92}$$

y

$$I(z') = \frac{I_L}{2R_0}(Z_L + R_0)e^{j\beta z'}[1 - |\Gamma|e^{j(\theta_\Gamma - 2\beta z')}]. \tag{8-93}$$

EJEMPLO 8-5

La razón de onda estacionaria en una línea de transmisión sin pérdidas de 50 (Ω) terminada en una impedancia de carga desconocida es 3.0. La distancia entre dos mínimos consecutivos del voltaje es 20 (cm) y el primer mínimo se encuentra a 5 (cm) de la carga. Determine (a) el coeficiente de reflexión Γ y (b) la impedancia de carga Z_L

SOLUCIÓN

a) La distancia entre dos mínimos concecutivos del voltaje es media longitud de onda.

$$\lambda = 2 \times 0.2 = 0.4 \quad \text{(m)}, \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \quad \text{(rad/m)}.$$

Determinamos la magnitud del coeficiente de reflexión, $|\Gamma|$, a partir de la razón de onda estacionaria dada $S = 3$ y la ecuación (8-91)

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{3-1}{3+1} = 0.5.$$

Para determinar el ángulo θ_Γ se observa en la ecuación (8-92) que el primer mínimo de voltaje ocurre cuando

$$\theta_\Gamma - 2\beta z'_m = -\pi,$$

donde z'_m denota la posición del primer mínimo de voltaje. Tenemos

$$\theta_\Gamma = 2\beta z'_m - \pi$$
$$= 2 \times 5\pi \times 0.05 - \pi = -0.5\pi = -\pi/2 \quad \text{(rad)}.$$

Por lo tanto,

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma} = 0.5 e^{-j\pi/2} = -j0.5.$$

b) La impedancia de carga Z_L se determina con la ecuación (8-88).

$$\frac{Z_L - 50}{Z_L + 50} = -j0.5,$$

$$Z_L = \frac{50 - j25}{1 + j0.5} = 30 - j40 \quad (\Omega).$$

■ **EJERCICIO 8.8** Repita el ejemplo 8-5 con la misma línea de transmisión sin pérdidas de 50 (Ω) operando a la misma frecuencia, pero con distinta resistencia de carga desconocida. Si la razón de onda estacionaria es 2.5 y el voltaje máximo aparece en la carga, calcule (a) el coeficiente de reflexión Γ_L y (b) la impedancia de carga Z_L.

RESPUESTA: (a) 0.43, (b) 125.4 (Ω)

En las ecuaciones (8-87) y (8-89) expresamos el voltaje $V(z')$ y la corriente $I(z')$ en una línea de transmisión finita terminada en Z_L en términos de la corriente de carga I_L y el coeficiente de reflexión en voltaje Γ de la carga. No se mencionaron las condiciones en el extremo de entrada o generador; sin embargo, es evidente que I_L depende de las condiciones en el extremo de entrada. Si se conecta un generador de voltaje V_g con impedancia interna Z_g a la entrada de la línea, como en la figura 8-4, tenemos la condición siguiente:

$$V_i = V_g - I_i Z_g, \tag{8-94}$$

donde V_i e I_i se obtienen al asignar $z' = \ell$ en las ecuaciones (8-87) y (8-89), respectivamente. En lo referente a las ondas de voltaje viajeras, un voltaje de entrada $V_i = V_g Z_0/(Z_0 + Z_g)$ se propaga hacia la carga con velocidad $u_p = \omega/\beta$ en cuanto se conecte el generador a los terminales de entrada de la línea. Si $Z_L \neq Z_0$, la onda incidente se refleja en la carga con coeficiente de reflexión Γ. Esta onda reflejada viaja de regreso al extremo de entrada con la misma velocidad u_p. Si $Z_g \neq Z_0$, se produce otra reflexión con coeficiente $\Gamma_g = (Z_g - Z_0)/(Z_g + Z_0)$. El proceso anterior se repite indefinidamente, con reflexiones en ambos extremos, y la onda estacionaria $V(z')$ será la suma de todas las ondas que se propagan en ambas direcciones.

También ocurre reflexión en el extremo del generador (a la entrada) si $Z_g \neq Z_0$.

Si $Z_L = Z_0$ (carga adaptada), Γ será igual a cero y sólo habrá una onda que se propaga desde el generador y que termina en la carga. Si $Z_L \neq Z_0$, pero $Z_g = Z_0$, habrá una onda inicial que se propaga desde el generador hacia la carga (onda incidente) y una onda reflejada que regresa desde la carga y termina en el generador.

EJEMPLO 8-6

Un generador de 100 (MHz) con $V_g = 10\underline{/0^\circ}$ (V) y resistencia interna de 50 (Ω) se conecta a una línea aérea sin pérdidas de 50 (Ω) de 3.6 (m) de longitud y que termina en una carga de $25 + j25$ (Ω). Determine (a) $V(z)$ a la distancia z del generador, (b) V_i en los terminales de entrada y V_L en la carga, (c) la razón de onda estacionaria en la línea y (d) la potencia media suministrada a la carga.

SOLUCIÓN

Remitiéndonos a la figura 8-4, las cantidades dadas son

$$V_g = 10\underline{/0^\circ}\quad (\text{V}),\qquad Z_g = 50\quad (\Omega),\qquad f = 10^8\quad (\text{Hz}),$$

$$R_0 = 50\quad (\Omega),\qquad Z_L = 25 + j25 = 35.36\underline{/45^\circ}\quad (\Omega),\qquad \ell = 3.6\quad (\text{m}).$$

Por lo tanto,

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi 10^8}{3\times 10^8} = \frac{2\pi}{3}\quad (\text{rad/m}),\qquad \beta\ell = 2.4\pi\quad (\text{rad}),$$

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(25 + j25) - 50}{(25 + j25) + 50} = \frac{-25 + j25}{75 + j25} = \frac{35.36\underline{/135^\circ}}{79.1\underline{/18.4^\circ}}$$
$$= 0.447\underline{/116.6^\circ} = 0.447\underline{/0.648\pi},$$

$\Gamma_g = 0$. (Hay sólo una onda incidente y una onda reflejada.)

a) Para hallar $V(z)$ sustituimos $V(z' = \ell) = V_i$ de la ecuación (8-87) e $I(z' = \ell) = I_i$ de la ecuación (8-89) en la ecuación (8-94), para determinar así

$$I_L(Z_L + Z_0)e^{\gamma\ell} = V_g. \tag{8-95}$$

Al usar la ecuación (8-95) en la ecuación (8-87) se obtiene

$$V(z) = \frac{V_g}{2}e^{-j\beta z}[1 + \Gamma e^{-j2\beta(\ell - z)}]. \tag{8-96}$$

Para este problema,

$$V(z) = \frac{10}{2}e^{-j2\pi z/3}[1 + 0.447\,e^{j(0.648 - 4.8)\pi}\,e^{j4\pi z/3}]$$
$$= 5[e^{-j2\pi z/3} + 0.447e^{j(2z/3 - 0.152)\pi}]\quad (\text{V}).$$

b) En los terminales de entrada,

$$V_i = V(0) = 5(1 + 0.447e^{-j0.152\pi})$$
$$= 5(1.396 - j0.207)$$
$$= 7.06\underline{/-8.43^\circ}\quad (\text{V}).$$

En la carga,

$$V_L = V(3.6) = 5[e^{-j0.4\pi} + 0.447e^{j0.248\pi}]$$
$$= 5(0.627 - j0.637) = 4.47\underline{/-45.5^\circ}\quad (\text{V}).$$

c) La razón de onda estacionaria (SWR) es

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.447}{1 - 0.447} = 2.62.$$

d) La potencia media suministrada a la carga es

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left|\frac{V_L}{Z_L}\right|^2 R_L = \frac{1}{2}\left(\frac{4.47}{35.36}\right)^2 \times 25 = 0.20 \quad \text{(W)}.$$

EJERCICIO 8.9 Encuentre la potencia media suministrada a una carga adaptada $Z_L = Z_0 = 50 + j0$ (Ω) en el circuito de línea de transmisión del ejemplo 8-6. Explique la diferencia entre su respuesta y el resultado que obtuvo en el apartado (d) del ejemplo.

RESPUESTA: 0.25 (W)

PREGUNTAS DE REPASO

P.8-18 Defina el *coeficiente de reflexión en voltaje*. ¿Es lo mismo que el "coeficiente de reflexión en corriente"? Explique.

P.8-19 Defina la *razón de onda estacionaria*. ¿Cómo se relaciona con los coeficientes de reflexión en voltaje y corriente?

P.8-20 ¿Por qué no es deseable una razón de onda estacionaria elevada en una línea de transmisión?

P.8-21 ¿Cuáles son los valores de Γ y S en una línea terminada en un circuito abierto? ¿Y terminada en un cortocircuito?

P.8-22 Explique la forma en que se puede determinar el valor de una resistencia de carga midiendo la razón de onda estacionaria en una línea de transmisión sin pérdidas.

COMENTARIOS

1. Si una línea de transmisión no está adaptada ($Z_L \neq Z_0$, $\Gamma \neq 0$), existirá una onda estacionaria en la línea. La distancia entre dos máximos (o mínimos) consecutivos de voltaje es $\lambda/2$ y la distancia entre $V_{máx}$ y $V_{mín}$ vecinos es $\lambda/4$.
2. En una línea sin pérdidas con resistencia característica R_0 terminada en una resistencia R_L, aparece $V_{máx}$ en la carga si $R_L > R_0$ y $V_{mín}$ si $R_L < R_0$. Esto puede observarse en la ecuación (8-92) asignando $z' = 0$ y viendo en la ecuación (8-88) que $\theta_\Gamma = 0$ para $R_L > R_0$ y $\theta_\Gamma = \pi$ para $R_L < R_0$.
3. Remítase al circuito de la línea de transmisión finita de la figura 8-4 y suponga que en $t = 0$ se conecta el generador. Se llegará a un estado estacionario en la línea: (a) en $t_1 = \ell/u_p = \beta\ell/\omega$ si $Z_L = Z_0$ (tanto si $Z_g = Z_0$ como si $Z_g \neq Z_0$) y (b) en $2t_1$ si $Z_L \neq Z_0$ y $Z_g = Z_0$.

8-6 EL DIAGRAMA DE SMITH

Los diagramas simplifican los cálculos relacionados con las líneas de transmisión.

Diagrama de Smith

Los cálculos de líneas de transmisión por lo general implican operaciones muy tediosas de números complejos. Esto se puede evitar si se usa un método gráfico de solución. El método gráfico más conocido y utilizado es el ***diagrama de Smith***, desarrollado por P. H. Smith.† Un diagrama de Smith es una representacion gráfica, en el plano del coeficiente de reflexión, de las funciones de resistencia y reactancia normalizadas.

Para comprender la forma de elaborar un diagrama de Smith para una línea de transmisión *sin pérdidas*, veamos antes el coeficiente de reflexión en voltaje de la impedancia de carga, definido en la ecuación (8-88):

$$\Gamma = \frac{Z_L - R_0}{Z_L + R_0} = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}. \tag{8-97}$$

Normalicemos la impedancia de carga Z_L con respecto a la impedancia característica $R_0 = \sqrt{L/C}$ de la línea.

$$z_L = \frac{Z_L}{R_0} = \frac{R_L}{R_0} + j\frac{X_L}{R_0} = r + jx \qquad \text{(Sin dimensiones)}, \tag{8-98}$$

donde r y x son la resistencia normalizada y la reactancia normalizada, respectivamente. Podemos reescribir la ecuación (8-97) como sigue:

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}, \tag{8-99}$$

donde Γ_r y Γ_i son las partes real e imaginaria del coeficiente de reflexión en voltaje Γ. La relación inversa de la ecuación (8-99) es

$$z_L = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1 + |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}}{1 - |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}}. \tag{8-100}$$

Si expresamos z_L y Γ por sus componentes real e imaginaria tenemos

$$r + jx = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i}. \tag{8-101}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la ecuación (8-101) por el complejo conjugado del denominador, para después separar las partes real e imaginaria, se obtiene

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{8-102}$$

y

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}. \tag{8-103}$$

† P. H. Smith, "Transmission-line calculator", *Electronics*, vol. 12, pág. 29, enero de 1939, y "An improved transmission-line calculator", *Electronics*, vol. 17, pág. 130, enero de 1944.

Si se representa gráficamente la ecuación (8-102) en el plano Γ_r–Γ_i para un valor determinado de r, la gráfica resultante es el lugar geométrico de esta r. El lugar geométrico puede reconocerse al reorganizar la ecuación como sigue:

Ecuación de círculos de r constante en un diagrama de Smith

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2. \tag{8-104}$$

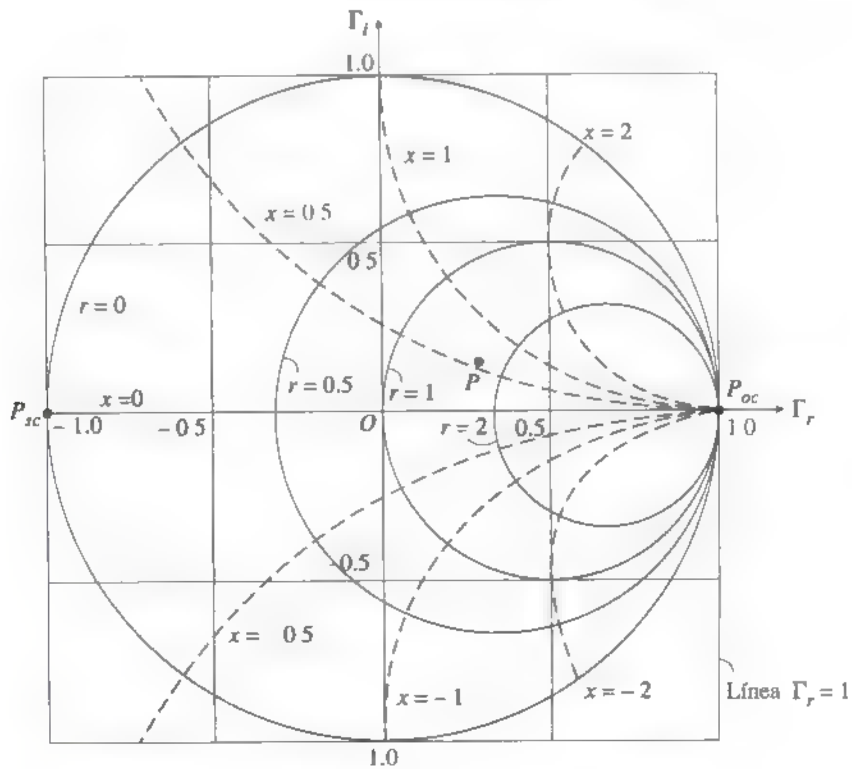
Ésta es la ecuación de un círculo con radio $1/(1+r)$ centrado en $\Gamma_r = r/(1+r)$ y $\Gamma_i = 0$. Los distintos valores de r dan círculos de radio diferente, con centro en distintas posiciones del eje Γ_r. En la figura 8-6 se presenta una familia de círculos r, dibujada con líneas sólidas. Puesto que $|\Gamma| \leq 1$ en una línea sin pérdidas, sólo tiene significado la parte de la gráfica que está dentro del círculo unitario en el plano Γ_r–Γ_i, podemos descartar todo lo que quede fuera. Observe que todos los círculos pasan por el punto (1, 0). El círculo $r = 0$, con radio unidad y centrado en el origen, es el más grande.

Así mismo, podemos reorganizar la ecuación (8-103) como

Ecuación de círculos de x constante en un diagrama de Smith

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2. \tag{8-105}$$

FIGURA 8-6 Diagrama de Smith con coordenadas rectangulares



Ésta es la ecuación de un círculo con radio $1/|x|$ centrado en $\Gamma_r = 1$ y $\Gamma_i = 1/x$. Los distintos valores de x generan círculos con diferentes radios y centros en distintas posiciones de la línea $\Gamma_r = 1$. En la figura 8-6 se presenta con líneas punteadas una familia de las porciones de círculos x dentro del límite $|\Gamma| = 1$. Todos los círculos x también pasan por el punto (1, 0). Sus centros están por encima del eje Γ_r si $x > 0$ (reactancias inductivas) y por debajo del eje si $x < 0$ (reactancias capacitivas). El radio del círculo x es mayor a medida que disminuye $|x|$ y el lugar geométrico de $x = 0$ degenera en el eje Γ_r.

Es posible demostrar que los círculos r y x siempre son ortogonales entre sí. La intersección de un círculo r y un círculo x define un punto que representa una impedancia de carga normalizada $z_L = r + jx$. La impedancia de carga real es $Z_L = R_0(r + jx)$.

Situación del punto de cortocircuito P_{sc} y del punto de circuito abierto P_{oc} en un diagrama de Smith

Como ejemplo, el punto P de la figura 8-6 es la intersección del círculo $r = 1.7$ y el círculo $x = 0.6$. (El mismo punto P se localiza de manera más precisa en el diagrama detallado de la figura 8-8.) Por lo tanto, representa $z_L = 1.7 + j0.6$. El punto P_{sc} en ($\Gamma_r = -1$, $\Gamma_i = 0$) corresponde a $r = 0$ y $x = 0$ y por consiguiente representa un cortocircuito. El punto P_{oc} en ($\Gamma_r = 1$, $\Gamma_i = 0$) corresponde a una impedancia infinita y representa un circuito abierto.

El diagrama de Smith en el plano del coeficiente de reflexión puede [illegible] coordenadas rectangulares $\Gamma_r - \Gamma_i$ o con coordenadas polares $|\Gamma| - \theta_\Gamma$.

El diagrama de Smith de la figura 8-6 está marcado con las coordenadas rectangulares Γ_r y Γ_i. Podemos marcar el mismo diagrama con coordenadas polares, de manera que cada punto del plano Γ esté especificado por una magnitud $|\Gamma|$ y un ángulo de fase θ_Γ. Esta situación se ilustra en la figura 8-7, donde se muestran varios círculos $|\Gamma|$ con líneas punteadas; así mismo, se marcan algunos ángulos θ_Γ alrededor del círculo $|\Gamma| = 1$, que es lo mismo que el círculo $r = 0$. Los círculos $|\Gamma|$ usualmente no aparecen en los diagramas de Smith comerciales; sin embargo, una vez que se localiza el punto que representa una determinada $z_L = r + jx$, es bastante sencillo dibujar un círculo centrado en el origen que pase por el punto. La distancia fraccionaria del centro al punto (comparada con el radio unitario del borde del diagrama) es igual a la magnitud $|\Gamma|$ del coeficiente de reflexión en voltaje, el ángulo que forma la línea al punto con el eje real es θ_Γ. Esta determinación gráfica evita la necesidad de calcular Γ mediante la ecuación (8-99).

Situación de los puntos que representan $V_{máx}$ y $V_{mín}$ en un diagrama de Smith

Cada uno de los círculos $|\Gamma|$ corta al eje real en dos puntos. En la figura 8-7 designamos el punto en el eje real positivo (OP_{oc}) como P_M y el punto en el eje real negativo (OP_{sc}) como P_m. Puesto que $x = 0$ sobre el eje real, P_M y P_m representan situaciones con una carga puramente resistiva, $Z_L = R_L$. Por supuesto, $R_L > R_0$ en P_M, donde $r_L > 1$; y $R_L < R_0$ en P_m, donde $r_L < 1$. Los puntos P_M y P_m corresponden a las posiciones de $V_{máx}$ y $V_{mín}$, respectivamente. Tenemos

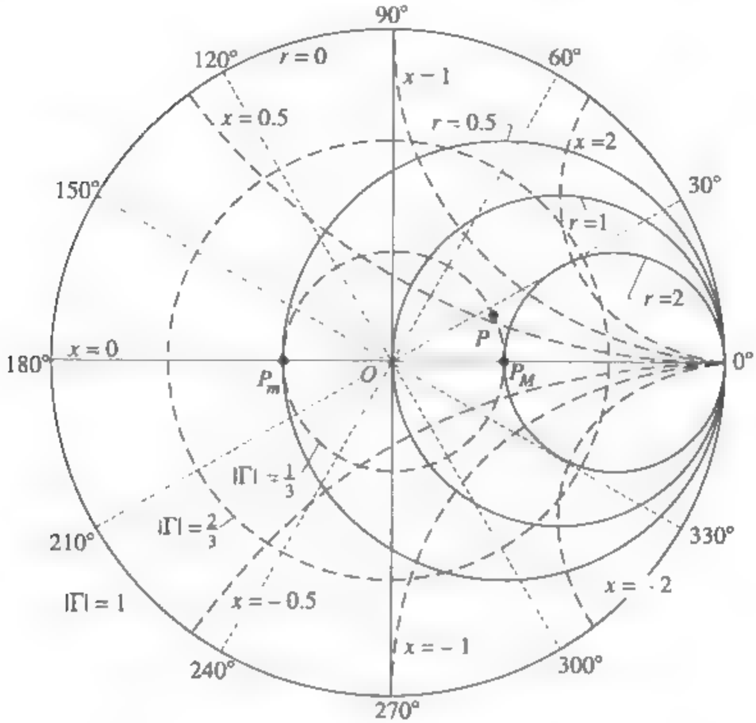


FIGURA 8-7 Diagrama de Smith con coordenadas polares.

$$\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \frac{r_L - 1}{r_L + 1} = \frac{S-1}{S+1} \tag{8-106}$$

Determinación de la razón de onda estacionaria, S, en un diagrama de Smith

Así, $S = r_L = R_L/R_0$ para $R_L > R_0$. Entonces, *el valor del círculo r que pasa por el punto P_M es numéricamente igual a la razón de onda estacionaria*. Podemos ver que $|\Gamma| = 1/3$ y $\theta_\Gamma = 28°$ para el punto $z_L = 1.7 + j0.6$, marcado como P en la figura 8-7. En P_M, $r = S = 2.0$. Estos resultados se pueden comprobar analíticamente.

Hasta ahora hemos basado la construcción del diagrama de Smith en la definición del coeficiente de reflexión en voltaje de la impedancia de carga, expresado por la ecuación (8-88). La impedancia de entrada, mirando hacia la carga desde una distancia z' de la carga, es la razón de $V(z')$ e $I(z')$. A partir de las ecuaciones (8-87) y (8-89) tenemos, escribiendo $j\beta$ en lugar de γ para una línea sin pérdidas,

$$Z_i(z') = \frac{V(z')}{I(z')} = R_0\left[\frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta z'}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta z'}}\right]. \tag{8-107}$$

La impedancia de entrada normalizada es

donde

$$\phi = \theta_\Gamma - 2\beta z'. \tag{8-109}$$

Puede verse que la ecuación (8-108) que relaciona z_i y $\Gamma e^{-j2\beta z'} = |\Gamma| e^{j\phi}$ tiene exactamente la misma forma que la ecuación (8-100) que relaciona z_L y $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}$. De hecho, la segunda es un caso especial de la primera para $z' = 0$ ($\phi = \theta_\Gamma$). La magnitud, $|\Gamma|$, del coeficiente de reflexión, y por consiguiente de la razón de onda estacionaria S, no cambia con la longitud adicional de la línea, z'. Por lo tanto, así como podemos utilizar el diagrama de Smith para hallar $|\Gamma|$ y θ_Γ para una z_L determinada en la carga, podemos mantener constante $|\Gamma|$ y *restar* (girar en sentido contrario al de las agujas del reloj) un ángulo igual a $2\beta z' = 4\pi z'/\lambda$ a partir de θ_Γ. Con esto se localizará el punto de $|\Gamma|e^{j\phi}$ que determina z_i, la impedancia de entrada normalizada mirando hacia la línea sin pérdidas con impedancia característica R_0, longitud z' e impedancia de carga normalizada z_L. Normalmente sobre el perímetro del círculo $|\Gamma| = 1$ se proporcionan dos escalas adicionales en $\Delta z'/\lambda$ para facilitar la lectura del cambio en fase $2\beta(\Delta z')$ como resultado de un cambio en la longitud de la línea $\Delta z'$. La escala exterior se identifica como "longitudes de onda hacia el generador" ("*wavelengths toward generator*") en el sentido de las agujas del reloj (aumento en z'), la escala interior se identifica como "longitudes de onda hacia la carga" ("*wavelengths toward load*") en el sentido contrario al de las agujas del reloj (reducción en z'). La figura 8-8 es un diagrama de Smith genérico, disponible comercialmente.† Su apariencia es complicada, pero en realidad sólo consiste en círculos de r y x constante. Comentaremos que un cambio de media longitud de onda en la longitud de la línea ($\Delta z' = \lambda/2$) corresponde a un cambio $2\beta(\Delta z') = 2\pi$ en ϕ. Una revolución completa alrededor de un círculo $|\Gamma|$ regresa al mismo punto y no produce cambios en la impedancia.

Determinación de la impedancia de entrada normalizada, z_i, en un diagrama de Smith

Ilustraremos con ejemplos el uso del diagrama de Smith para resolver algunos problemas típicos de líneas de transmisión.

EJEMPLO 8-7

Use el diagrama de Smith para hallar la impedancia de entrada de una sección de línea de transmisión sin pérdidas de 50 (Ω) con longitud de 0.1 longitudes de onda, terminada en un cortocircuito.

SOLUCIÓN

Dado

$$z_L = 0,$$
$$R_0 = 50 \quad (\Omega),$$
$$z' = 0.1\lambda$$

1. Determine en el diagrama de Smith la intersección de $r = 0$ y $x = 0$ (punto P_{sc} en el extremo izquierdo del diagrama; vea la Fig. 8-9).

† Todos los diagramas de Smith usados en este libro están reimpresos con autorización de Emeloid Industries, Inc., Nueva Jersey

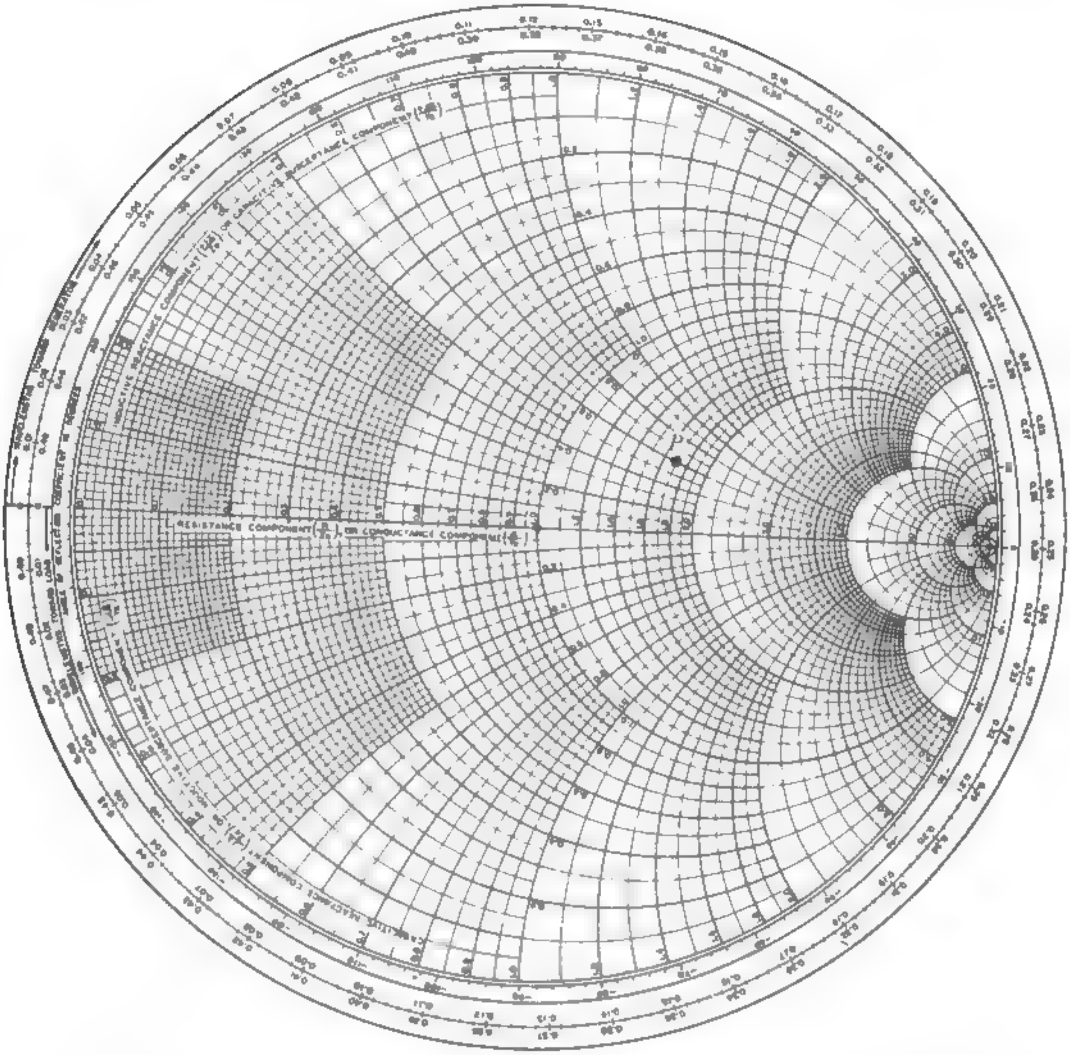


FIGURA 8-8 Diagrama de Smith. (El punto P es el mismo que en las figuras 8-6 y 8-7.)

2. Avance 0.1 "longitudes de onda hacia el generador" por el borde del diagrama ($|\Gamma| = 1$), en sentido de las agujas del reloj hacia P_1.
3. En P_1, lea los valores $r = 0$ y $x \cong 0.725$, o $z = j0.725$. De esta manera, $Z_i = R_0 z = 50(j0.725) = j36.3$ (Ω). (La impedancia de entrada es puramente inductiva.)

Podemos comprobar este resultado utilizando la ecuación (8-82)

$$Z_i = jR_0 \tan \beta\ell = j50 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)0.1\lambda$$

$$= j50 \tan 36° = j36.3 \quad (\Omega).$$

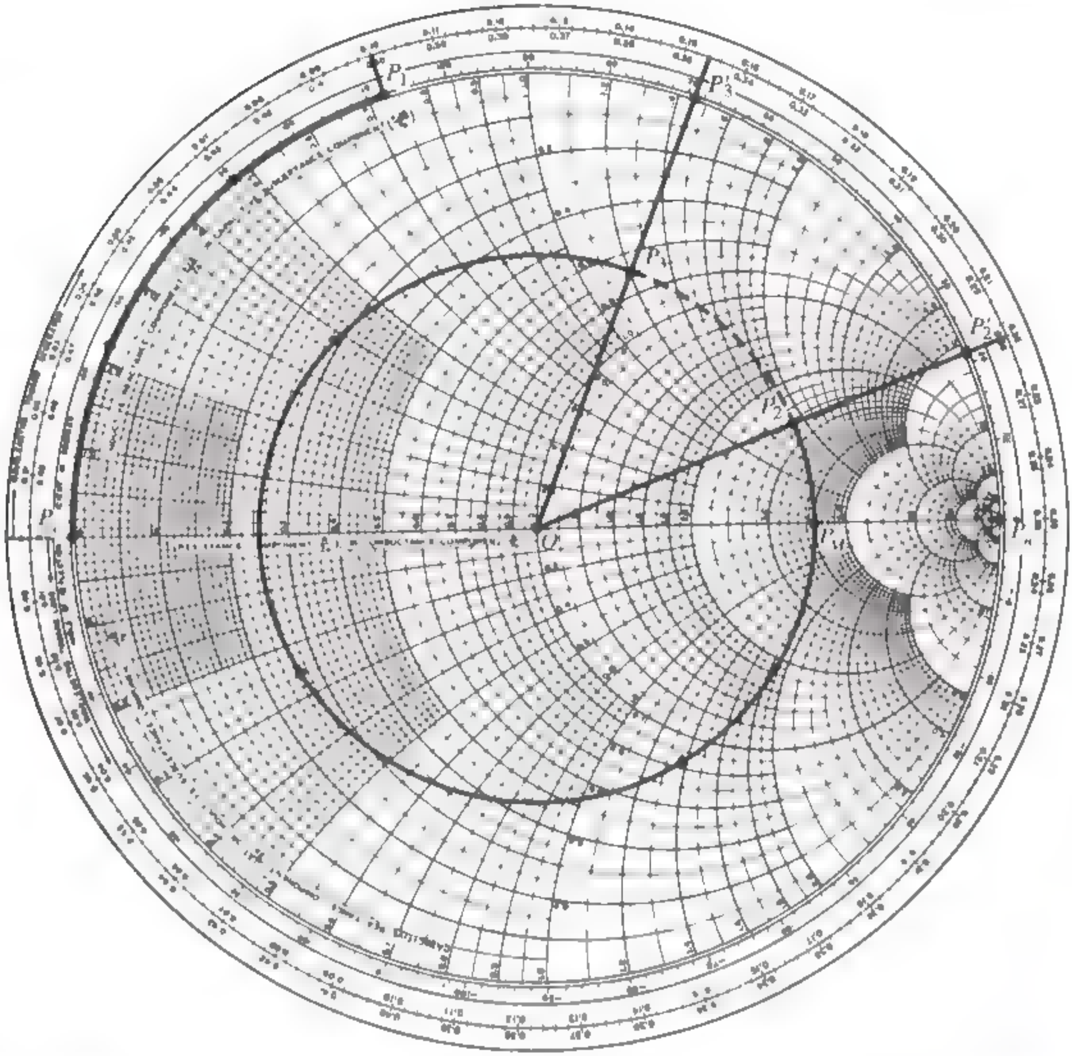


FIGURA 8-9 Cálculos en el diagrama de Smith para los ejemplos 8-7 y 8-8.

■ **EJERCICIO 8.10** La impedancia de entrada de una línea de transmisión en circuito abierto de 75 (Ω) es una reactancia capacitiva de 90 (Ω). Use el diagrama de Smith para determinar la longitud de la línea en longitudes de onda.

RESPUESTA: 0.11λ.

EJEMPLO 8-8

Una línea de transmisión sin pérdidas cuya longitud es 0.434λ y cuya impedancia característica es de 100 (Ω) está terminada en una impedancia de $260 + j180$ (Ω). Calcule (a) el coeficiente de reflexión en voltaje, (b) la razón de onda estacionaria, (c) la impedancia de entrada y (d) la posición del valor máximo de voltaje más cercano a la carga

SOLUCIÓN

Dado

$z' = 0.434\lambda,$

$R_0 = 100 \quad (\Omega),$

$Z_L = 260 + j180 \quad (\Omega).$

a) Para hallar el coeficiente de reflexión en voltaje se siguen varios pasos:

1. Determine en el diagrama de Smith el valor de la impedancia $z_L = Z_L/R_0 = 2.6 + j1.8$ (punto P_2 de la figura 8-9).

2. Con el centro en el origen, dibuje un círculo de radio $\overline{OP}_2 = |\Gamma| = 0.60$. (El radio del diagrama $\overline{OP}_{sc}$ es igual a la unidad.)

3. Dibuje la línea recta OP_2 y extiéndala hasta P'_2 en la periferia. Lea el valor 0.220 en la escala "longitudes de onda hacia el generador". El ángulo de fase θ_Γ del coeficiente de reflexión es $(0.250 - 0.220) \times 4\pi = 0.12\pi$ (rad) o 21.6°. (Se multiplica por 4π el cambio en longitudes de onda porque los ángulos en el diagrama de Smith se miden en $2\beta z'$ o $4\pi z'/\lambda$.) Este ángulo también puede leerse en las marcas en la periferia. La respuesta al apartado (a) es entonces

$$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_\Gamma} = 0.60\underline{/21.6^\circ}.$$

b) El círculo $|\Gamma| = 0.60$ corta al eje real positivo OP_{oc} en $r = S = 4$. Por lo tanto, la razón de onda estacionaria de voltaje es 4.

c) Los pasos para hallar la impedancia de entrada son:

1. Mueva P'_2 en 0.220 un total de 0.434 "longitudes de onda hacia el generador" en el sentido de las agujas del reloj, primero a 0.500 (lo mismo que 0.000) y luego a 0.154[(0.500 − 0.220) + 0.154 = 0.434], hasta P'_3.
2. Una O y P'_3 con una línea recta cortando al círculo $|\Gamma| = 0.60$ en P_3.
3. Lea los valores $r = 0.69$ y $x = 1.2$ en P_3. Por consiguiente,

$$Z_i = R_0 z_i = 100(0.69 + j1.2) = 69 + j120 \quad (\Omega).$$

d) Al ir de P_2 a P_3, el círculo $|\Gamma| = 0.60$ corta al eje real positivo OP_{oc} en P_M, donde el voltaje tiene un valor máximo. Por lo tanto, aparece un voltaje máximo en $(0.250 - 0.220)\lambda$ o a 0.030λ de la carga.

■ **EJERCICIO 8.11** Se decide reducir de 4 a 2 la razón de onda estacionaria en la línea presentada en el ejemplo 8-8, cambiando la impedancia de carga a una carga resistiva R_L. (a) ¿Cuál debe ser el valor de R_L? (b) ¿Cuál será la impedancia de entrada?

RESPUESTA: (a) 200 (Ω), (b) 13.5 + j76 (Ω).

PREGUNTAS DE REPASO

P.8-23 ¿Qué es un diagrama de Smith y por qué es útil para efectuar cálculos con líneas de transmisión?

P.8-24 ¿Cuáles son las coordenadas rectangulares de un diagrama de Smith?

P.8-25 ¿Cuáles son las coordenadas polares de un diagrama de Smith?

P.8-26 ¿En qué lugar del diagrama de Smith está el punto que representa una carga adaptada?

P.8-27 Para una impedancia de carga dada Z_L en una línea de transmisión sin pérdidas cuya impedancia característica es Z_0, ¿cómo se usa el diagrama de Smith para determinar (a) el coeficiente de reflexión y (b) la razón de onda estacionaria?

COMENTARIOS

1. Los círculos r y x en un diagrama de Smith siempre son ortogonales entre sí y todos pasan por el punto (1, 0).
2. Los diagramas de Smith son aplicables a líneas de transmisión con cualquier resistencia característica.
3. El valor de los círculos r que pasan por la intersección de un círculo $|\Gamma|$ y el eje real positivo es igual a la razón de onda estacionaria S.
4. Un cambio de media longitud de onda corresponde a una revolución completa en un diagrama de Smith.

8-6.1 ADMITANCIAS EN EL DIAGRAMA DE SMITH

Hasta ahora hemos analizado el diagrama de Smith en términos de impedancias normalizadas $z = r + jx$; sin embargo, el diagrama de Smith también puede usarse para efectuar cálculos de admitancia. Consideremos de nuevo en la ecuación (8-79) la fórmula de la impedancia de entrada Z_i de una línea sin pérdidas cuya longitud es ℓ y que está terminada en una impedancia Z_L:

$$Z_i = R_0 \frac{Z_L + jR_0 \tan \beta\ell}{R_0 + jZ_L \tan \beta\ell}. \qquad (8\text{-}79)(8\text{-}110)$$

Si $\ell = \lambda/4$, $\beta\ell = \pi/2$, $\tan \beta\ell \to \infty$ y la ecuación (8-110) se convierte en (vea el Ejer. 8-6)

Propiedad de los transformadores de cuarto de onda

$$\boxed{Z_i = \frac{R_0^2}{Z_L} \quad \text{(Línea de cuarto de onda).}} \qquad (8\text{-}111)$$

Por consiguiente, una línea de cuarto de onda sin pérdidas actúa como un inversor de impedancia y con frecuencia se le denomina ***transformador de cuarto de onda***.

Sea ahora $Y_L = 1/Z_L$ la representación de la admitancia de carga. La impedancia de carga normalizada es

$$z_L = \frac{Z_L}{R_0} = \frac{1}{R_0 Y_L} = \frac{1}{y_L}, \qquad (8\text{-}112)$$

donde

$$y_L = R_0 Y_L$$
$$= Y_L/Y_0 = g + jb \qquad \text{(Sin dimensiones)} \tag{8-113}$$

es la admitancia de carga normalizada con conductancia normalizada g y susceptancia normalizada b como partes real e imaginaria, respectivamente. La ecuación (8-112) sugiere que una línea de cuarto de onda con impedancia característica normalizada unidad transformará z_L en y_L y viceversa. En el diagrama de Smith sólo hay que mover un cuarto de longitud de onda el punto que representa z_L sobre el círculo $|\Gamma|$, para así localizar el punto que representa a y_L. Puesto que un cambio de $\lambda/4$ en la longitud de la línea corresponde a un cambio de π radianes en el diagrama de Smith, ***los puntos que representan a z_L y y_L están diametralmente opuestos en el círculo*** Γ. Esta observación nos permite hallar de manera muy sencilla y_L a partir de z_L y z_L a partir de y_L en el diagrama de Smith. (Recuerde que z_L y y_L no tienen dimensiones.)

Determinación de y_L a partir de x_L, y viceversa, en un diagrama de Smith

EJEMPLO 8-9

Dado $Z = 95 + j20$ (Ω), use un diagrama de Smith para hallar Y.

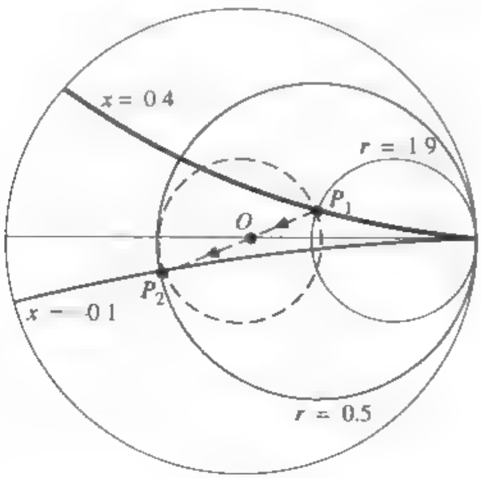
SOLUCIÓN

Este problema no tiene nada que ver con una línea de transmisión. Para usar el diagrama de Smith podemos elegir una constante de normalización arbitraria, por ejemplo $R_0 = 50$ (Ω). Así,

$$z = \tfrac{1}{50}(95 + j20) = 1.9 + j0.4.$$

Identifique z como el punto P_1 en el diagrama de Smith de la figura 8-10. El punto P_2 en el otro lado de la línea, que une P_1 y O, representa y: $\overline{OP}_2 = -\overline{OP}_1$.

FIGURA 8-10 Determinación de la admitancia a partir de la impedancia (ejemplo 8-9)



$$Y = \frac{1}{R_0}\, y = \frac{1}{50}(0.5 - j0.1) = 10 - j2 \quad \text{(mS)}.$$

■ **EJERCICIO 8.10** Dado $Y = 6 + j11$ (mS), use un diagrama de Smith para hallar Z.

RESPUESTA: $38 - j70$ (Ω).

EJEMPLO 8-10

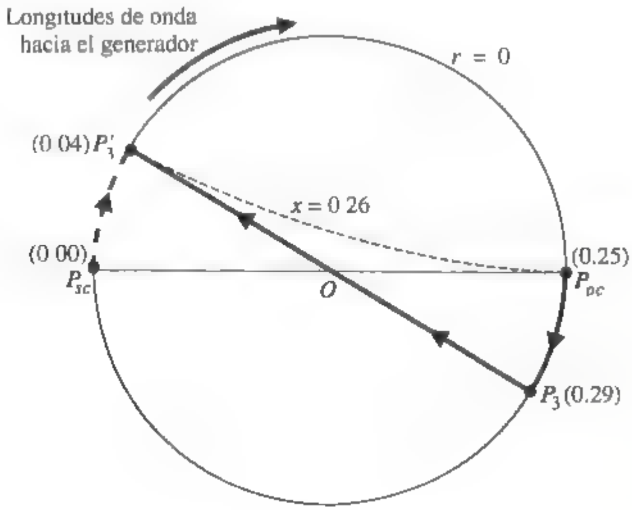
Use un diagrama de Smith para hallar la admitancia de entrada de una línea en circuito abierto cuya impedancia característica es 300 (Ω) y cuya longitud es 0.04λ.

SOLUCIÓN

1. En el caso de una línea en circuito abierto, comenzamos con el punto P_{oc} en el extremo derecho del diagrama de impedancias de Smith, en 0.25 de la figura 8-11.
2. Avance 0.04 "longitudes de onda hacia el generador" por el perímetro del diagrama, hasta P_3 (en 0.29).
3. Trace una línea recta de P_3 a O, cortando en el lado opuesto en P_3'
4. Lea el valor en P_3':

   $y_i = 0 + j0.26.$

FIGURA 8-11 Determinación de la admitancia de entrada de una línea terminada en circuito abierto (ejemplo 8-10).



Por lo tanto,

$$Y_i = \frac{1}{300}(0 + j0.26) = j0.87 \quad \text{(mS)}.$$

Se puede usar un diagrama de Smith como diagrama de impedancias o como diagrama de admitancias.

En los dos ejemplos anteriores hemos efectuado los cálculos de admitancia usando el diagrama de Smith como diagrama de impedancias. También es posible emplear el diagrama de Smith como diagrama de admitancias, en cuyo caso los círculos r y x serían círculos g y b. Los puntos que representan terminaciones de circuito abierto y cortocircuito serían los puntos en el extremo izquierdo y el derecho, respectivamente, del diagrama de admitancias. Así, en el ejemplo 8-10 podríamos comenzar en el punto de la izquierda, en 0.00 en la figura 8-11, y avanzar directamente 0.04 "longitudes de onda hacia el generador" hasta P_3'.

De hecho, es más útil usar el diagrama de Smith como diagrama de admitancias que como diagrama de impedancias al resolver problemas que implican conexiones de líneas en paralelo, ya que las admitancias se suman en las conexiones en paralelo. Esto será obvio en la sección siguiente, cuando veamos la adaptación de impedancias.

8-7 ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Importancia de la adaptación de impedancias en las líneas de transmisión

Las líneas de transmisión se usan para la transmisión de potencia e información. En el caso de la transmisión de potencia de radiofrecuencia es muy deseable transmitir toda la potencia posible del generador a la carga y que se pierda la cantidad mínima posible en la línea. Para esto se requiere que la carga esté adaptada a la impedancia característica de la línea, de manera que la razón de onda estacionaria de la línea este lo más cerca posible de la unidad. En la transmisión de información es esencial que las líneas estén adaptadas, ya que las reflexiones de las uniones y las cargas no adaptadas producirán ecos y distorsionarán la señal portadora de la información. En esta sección analizaremos el sencillo método de un brazo (*stub*) para la adaptación de impedancias en líneas de transmisión sin pérdidas.

Los brazos en cortocircuito (en lugar de circuito abierto) se usan para la adaptación de impedancias en las líneas de transmisión.

Podemos adaptar una impedancia de carga arbitraria a una línea de transmisión colocando un brazo en cortocircuito *en paralelo* con la línea, en un lugar apropiado, como se ilustra en la figura 8-12. Éste es el *método de un brazo* para la adaptación de impedancias.† Es más conveniente explicar el método en términos de la admitancia, ya que se trata de una conexión en paralelo. En la mayoría de los casos es preferible usar brazos en cortocircuito en lugar de brazos en circuito abierto, pues es más difícil lograr una impedancia de carga infinita que una impedancia de carga de valor cero. La radiación de un extremo abierto y el acoplamiento con los objetos vecinos hacen que la impedancia

† Para la adaptación de impedancias también se usa un método alternativo, con dos brazos espaciados por una distancia fija: el método del doble brazo. (Véase D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, 2da. ed., págs. 504-509, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1989.)

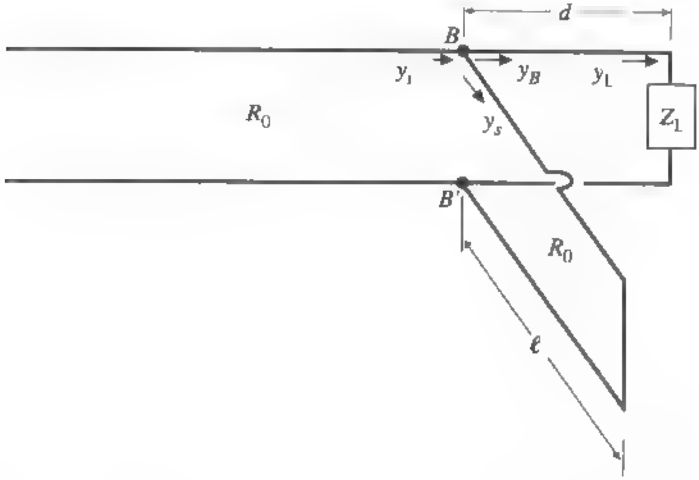


FIGURA 8-12 Adaptación de impedancias con el método de un brazo.

no sea infinita. Además, es más fácil construir un brazo en cortocircuito de longitud ajustable y resistencia característica constante (con sólo cambiar la posición del cortocircuito), que uno en circuito abierto cuya longitud tenga que ajustarse de manera precisa. Por supuesto, la diferencia en la longitud requerida para un brazo en circuito abierto y para uno en cortocircuito es un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda

Suponiendo que Y_B sea la admitancia de entrada en $B\,B'$, mirando hacia la carga de la figura 8-12, sin brazo, el problema de adaptar la impedancia (o admitancia) consiste en determinar la posición d y la longitud ℓ del brazo para que

$$Y_i = Y_0 = Y_B + Y_s, \tag{8-114}$$

donde $Y_0 = 1/R_0$. En términos de las admitancias normalizadas, la ecuación (8-114) se convierte en

$$1 = y_B + y_s, \tag{8-115}$$

donde $y_B = R_0Y_0$ corresponde a la sección de la carga y $y_s = R_0Y_s$ corresponde al brazo en cortocircuito. Sin embargo, puesto que la admitancia de entrada de un brazo en cortocircuito es puramente susceptiva, y_s es puramente imaginaria. Por consiguiente, sólo es posible satisfacer la ecuación (8-115) si

$$y_B = 1 + jb_B \tag{8-116}$$

y

$$y_s = -jb_B, \tag{8-117}$$

donde b_B puede ser positivo o negativo. Nuestros objetivos son entonces (1) encontrar la longitud d para que la admitancia, y_B, de la sección de carga a la derecha de los terminales $B\,B'$ tenga una *parte real unitaria,* y (2) hallar la longitud ℓ del brazo necesaria para *cancelar la parte imaginaria.*

Si se usa el diagrama de Smith como diagrama de admitancias, hacemos lo siguiente para obtener la adaptación con un brazo.

Procedimiento para establecer la adaptación de impedancias con un brazo

1. Determine el punto que representa la admitancia de carga normalizada, y_L
2. Dibuje el círculo $|\Gamma|$ para y_L, que cortará al círculo $g = 1$ en dos puntos, donde $y_{B1} = 1 + jb_{B1}$ y $y_{B2} = 1 + jb_{B2}$. Estos dos puntos son posibles soluciones
3. Determine las longitudes de las secciones de carga d_1 y d_2 a partir de los ángulos entre el punto que representa y_L y los puntos que representan y_{B1} y y_{B2}
4. Determine las longitudes del brazo ℓ_1 y ℓ_2 a partir de los ángulos entre el punto correspondiente a un cortocircuito P_{sc} en el *extremo derecho* del diagrama y los puntos que representan $-jb_{B1}$ y $-jb_{B2}$, respectivamente.

En el ejemplo que sigue se ilustran estos pasos.

EJEMPLO 8-11

Se conecta una línea de transmisión de 50 (Ω) a una impedancia de carga $Z_L = 35 - j47.5$ (Ω). Determine la posición y la longitud del brazo en cortocircuito necesarios para adaptar la línea.

SOLUCIÓN

Dado

$$R_0 = 50\ (\Omega)$$

$$Z_L = 35 - j47.5\ (\Omega)$$

$$z_L = Z_L/R_0 = 0.70 - j0.95.$$

1. Determine z_L como P_1 en el diagrama de Smith (Fig 8-13).
2. Dibuje un círculo $|\Gamma|$ de radio $\overline{OP}_1$ centrado en O.
3. Dibuje una línea recta de P_1, pasando por O, al punto P'_2 en el perímetro, de forma que corte el círculo $|\Gamma|$ en P_2, lo cual representa y_L. Observe el valor de 0.109 en P'_2 en la escala "longitudes de onda hacia el generador".
4. Observe los dos puntos de corte del círculo $|\Gamma|$ con el círculo $g = 1$

   En P_3: $y_{B1} = 1 + j1.2 = 1 + jb_{B1}$;

   En P_4: $y_{B2} = 1 - j1.2 = 1 + jb_{B2}$.
5. Las soluciones para la posición del brazo son:

   Para P_3 (de P'_2 a P'_3): $d_1 = (0.168 - 0.109)\lambda = 0.059\lambda$;

   Para P_4 (de P'_2 a P'_4): $d_2 = (0.332 - 0.109)\lambda = 0.223\lambda$.
6. Las soluciones para la longitud del brazo en cortocircuito para que $y_s = -jb_B$ son:

   Para P_3 (desde P_{sc} en el extremo derecho del diagrama hasta P''_3, que representa $-jb_{B1} = -j1.2$):

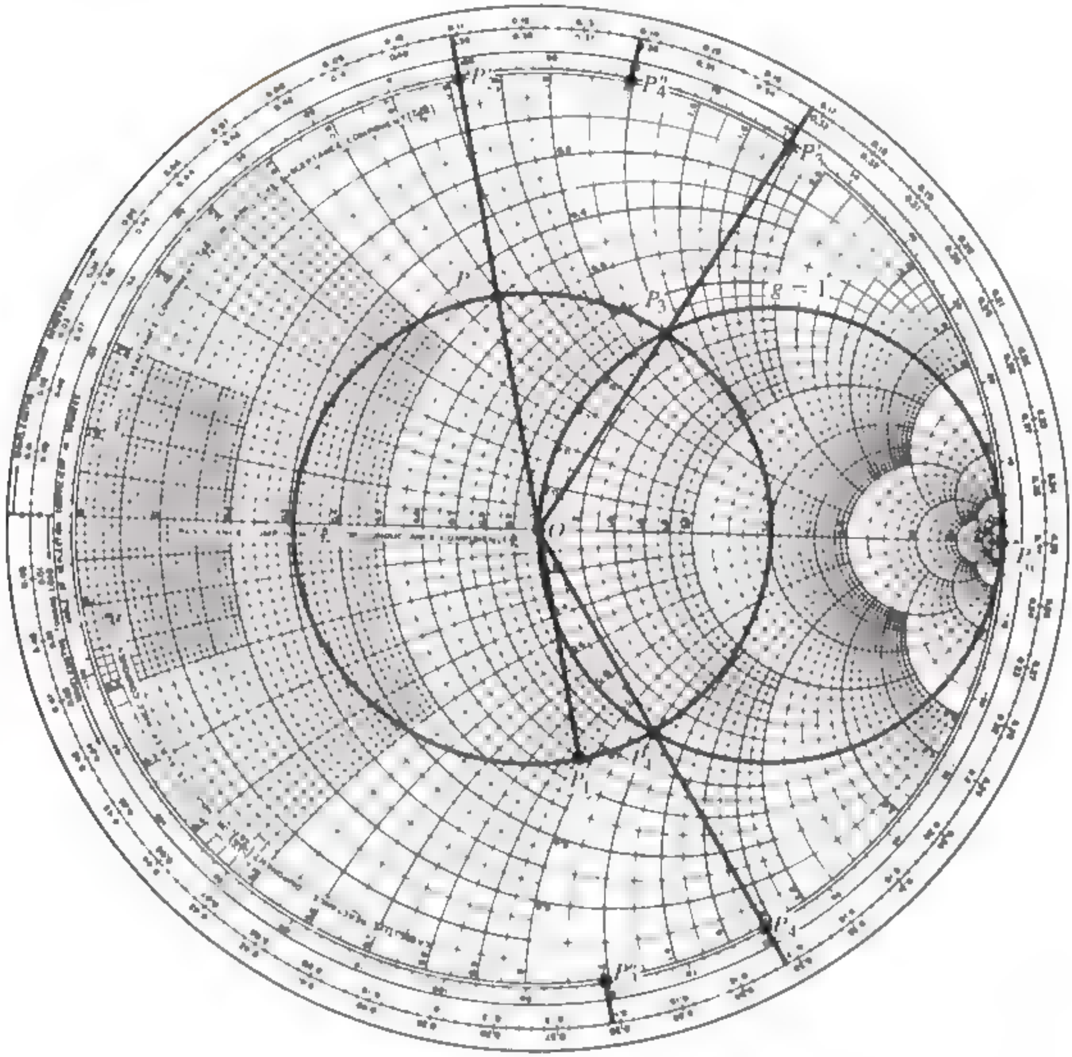


FIGURA 8-13 Determinación de un brazo en un diagrama de admitancias de Smith para la adaptación de impedancias (ejemplo 8-11).

$\ell_1 = (0.361 - 0.250)\lambda = 0.111\lambda;$

Para P_4 (desde P_{sc} hasta P_4'', que representa $-jb_{B2} = j1.2$):

$\ell_2 = (0.139 + 0.250)\lambda = 0.389\lambda.$

En términos generales, es preferible la solución con longitudes menores, a menos que existan otras restricciones prácticas. La longitud exacta, ℓ, del brazo en cortocircuito puede requerir ajustes finos en el procedimiento real de adaptación; por esto, las secciones de adaptación en ocasiones se denominan ***ramas adaptadoras*** o ***brazos adaptadores***

■ **EJERCICIO 8.13** Las mediciones efectuadas en una línea de transmisión sin pérdidas de 50 (Ω) indican que los mínimos consecutivos de voltaje están separados 6 (cm). Se desea adaptar la impedancia de carga $Z_L = 75 + j100$ (Ω) de la línea con un brazo en cortocircuito. Determine (a) la posición del brazo más próxima a la carga, (b) la menor longitud requerida del brazo, (c) la razón de onda estacionaria en la línea entre el brazo y la carga y (d) la razón de onda estacionaria en la línea entre el brazo y la fuente.

RESPUESTA: (a) 2.78 (cm), (b) 1.02 (cm), (c) 4.62, (d) 1.00

PREGUNTAS DE REPASO

P.8-28 ¿Por qué un cambio de media longitud de onda en la longitud de la línea representa una revolución completa en un diagrama de Smith?

P.8-29 Dada una impedancia $Z = R + jX$, ¿qué procedimiento se sigue para hallar la admitancia $Y = 1/Z$ en un diagrama de Smith?

P.8-30 Dada una admitancia $Y = G + jB$, ¿qué procedimiento se sigue para hallar la impedancia $Z = 1/Y$ en un diagrama de Smith?

P.8-31 ¿Es constante la razón de onda estacionaria en una línea de transmisión, aunque la línea tenga pérdidas? Explique.

P.8-32 ¿Por qué es más conveniente usar un diagrama de Smith como diagrama de admitancias que como diagrama de impedancias en la resolución de problemas de adaptación de impedancias?

P.8-33 ¿Por qué es deseable lograr una adaptación de impedancias en una línea de transmisión?

P.8-34 ¿Por qué se usan brazos de tipo cortocircuito en lugar de brazos de tipo circuito abierto para adaptar impedancias?

COMENTARIOS

1. Se puede usar el diagrama de Smith como diagrama de impedancias (para impedancias sin dimensiones, $z = Z/R_0$) o como diagrama de admitancias (para admitancias sin dimensiones, $y = R_0Y$). El punto que representa un cortocircuito, P_{sc}, está en (1, 0) en un diagrama de admitancias de Smith.
2. El principio de adaptación de impedancias con un brazo consiste en conectar en cortocircuito un brazo de la longitud adecuada, en paralelo con la línea principal, a una distancia apropiada de la carga, de manera que la admitancia de entrada en las uniones de la combinación paralela sea $1 + j0$.
3. Los métodos de adaptación de impedancias en líneas de transmisión son sensibles a la frecuencia. La posición y la longitud del brazo dependen de la frecuencia de operación.

RESUMEN

Las líneas de transmisión se usan para llevar a cabo una transmisión eficiente de energía e información de un punto a otro. Hemos dedicado este capítulo a estudiar el método de análisis y el comportamiento de las ondas transversales electromagnéticas (TEM) guiadas por líneas de transmisión. Específicamente, en este capítulo

- analizamos las características de los tres tipos más comunes de líneas de transmisión (la línea de placas paralelas, la línea de dos alambres y la línea coaxial);
- obtuvimos las ecuaciones generales de las líneas de transmisión, cuya combinación da lugar a ecuaciones diferenciales unidimensionales ordinarias de segundo orden con condiciones de dependencia armónica con el tiempo;
- examinamos las características de las ondas en las líneas de transmisión infinitas;
- determinamos la constante de propagación, la velocidad de fase y las impedancias características de las líneas sin pérdidas y de las líneas sin distorsión;
- expresamos la constante de atenuación de una onda propágandose en una línea con pérdidas, en términos de las relaciones de potencia;
- analizamos las características de una onda en líneas de transmisión finitas, en términos de la constante de propagación, la impedancia de entrada, el coeficiente de reflexión y la razón de onda estacionaria;
- examinamos las propiedades de las líneas en circuito abierto y en cortocircuito;
- resolvimos problemas de circuitos de líneas de transmisión;
- estudiamos la construcción y las aplicaciones del diagrama de Smith, y
- explicamos el método de un brazo para adaptar impedancias.

PROBLEMAS

P.8-1 Considere diseños de microtiras sin pérdidas para una impedancia característica determinada.

a) ¿Cómo hay que modificar el espesor del dieléctrico, d, para una anchura de placa dada, w, si se duplica la constante dieléctrica, ϵ_r?

b) ¿Cómo hay que cambiar w para una d determinada si se duplica ϵ_r?

c) ¿Cómo hay que cambiar w para una ϵ_r determinada si se duplica d?

d) ¿Será igual la velocidad de propagación a la de la línea original después de efectuar los cambios especificados en los apartados (a), (b) y (c)? Explique

P.8-2 Considere una línea de transmisión formada por dos placas paralelas de metal ($\sigma_c = 1.6 \times 10^7$ (S/m)) de 20 (mm) de ancho y separadas por un bloque dieléctrico con pérdidas ($\mu = \mu_0$, $\epsilon_r = 3$, $\sigma = 10^{-3}$ (S/m)) de 2.5 (mm) de espesor. La frecuencia de operación es de 500 (MHz).

a) Calcule R, L, G y C por unidad de longitud.

b) Compare las magnitudes de las componentes axial y transversal del campo eléctrico

c) Calcule λ y Z_0.

P.8-3 Se desea construir líneas de transmisión uniformes con polietileno ($\epsilon_r = 2.25$) como medio dieléctrico. Suponga que las perdidas son despreciables y (a) calculela distancia de separación entre los dos alambres para una línea de 300 (Ω), siendo el radio de los alambres conductores de 0.6 (mm), y (b) calcule el radio interior del conductor externo de una línea coaxial de 75 (Ω), siendo el radio del conductor central de 0.6 (mm)

P.8-4 Calcule la constante de atenuación a 1 (MHz) de una línea de transmisión coaxial de cobre cuyo conductor interno tiene un radio de 0.6 (mm) y el externo tiene un radio interior de 3.91 (mm). La constante dieléctrica del medio separador es de 2.25.

P.8-5 En una línea de transmisión con pérdidas a 100 (Mhz) se midieron las siguientes características:

$Z_0 = 50 + j0\ (\Omega)$,

$\alpha = 0.01$ (dB/m),

$\beta = 0.8\pi$ (rad/m).

Determine R, L, G y C para la línea.

P.8-6 Demuestre que se transfiere la potencia máxima desde una fuente de voltaje con impedancia interna Z_g hasta una impedancia de carga Z_L por una línea de transmisión cuando $Z_i = Z_g^*$, donde Z_i es la impedancia mirando hacia la línea cargada. ¿Cuál es la eficiencia máxima de transferencia de potencia?

P.8-7 Exprese $V(z)$ e $I(z)$ en términos del voltaje V_i y la corriente I_i en el extremo de entrada y de γ y Z_0 de una línea de transmisión, (a) en forma exponencial y (b) en forma hiperbólica.

P.8-8 Un generador de cc de voltaje V_g y resistencia interna R_g se conecta a una línea de transmisión con pérdidas caracterizada por una resistencia R por unidad de longitud y conductancia G por unidad de longitud.

a) Escriba las ecuaciones de la línea de transmisión para el voltaje y la corriente

b) Determine las soluciones generales para $V(z)$ e $I(z)$.

c) Particularice las soluciones del apartado (b) para una línea infinita.

d) Particularice las soluciones del apartado (b) para una línea finita de longitud ℓ terminada en una resistencia de carga R_L.

P.8-9 Un generador con voltaje en circuito abierto $v_g(t) = 10$ sen $8000\pi t$ (V) e impedancia interna $Z_g = 40 + j30\ (\Omega)$ se conecta a una línea sin distorsión de 50 (Ω). La línea tiene una resistencia de 0.5 (Ω/m) y su medio dieléctrico con pérdidas tiene una tangente de pérdidas de 0.18%. La línea tiene 50 (m) de longitud y termina en una carga adaptada. Determine (a) las expresiones instantáneas del voltaje y la corriente en un lugar arbitrario de la línea, (b) las expresiones instantáneas del voltaje y la corriente en la carga y (c) la potencia media transmitida a la carga.

P.8-10 Calcule la impedancia de entrada de una línea de cuarto de onda con pequeñas pérdidas ($\alpha\lambda \ll 1$):

a) terminada en un cortocircuito,

b) terminada en un circuito abierto.

P.8-11 Una línea de transmisión sin pérdidas de 2 (m), espaciada por aire y con impedancia característica de 50 (Ω), está terminada en una impedancia de $40 + j30\ (\Omega)$ a una frecuencia de operación de 200 (MHz). Calcule la impedancia de entrada.

P.8-12 Las impedancias en circuito abierto y cortocircuito medidas en los terminales de entrada de una línea de transmisión de longitud de 4 (m) con aire como dieléctrico

son $250\underline{/-50^\circ}$ (Ω) y $360\underline{/20^\circ}$ (Ω), respectivamente.

a) Determine Z_0, α y β de la línea.

b) Determine R, L, G y C.

P.8-13 Las mediciones realizadas en un cable coaxial sin pérdidas de 0 6 (m) a 100 (kHz) indican una capacitancia de 54 (pF) cuando el cable está en circuito abierto y una inductancia de 0.30 (μH) cuando está en cortocircuito.

a) Determine Z_0 y la constante dieléctrica de su medio aislante.

b) Calcule X_{io} y X_{is} a 10 (MHz).

P.8-14 Una línea sin pérdidas de 75 (Ω) está terminada en una impedancia de carga $Z_L = R_L + jX_L$.

a) ¿Cuál debe ser la relación entre R_L y X_L para que la razón de onda estacionaria de la línea sea 3?

b) Calcule X_L si $R_L = 150$ (Ω).

P.8-15 Considere una línea de transmisión sin pérdidas.

a) Determine la resistencia característica de la línea necesaria para que tenga la menor razón de onda estacionaria posible con una impedancia de carga $40 + j30$ (Ω)

b) Calcule esta razón de onda estacionaria mínima y el coeficiente de reflexión de voltaje correspondiente.

P.8-16 Una línea de transmisión con impedancia característica $R_0 = 50$ (Ω) debe adaptarse a una impedancia de carga $Z_L = 40 + j10$ (Ω) a través de un tramo ℓ' de otra línea de transmisión con impedancia característica R_0'. Encuentre los valores de ℓ' y R_0' necesarios para la adaptación.

P.8-17 Obtenga las fórmulas para determinar la longitud ℓ y la resistencia de carga R_L de una línea sin pérdidas cuya impedancia característica es R_0, de manera que la impedancia de entrada sea igual a $Z_i = R_i + jX_i$.

P.8-18 La razón de onda estacionaria en una línea de transmisión sin pérdidas de 300 (Ω) terminada en una impedancia de carga desconocida es 2.0, y el mínimo de voltaje más cercano está a una distancia de 0.3λ de la carga. Determine (a) el coeficiente de reflexión Γ de la carga y (b) la impedancia de carga desconocida Z_L.

P.8-19 Un generador de voltaje senoidal con $V_g = 0.1\underline{/0^\circ}$ (V) e impedancia interna de 50 (Ω) se conecta a una línea de transmisión sin pérdidas con impedancia característica $R_0 = 50$ (Ω) La línea mide $\lambda/8$ de longitud y está terminada en una resistencia de carga $R_L = 25$ (Ω). Encuentre (a) V_i, I_i, V_L e I_L; (b) la razón de onda estacionaria en la línea, y (c) la potencia media suministrada a la carga Compare el resultado del apartado (c) con el caso en el que $R_L = 50$ (Ω).

P.8-20 La impedancia característica de una línea de transmisión sin pérdidas es 75 (Ω). Use el diagrama de Smith para hallar la impedancia de entrada de esta línea a 200 (MHz) si tiene (a) 1 (m) de longitud y está terminada en circuito abierto; (b) 0.8 (m) de longitud y está terminada en cortocircuito. Después (c) determine las admitancias de entrada correspondientes a las líneas de los apartados (a) y (b).

P.8-21 Se conecta una impedancia de carga de $30 + j10$ (Ω) a una línea de transmisión sin pérdidas de 0.101λ de longitud e impedancia característica de 50 (Ω). Use un diagrama de Smith para hallar (a) la razón de onda estacionaria, (b) el coeficiente de reflexión en voltaje, (c) la impedancia de entrada, (d) la admitancia de entrada y (e) la posición del mínimo de voltaje en la línea.

P.8-22 Repita el problema P.8-21 para una impedancia de carga de $30 - j10$ (Ω).

P.8-23 En un experimento de laboratorio que se realizo con una línea de transmisión sin pérdidas de 50 (Ω), terminada en una impedancia de carga desconocida, se descubrió que la razón de onda estacionaria era de 2.0. Los mínimos de voltaje sucesivos están separados 25 (cm) y el primero ocurre a 5 (cm) de la carga. Calcule (a) la impedancia de carga y (b) el coeficiente de reflexion en la carga. (c) ¿Donde estaria el primer mínimo de voltaje si reemplazara la carga por un cortocircuito?

P.8-24 Una antena dipolar con impedancia de entrada de 73 (Ω) es alimentada por una fuente de 200 (MHz) a traves de una línea de transmisión de dos alambres de 300 (Ω). Diseñe una línea aérea de cuarto de onda de dos alambres y con espaciado de 2 (cm) para lograr la adaptación entre la antena y la línea de 300 (Ω).

P.8-25 Se usa el método de un brazo para adaptar una impedancia de carga de $25 + j25$ (Ω) a una línea de transmisión de 50 (Ω). Use un diagrama de Smith para hallar la longitud y la posición (en términos de la longitud de onda) de un brazo en cortocircuito fabricado con una sección de la línea de 50 (Ω).

P.8-26 Repita el problema P.8-25 usando un brazo en cortocircuito fabricado con una sección de línea cuya impedancia característica es de 75 (Ω).

P.8-27 Las mediciones efectuadas en una línea de transmision sin pérdidas con resistencia característica de 75 (Ω) indican una razón de onda estacionaria de 2.4 y los dos mínimos de voltaje más cercanos a la carga en 0.335 (m) y 1.235 (m). Use un diagrama de Smith para: (a) determinar la impedancia de carga Z_L y (b) hallar el lugar mas cercano a la carga y la longitud de un brazo en cortocircuito para adaptar Z_L a la línea.

P.8-28 También se puede adaptar una impedancia de carga a una línea de transmisión usando un brazo colocado en serie con la carga en la posición adecuada, como puede verse en la figura 8-14. Suponga que $Z_L = 25 + j25$ (Ω), $R_0 = 50$ (Ω) y $R_0' = 35$ (Ω) y calcule d y ℓ para la adaptación.

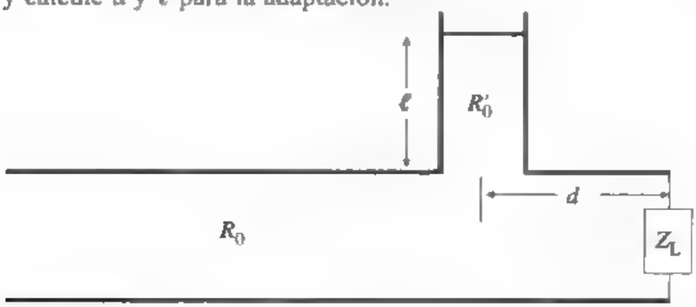
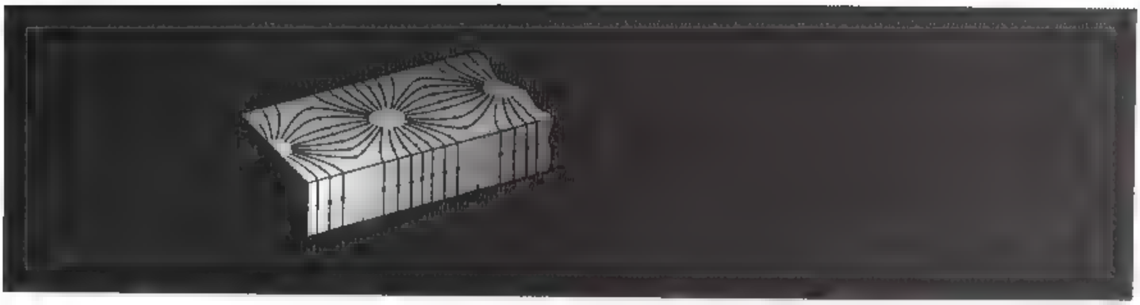


FIGURA 8-14 Adaptación de impedancias con un brazo en serie (Prob. P.8-28)



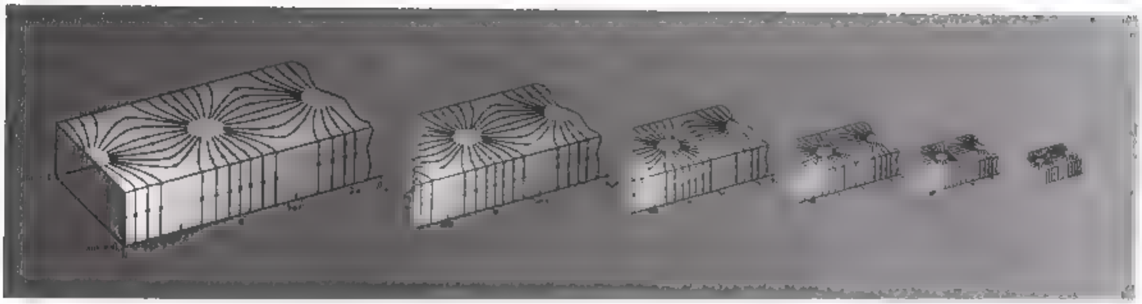
CAPÍTULO 9

9-1 DESCRIPCIÓN GENERAL En el capítulo anterior estudiamos las propiedades características de las ondas transversales electromagnéticas (TEM) guiadas por líneas de transmisión. Sin embargo, las TEM no son las únicas formas de ondas guiadas que pueden propagarse por una línea de transmisión; además, los tres tipos de líneas de transmisión mencionados en la sección 8-1 (de placas paralelas, de dos alambres y coaxiales) no son las únicas estructuras para guiar ondas. El uso de las líneas de transmisión de dos conductores mencionadas en la sección 8-1 no es práctico en aplicaciones por encima de los intervalos SHF y EHF ($f > 3$ Ghz, $\lambda < 10$ cm), ya que la constante de atenuación de las ondas transversales electromagnéticas en una línea, debido a la conductividad finita de los conductores, aumenta con la resistencia por unidad de longitud, R, de la línea, la cual es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia (véase la tabla 8-1). Esta atenuación sería prohibitivamente elevada a frecuencias de microondas. En este capítulo estudiaremos las características de las ondas electromagnéticas que se propagan en tubos metálicos huecos. Puesto que los tubos metálicos son conductores simples con grandes áreas superficiales, es de esperar que la atenuación ocasionada por la resistencia sea más baja. Los tubos metálicos huecos son un tipo de estructuras uniformes que guían ondas, conocidas como ***guías de ondas***.

Los tubos metálicos huecos son una forma de guiar ondas a frecuencias de microondas.

Primero se presentará un análisis del comportamiento general de las ondas electromagnéticas en una guía de ondas uniforme de sección transversal arbitraria. El punto de partida es la ecuación vectorial de Helmholtz para **E** y **H**. Veremos que, además de las ***ondas transversales electromagnéticas (TEM)***, que no tienen componentes del campo en la dirección de la propagación, también pueden existir ***ondas transversales magnéticas (TM)*** con componente longitudinal del campo eléctrico, y ***ondas transversales***

Tres tipos de ondas electromagnéticas que se propagan: TEM, TM y TE



Guías de ondas y cavidades resonantes

eléctricas (TE) con componente longitudinal del campo magnético. No obstante, será evidente que las ondas TEM no pueden existir en una guía de ondas hueca (ni rellena con dieléctrico) de un solo conductor. Estudiaremos con detalle las características de los modos TM y TE en una guía de ondas rectangular.

A frecuencias de microondas, ya no son prácticos como elementos de circuito o como circuitos resonantes los elementos de parámetros concentrados (como las inductancias y las capacitancias) conectados por alambres, debido a que las dimensiones de los elementos tendrían que ser muy pequeñas, a que la resistencia de los circuitos de alambres es muy elevada por el efecto de penetración, y a la radiación. Se puede usar una caja conductora hueca de dimensiones apropiadas como dispositivo resonante de Q muy alta. Esta caja, que en esencia es una sección de guía de ondas con los extremos cerrados, se denomina ***cavidad resonante***. Analizaremos las diferentes distribuciones de los campos para los distintos modos en las cavidades resonantes rectangulares simples.

Las cavidades resonantes son secciones de guías de ondas con los extremos cerrados.

9-2 COMPORTAMIENTO GENERAL DE LAS ONDAS EN ESTRUCTURAS DE GUÍAS UNIFORMES

En esta sección examinaremos algunas de las características generales de las ondas que se propagan a lo largo de estructuras de guías rectas con sección transversal uniforme. Supondremos que las ondas se propagan en la dirección $+z$ con una constante de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$ que aún queda por determinar. Para el caso de la dependencia armónica con el tiempo con frecuencia angular ω, se puede describir la dependencia de z y t de todas las componentes del campo mediante el factor exponencial

$$e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = e^{(j\omega t - \gamma z)} = e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)}. \tag{9-1}$$

Como ejemplo, si usamos una referencia coseno podemos escribir la expresión instantánea del campo **E** en coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{E}(x, y, z; t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}^0(x, y)e^{(j\omega t - \gamma z)}], \tag{9-2}$$

donde $\mathbf{E}^0(x, y)$ es un fasor vectorial bidimensional que sólo depende de las coordenadas transversales. De hecho, al usar una representación fasorial en las ecuaciones que relacionan las cantidades de campo podemos reemplazar las derivadas parciales con respecto a t y z por productos con $(j\omega)$ y $(-\gamma)$, respectivamente; se puede eliminar el factor común $e^{(j\omega t - \gamma z)}$.

Consideremos una guía de ondas recta constituida por un tubo metálico relleno con un dieléctrico, que tiene una sección transversal arbitraria y yace sobre el eje z, como se ilustra en la figura 9-1. De acuerdo con las ecuaciones (6-98) y (6-99), las intensidades de los campos eléctrico y magnético en la región dieléctrica interior libre de cargas satisfacen las siguientes ecuaciones vectoriales homogeneas de Helmholtz:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \tag{9-3}$$

y

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0, \tag{9-4}$$

donde **E** y **H** son fasores vectoriales tridimensionales y k es el número de onda:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}. \tag{9-5}$$

El operador laplaciano tridimensional ∇^2 puede separarse en dos partes: $\nabla^2_{u_1 u_2}$ para las coordenadas transversales y ∇^2_z para la coordenada longitudinal. Para las guias de ondas con una sección transversal rectangular se usan coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E} &= (\nabla^2_{xy} + \nabla^2_z)\mathbf{E} = \left(\nabla^2_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E} \\ &= \nabla^2_{xy}\mathbf{E} + \gamma^2\mathbf{E}.\end{aligned} \tag{9-6}$$

Al combinar las ecuaciones (9-3) y (9-6) se obtiene

$$\nabla^2_{xy}\mathbf{E} + (\gamma^2 + k^2)\mathbf{E} = 0. \tag{9-7}$$

De forma similar, de la ecuación (9-4) tenemos

$$\nabla^2_{xy}\mathbf{H} + (\gamma^2 + k^2)\mathbf{H} = 0. \tag{9-8}$$

Observe que las ecuaciones (9-7) y (9-8) en realidad son tres ecuaciones en derivadas parciales de segundo grado, una para cada componente de **E** y **H**. La solución exacta de estas ecuaciones para las componentes depende de la geometría transversal y de las condiciones en la frontera (condiciones de contorno) (véase la Sec. 9-3)

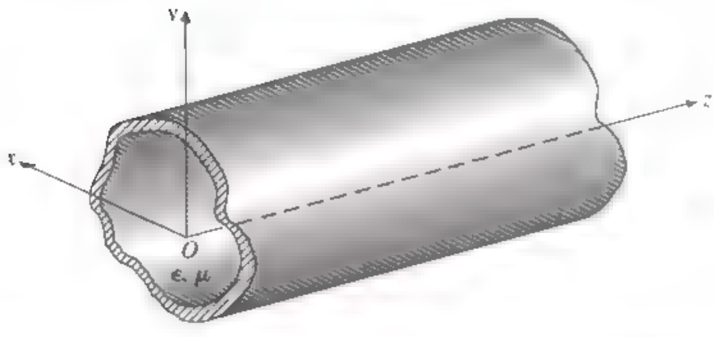


FIGURA 9-1 Guía de ondas uniforme con sección transversal arbitraria.

Por supuesto, las diversas componentes de **E** y **H** no son todas independientes y no es necesario resolver las seis ecuaciones en derivadas parciales de segundo grado para las seis componentes de **E** y **H**. Veamos la relación entre las seis componentes en coordenadas cartesianas desarrollando las dos ecuaciones de rotacional libres de fuentes (Ecs. (6-80a) y (6-80b)) con $\mathbf{J} = 0$:

De $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$:	De $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$:
$\dfrac{\partial E_z^0}{\partial y} + \gamma E_y^0 = -j\omega\mu H_x^0$ (9-9a)	$\dfrac{\partial H_z^0}{\partial y} + \gamma H_y^0 = j\omega\epsilon E_x^0$ (9-10a)
$-\gamma E_x^0 - \dfrac{\partial E_z^0}{\partial x} = -j\omega\mu H_y^0$ (9-9b)	$-\gamma H_x^0 - \dfrac{\partial H_z^0}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y^0$ (9-10b)
$\dfrac{\partial E_y^0}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x^0}{\partial y} = -j\omega\mu H_z^0$ (9-9c)	$\dfrac{\partial H_y^0}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x^0}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z^0$ (9-10c)

Observe que las derivadas parciales con respecto a z se han sustituido por multiplicaciones por $(-\gamma)$. Todas las cantidades de las componentes de campo en las ecuaciones anteriores son fasores que dependen únicamente de x y y, de manera que se ha omitido el factor común $e^{-\gamma z}$ correspondiente a la dependencia con z. Al manipular estas ecuaciones podemos expresar las componentes de campo transversales H_x^0, H_y^0, E_x^0 y E_y^0 en términos de las dos componentes longitudinales E_z^0 y H_z^0. Por ejemplo, podemos combinar las ecuaciones (9-9a) y (9-10b) para eliminar E_y^0 y obtener H_x^0 en términos de E_z^0 y H_z^0. Tenemos

Expresión de las componentes transversales de los campos en función de E_z y H_z

$$H_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma \frac{\partial H_z^0}{\partial x} - j\omega\epsilon \frac{\partial E_z^0}{\partial y}\right), \tag{9-11}$$

$$H_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma \frac{\partial H_z^0}{\partial y} + j\omega\epsilon \frac{\partial E_z^0}{\partial x}\right), \tag{9-12}$$

$$E_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^0}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial H_z^0}{\partial y}\right), \tag{9-13}$$

$$E_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^0}{\partial y} - j\omega\mu\frac{\partial H_z^0}{\partial x}\right), \tag{9-14}$$

donde

$$h^2 = \gamma^2 + k^2. \tag{9-15}$$

Procedimiento para determinar el comportamiento de una onda en una guía de ondas

El comportamiento de las ondas en una guía de ondas puede analizarse resolviendo las ecuaciones (9-7) y (9-8) para las componentes longitudinales, E_z^0 y H_z^0, respectivamente, teniendo en cuenta las condiciones en la frontera requeridas, y usando las ecuaciones (9-11) a (9-14) para determinar las otras componentes.

Es conveniente clasificar en tres tipos las ondas que se propagan en una guía de ondas uniforme, de acuerdo con la existencia de E_z y H_z.

Definición de tres tipos de ondas que se propagan en una guía de ondas uniforme

1. *Ondas transversales electromagnéticas (TEM).* Son ondas que no contienen E_z ni H_z. Vimos las ondas TEM en el capítulo 7 cuando analizamos las ondas planas, y en el capítulo 8 al hablar de las ondas en líneas de transmisión.
2. *Ondas transversales magnéticas (TM).* Ondas que contienen una E_z distinta de cero pero $H_z = 0$.
3. *Ondas transversales eléctricas (TE).* Ondas que contienen una H_z distinta de cero pero $E_z = 0$.

Las características de propagación de los distintos tipos de ondas son diferentes; las analizaremos en las subsecciones siguientes.

9-2.1 ONDAS TRANSVERSALES ELECTROMAGNÉTICAS

Puesto que $E_z = 0$ y $H_z = 0$ en las ondas transversales electromagnéticas (TEM) en una guía, podemos ver que las ecuaciones (9-11) a (9-14) constituyen un conjunto de soluciones triviales (desaparecen todas las componentes del campo) a menos que el denominador h^2 también sea igual a cero. En otras palabras, las ondas transversales electromagnéticas únicamente existen cuando

$$\gamma_{\text{TEM}}^2 + k^2 = 0, \tag{9-16}$$

o

$$\gamma_{\text{TEM}} = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}, \tag{9-17}$$

que es exactamente la misma expresión para la constante de propagación de una onda plana uniforme en un medio ilimitado caracterizado por los parámetros constitutivos ϵ y μ. Recordamos que la ecuación (9-17) también es válida para una onda TEM en una línea de transmisión sin pérdidas; entonces, la velocidad de propagación (velocidad de fase) de una onda transversal electromagnética es

Velocidad de fase de las ondas TEM

$$\boxed{u_{p(\text{TEM})} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad (\text{m/s}).} \tag{9-18}$$

Podemos obtener la relación entre E_x^0 y H_y^0 a partir de las ecuaciones (9-9b) y (9-10a), haciendo E_z y H_z igual a cero. Esta relación se conoce como ***impedancia de la onda*** Tenemos

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{\text{TEM}}} = \frac{\gamma_{\text{TEM}}}{j\omega\epsilon}, \tag{9-19}$$

que, con base en la ecuación (9-17), se convierte en

Impedancia de la onda para las ondas TEM

$$\boxed{Z_{\text{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \qquad (\Omega).} \tag{9-20}$$

Se observa que Z_{TEM} es igual que la impedancia intrínseca del medio dieléctrico, expresada por la ecuación (7-14). Las ecuaciones (9-18) y (9-20) establecen que ***la velocidad de fase y la impedancia de la onda de las ondas transversales electromagnéticas (TEM) son independientes de la frecuencia de las ondas.***

Las guías de ondas de un solo conductor no pueden transportar ondas TEM. En la sección 5-2 señalamos que las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas. Por lo tanto, si una onda TEM existiera en una guía de ondas, las líneas de campo de **B** y **H** describirían trayectorias cerradas en un plano transversal. Sin embargo, la ley circuital generalizada de Ampère (Ec. 6-46b) requiere que la integral de línea (o circulación) del campo magnético a lo largo de una trayectoria cerrada en un plano transversal sea igual a la suma de las corrientes de conducción y desplazamiento que atraviesan dicha trayectoria. Si no hay un conductor interno, no habrá corriente de conducción longitudinal en la guía de ondas Por definición, una onda transversal electromagnética no tiene componente E_z; por lo tanto, no hay corriente de desplazamiento longitudinal. La ausencia total de una corriente longitudinal en la guía de ondas nos lleva a la conclusión de que no puede haber trayectorias cerradas de líneas de campo magnético en ningún plano transversal. Por consiguiente, llegamos a la conclusión de que ***las ondas transversales electromagnéticas (TEM) no pueden existir en una guía de ondas de un solo conductor hueco (o relleno con un dieléctrico), cualquiera que sea su forma.***

Las ondas TEM no se pueden propagar por las guías de ondas de un solo conductor.

9-2.2 ONDAS TRANSVERSALES MAGNÉTICAS

Las ondas transversales magnéticas (TM) no tienen componente del campo magnético en la dirección de propagación, $H_z = 0$. Podemos analizar el comportamiento de las ondas TM resolviendo la ecuación (9-7) para E_z, sujeto a las condiciones en la frontera de la guía, para después usar las ecuaciones (9-11) a (9-14) y determinar las otras componentes. Si escribimos la ecuación (9-7) para E_z, tenemos

$$\nabla_{xy}^2 E_z^0 + (\gamma^2 + k^2)E_z^0 = 0, \tag{9-21}$$

o

$$\boxed{\nabla_{xy}^2 E_z^0 + h^2 E_z^0 = 0.} \tag{9-22}$$

La ecuación (9-22) es una ecuación en derivadas parciales de segundo grado que puede resolverse para E_z^0. El objetivo de esta sección sólo es analizar las propiedades generales de los diversos tipos de ondas. Por lo tanto, la solución de la ecuación (9-22) tendrá que esperar a la siguiente sección, donde se analizan las guías de ondas rectangulares. Una vez determinado E_z^0, podemos hallar las otras componentes del campo usando las ecuaciones (9-11) a (9-14) con $H_z^0 = 0$. Es posible expresar la relación entre las componentes transversales de la intensidad de campo magnético, H_x^0 y H_y^0, y las de la intensidad de campo eléctrico, E_x^0 y E_y^0, en términos de la impedancia de la onda, Z_{TM}, para el modo transversal magnético.

Impedancia de la onda para las ondas TM

$$\boxed{Z_{TM} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = -\frac{E_y^0}{H_x^0} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \qquad (\Omega).} \tag{9-23}$$

Es importante observar que Z_{TM} *no* es igual a $j\omega\mu/\gamma$, ya que γ para las ondas transversales magnéticas *no* es igual a $j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$, como es el caso de γ_{TEM}.

Cuando iniciemos la tarea de resolver la ecuación homogénea bidimensional de Helmholtz (Ec. (9-22)), sujeta a las condiciones en la frontera de una guía de ondas determinada, descubriremos que las soluciones sólo son posibles para *valores discretos de h*. Habrá una infinidad de estos valores discretos, pero las soluciones no son posibles para todos los valores de h. Los valores de h para los cuales existe una solución de la ecuación (9-22) se denominan ***valores característicos*** o ***valores propios*** del problema de condiciones en la frontera. Cada uno de los valores característicos determina las propiedades características de un modo TM específico de la guía de ondas dada.

Definición de los valores característicos o valores propios

En las secciones siguientes también veremos que los valores característicos de los problemas de guías de ondas son números reales. A partir de la ecuación (9-15) tenemos

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{h^2 - k^2} \\ &= \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon}. \end{aligned} \tag{9-24}$$

Se observan dos intervalos distintos para los valores de la constante de propagación, con $\gamma = 0$ como punto divisor, donde

$$\omega_c^2\mu\epsilon = h^2, \tag{9-25}$$

o

Relación entre el valor característico h y la frecuencia de corte f_c

$$\boxed{f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad (\text{Hz}).} \tag{9-26}$$

Definición de la frecuencia de corte f_c

La frecuencia, f_c, donde $\gamma = 0$ se denomina ***frecuencia de corte***. *El valor de f_c para un modo específico en una guía de ondas depende del valor característico, h, del modo.* Usando la ecuación (9-26) podemos escribir la ecuación (9-24) como

$$\gamma = h\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}. \tag{9-27}$$

Los dos intervalos distintos de γ pueden definirse en términos de la razón $(f/f_c)^2$ comparada con la unidad.

a) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 > 1$ o $f > f_c$. En este intervalo, $\omega^2\mu\epsilon > h^2$ y γ es imaginaria. A partir de las ecuaciones (9-24) y (9.26) tenemos

$$\gamma = j\beta = jk\sqrt{1-\left(\frac{h}{k}\right)^2} = jk\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{9-28}$$

El modo se propaga con constante de fase β:

Las ondas con $f > f_c$ son modos que se propagan.

$$\boxed{\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \qquad \text{(rad/m).}} \tag{9-29}$$

La longitud de onda correspondiente en la guía es

Las longitudes de onda en las guías son más largas que las longitudes de onda correspondientes en los medios ilimitados.

$$\boxed{\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}},} \tag{9-30}$$

donde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u}{f} \tag{9-31}$$

es la longitud de onda de una onda plana de frecuencia f en un medio dieléctrico ilimitado que está caracterizado por μ y ϵ, y $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ es la velocidad de la luz en el medio. Podemos reagrupar la ecuación (9-30) para obtener una relación sencilla entre λ, la longitud de onda en la guía λ_g, y la longitud de onda de corte, $\lambda_c = u/f_c$:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}} \tag{9-32}$$

La velocidad de fase de la onda que se propaga en la guía es

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{u}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\lambda_g}{\lambda}u > u. \tag{9-33}$$

En la ecuación (9-33) podemos ver que la velocidad de fase en una guía de ondas siempre es mayor que en un medio ilimitado y que depende de la frecuencia. Por lo tanto, ***las guías de ondas de un solo conductor son sistemas de transmisión dispersivos***, aunque un medio dieléctrico sin pérdidas ilimitado sea no dispersivo. Al sustituir la ecuación (9-28) en la ecuación (9-23) se obtiene

Las guías de ondas de un solo conductor son dispersivas.

La impedancia de la onda para los modos TM que se propagan es menor que la impedancia intrínseca del medio que llena la guía

$$\boxed{Z_{\mathrm{TM}} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \qquad (\Omega)} \tag{9-34}$$

Por consiguiente, la impedancia de la onda de los modos TM que se propagan en una guía de ondas con un dieléctrico sin pérdidas es puramente resistiva y es siempre menor que la impedancia intrínseca del medio dieléctrico.

b) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 < 1$ o $f < f_c$. Cuando la frecuencia del modo es menor que la frecuencia de corte, γ es real y la ecuación (9-27) puede escribirse como

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}, \qquad f < f_c, \tag{9-35}$$

que es, de hecho, una constante de atenuación. Todas las componentes del campo contienen el factor de propagación $e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z}$, de manera que la onda disminuye rápidamente con z y se dice que es ***evanescente***. Por lo tanto, ***una guía de ondas exhibe la propiedad de un filtro pasaalto***. *Para un modo determinado, sólo las ondas con frecuencia superior a la de corte del modo pueden propagarse en la guía.* Al sustituir la ecuación (9-35) en la ecuación (9-23) se obtiene una impedancia de la onda imaginaria para los modos transversales magnéticos con $f < f_c$. Por consiguiente, la impedancia de la onda de los modos TM evanescentes a bajas frecuencias, inferiores a la de corte, es puramente reactiva, lo cual indica que no hay flujo de potencia asociado con las ondas evanescentes.

Las ondas con $f < f_c$ son evanescentes, es decir, no se propagan.

Las guías de ondas son dispositivos pasaalto.

9-2.3 ONDAS TRANSVERSALES ELÉCTRICAS

Las ondas transversales eléctricas (TE) no tienen componente del campo eléctrico en la dirección de propagación, $E_z = 0$. Podemos analizar el comportamiento de las ondas TE resolviendo primero la ecuación (9-8) para H_z:

$$\boxed{\nabla_{xy}^2 H_z + h^2 H_z = 0.} \tag{9-36}$$

Hay que satisfacer las adecuadas condiciones en la frontera en las paredes de la guía Las componentes transversales del campo se determinan después sustituyendo H_z en las ecuaciones (9-11) a (9-14) con E_z igual a cero.

Las componentes transversales de la intensidad de campo eléctrico, E_x^0 y E_y^0, están relacionadas con las de la intensidad de campo magnético, H_x^0 y H_y^0, a través de la impedancia de la onda. Tenemos

Impedancia de la onda para las ondas TE

$$\boxed{Z_{TE} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = -\frac{E_y^0}{H_x^0} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (\Omega).} \tag{9-37}$$

Observe que Z_{TE} en la ecuación (9-37) es bastante diferente de Z_{TM} en la ecuación (9-23), ya que γ de las ondas TE *no* es igual a $j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$, como sucede con γ_{TEM}.

Como no hemos cambiado la relación entre γ y h, las ecuaciones (9-24) a (9-33) correspondientes a las ondas transversales magnéticas también se aplican a las ondas transversales eléctricas. Así mismo, hay también dos intervalos distintos de γ que dependen de si la frecuencia del modo es mayor o menor que la frecuencia de corte, f_c, expresada por la ecuación (9-26).

a) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 > 1$ o $f > f_c$. En este intervalo, γ es imaginaria y tenemos un modo que se propaga. La expresión de γ es la misma que la presentada en la ecuación (9-28).

$$\gamma = j\beta = jk\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}. \tag{9-38}$$

Por consiguiente, las fórmulas de β, λ_g y u_p de las ecuaciones (9-29), (9-30) y (9-33), respectivamente, también son válidas para las ondas TE. Si se usa la ecuación (9-38) en la ecuación (9-37) se obtiene

La impedancia de la onda para los modos TE que se propagan es mayor que la impedancia intrínseca del medio que llena la guía.

$$\boxed{Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \qquad (\Omega),} \tag{9-39}$$

que, como puede verse, es diferente de la expresión de Z_{TM} de la ecuación (9-34). La ecuación (9-39) indica que ***la impedancia de la onda de los modos transversales eléctricos (TE) que se propagan en una guía de ondas con un dieléctrico sin pérdidas es puramente resistiva y siempre es mayor que la impedancia intrínseca del medio dieléctrico.***

b) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 < 1$ o $f < f_c$. En este caso, γ es real y tenemos un modo evanescente o que no se propaga:

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}, \qquad f < f_c. \tag{9-40}$$

Puesto que γ es puramente real en la ecuación (9-40), la impedancia de la onda de los modos TE en la ecuación (9-37) con $f < f_c$,

Las ondas con $f < f_c$ son evanescentes, es decir, no se propagan

$$Z_{TE} = j\frac{\omega\mu}{h\sqrt{1-(f/f_c)^2}}, \qquad f < f_c, \tag{9-41}$$

es puramente reactiva, lo que indica una vez más que no hay flujo de potencia asociado a las ondas evanescentes para $f < f_c$.

■ **EJERCICIO 9.1** (a) Determine la impedancia de la onda y la longitud de onda en la guía (en términos de sus valores para el modo TEM) a una frecuencia igual a dos veces la frecuencia de corte en una guía de ondas de modos TM y TE.
(b) Repita el apartado (a) a una frecuencia igual a la mitad de la frecuencia de corte.

RESPUESTA: (a) 0.866η, 1.155λ; 1.155η, 1.155λ. (b) $-j0.276h/f_c\epsilon$; $j3.63f_c\mu/h$.

■ **EJERCICIO 9.2** Use la ecuación (9-33) para obtener la expresión de la velocidad de grupo, u_g, en una guía de ondas, en términos de f_c y f, y demuestre que

$$u_g u_p = u^2. \tag{9-42}$$

EJEMPLO 9-1

La ecuación (9-29) expresa la relación entre la constante de fase β y la frecuencia f de los modos que se propagan en una guía de ondas. Dibuje la gráfica de ω en función de β para los modos TM y TE, y analice la forma en que se pueden determinar a partir de la gráfica las velocidades de fase y de grupo de una onda que se propaga en la guía.

SOLUCIÓN

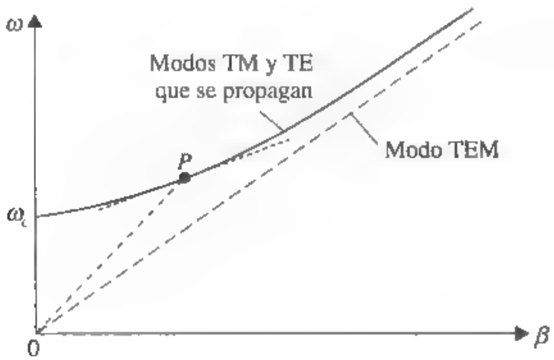
La ecuación (9-29) es válida para los modos que se propagan TM y TE. Puesto que $k = \omega/u$, donde $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ es la velocidad de propagación de la onda en un medio ilimitado, podemos reescribir la ecuación (9-29) como

$$\omega = \frac{\beta u}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}}. \tag{9-43}$$

Un diagrama de dispersión es una gráfica ω-β.

La gráfica de ω en función de β, conocida como ***diagrama de dispersión***, se muestra como una curva sólida en la figura 9-2. Corta al eje ω ($\beta = 0$) en $\omega = \omega_c$. La pendiente

FIGURA 9-2 Gráfica ω–β de una guía de ondas (ejemplo 9-1).



de la línea que une el origen con cualquier punto, digamos P, de la curva, es igual a la velocidad de fase, u_p, para un modo específico con una frecuencia de corte f_c y que opera a una frecuencia particular. La pendiente local de la curva ω–β en P es la velocidad de grupo, u_g. Podemos observar que en el caso de ondas TM y TE que se propagan en una guía de ondas, $u_p > u$, $u_g < u$ y es válida la ecuación (9-43). Al ir aumentado la frecuencia de operación mucho más allá de la frecuencia de corte, u_p y u_g se aproximan asintóticamente a u. El valor exacto de ω_c depende del valor característico h de la ecuación (9-26), o sea, del modo TM o TE particular.

EJEMPLO 9-2

Considere una guía de ondas de placas paralelas que consiste en dos placas conductoras perfectas separadas por una distancia b y rellenas con un medio dieléctrico cuyos parámetros constitutivos (ϵ, μ) son los que se presentan en la figura 9-3. Se supone que las placas se extienden infinitamente en la dirección x. (Los campos no varían en la dirección x.)

a) Obtenga las expresiones con dependencia armónica con el tiempo de los modos TM en la guía.

b) Determine la frecuencia de corte.

SOLUCIÓN

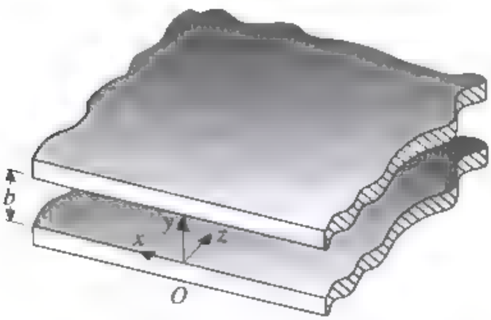
a) Supongamos que las ondas se propagan en la dirección $+z$. $H_z = 0$ para los modos TM. Cuando hay dependencia armónica con el tiempo es conveniente trabajar con fasores de intensidad de campo y escribir $E_z(y, z)$ como $E_z^0(y)e^{-\gamma z}$. Puesto que no hay variación en la dirección x, la ecuación (9-22) se convierte en

$$\frac{d^2E_z^0(y)}{dy^2} + h^2E_z^0(y) = 0. \tag{9-44}$$

La solución general de la ecuación (9-44) es

$$E_z^0(y) = A_n \operatorname{sen} hy + B_n \cos hy. \tag{9-45}$$

FIGURA 9-3 Guía de ondas infinita de placas paralelas



La componente tangencial del campo eléctrico debe desaparecer en la superficie de las placas conductoras perfectas, por lo cual se deben satisfacer las siguientes condiciones en la frontera:

(i) En $y = 0$, $E_z^0(0) = 0$,

y

(ii) En $y = b$, $E_z^0(b) = 0$.

La condición en la frontera (i) requiere que $B_n = 0$, mientras que la condición en la frontera (ii) requiere que sen $hb = 0$ o $hb = n\pi$, lo que determina el valor característico h:

$$h = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{9-46}$$

Por lo tanto, $E_z^0(y)$ en la ecuación (9-45) debe tener la forma siguiente:

$$E_z^0(y) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{9-47}$$

donde la amplitud A_n depende de la intensidad de excitación de la onda TM. Las unicas otras componentes de campo distintas de cero se obtienen de las ecuaciones (9-11) y (9-14), teniendo en cuenta que $H_z^0 = 0$ y que $\partial E_z^0/\partial x = 0$.

$$H_x^0(y) = \frac{j\omega\epsilon}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{9-48}$$

$$E_y^0(y) = -\frac{\gamma}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{9-49}$$

La variable γ de la ecuación (9-49) es la constante de propagación, que puede determinarse a partir de la ecuación (9-24):

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}. \tag{9-50}$$

b) La frecuencia de corte es la frecuencia a la cual $\gamma = 0$. Tenemos

Frecuencia de corte de una guía de ondas de placas paralelas

$$\boxed{f_c = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad \text{(Hz)},} \tag{9-51}$$

lo cual, por supuesto, concuerda con la ecuación (9-26). Las ondas con $f > f_c$ se propagan con una constante de fase β, dada por la ecuación (9-29); las ondas con $f \leq f_c$ son evanescentes.

Hay varios modos TM que se propagan (modos característicos o propios) posibles, dependiendo de los valores de n, que corresponden a los distintos valores característicos h. Así, está el modo TM_1 ($n = 1$) con frecuencia de corte $(f_c)_1 = 1/2b\sqrt{\mu\epsilon}$, el modo TM_2 ($n = 2$) con $(f_c)_2 = 1/b\sqrt{\mu\epsilon}$, etcétera. Cada modo tiene sus propias características. Cuando $n = 0$, $E_z = 0$ y sólo pueden existir

las componentes transversales H_x y E_y. Por lo tanto, el modo TM_0 es el modo TEM, un caso especial para el cual $f_c = 0$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.9-1 ¿Por qué los tipos comunes de líneas de transmisión no son útiles para la transmisión de señales a largas distancias a frecuencias de microondas en modos TEM?

P.9-2 ¿Por qué los elementos de parámetros concentrados conectados por alambres no son útiles como circuitos resonantes a frecuencias de microondas?

P.9-3 ¿Cuáles son los tres tipos básicos de ondas que se propagan en una guía de ondas uniforme?

P.9-4 Explique por qué las guías de ondas de un solo conductor, huecas o rellenas con dieléctrico, no pueden propagar ondas TEM.

P.9-5 Defina la *impedancia de onda.*

P.9-6 Diga de qué manera depende la impedancia de la onda de la frecuencia

- **a)** Para una onda TEM que se propaga.
- **b)** Para una onda TM que se propaga.
- **c)** Para una onda TE que se propaga.

P.9-7 ¿Qué son los *valores característicos* de un problema con condiciones en la frontera?

P.9-8 ¿Qué significa la *frecuencia de corte* de una guía de ondas?

P.9-9 ¿Puede tener más de una frecuencia de corte una guía de ondas? ¿De qué factores depende la frecuencia de corte de una guía de ondas?

P.9-10 ¿Es mayor o menor la longitud de onda de la onda que se propaga en una guía de ondas que la longitud de onda en el medio dieléctrico ilimitado correspondiente?

P.9-11 ¿Qué es un *modo evanescente*?

COMENTARIOS

1. Una guía de ondas exhibe las propiedades de un filtro pasaalto, dejando que se propaguen sólo las frecuencias mayores que una frecuencia de corte.
2. Las impedancias de la onda de los modos TM y TE que se propagan en las guías de ondas sin pérdidas son puramente reales y cambian de acuerdo con la razón (f_c/f); las de los modos evanescentes son puramente imaginarias
3. La longitud de onda (λ_g) y la velocidad de fase (u_p) de los modos TM y TE en una guía de ondas son mayores que la longitud de onda (λ) y la velocidad (u), respectivamente, de propagación de las ondas en el medio ilimitado correspondiente.
4. La velocidad de grupo (u_g) de propagación de las ondas en una guía de ondas *no* es igual al producto $f\lambda_g$, pero sí lo es la velocidad de fase (u_p)
5. Las guías de ondas de un solo conductor son sistemas de transmisión dispersivos (u_p no es proporcional a f).
6. La frecuencia de corte de una guía de ondas de placas paralelas es inversamente proporcional a la separación de las placas.

9-3 GUÍAS DE ONDAS RECTANGULARES

La guía de ondas de placas paralelas que se analizó en el ejemplo 9-2 se basaba en la suposición de que las placas eran de extensión infinita en la dirección transversal x, es decir, los campos no varían con x. En la práctica estas placas siempre son de anchura finita, con efectos marginales en los bordes. La energía electromagnética se fuga por los lados de la guía y se producen acoplamientos indeseables con otros circuitos y sistemas. Por esto, las guías de ondas prácticas normalmente son estructuras uniformes con sección transversal de tipo cerrado. En esta sección analizaremos el comportamiento de las ondas en las guías de ondas rectangulares huecas.

En el tratamiento que aparece a continuación usaremos como base el material de la sección 9-2, relacionado con el comportamiento general de las ondas en guías de estructura uniforme. Se considera que la propagación de las ondas con dependencia armónica con el tiempo es en la dirección $+z$, con constante de propagación γ. Analizaremos por separado los modos TM y TE. Como ya indicamos, las ondas TEM no pueden existir en una guía de ondas de un solo conductor hueco o relleno de dieléctrico.

9-3.1 ONDAS TRANSVERSALES MAGNÉTICAS EN GUÍAS DE ONDAS RECTANGULARES

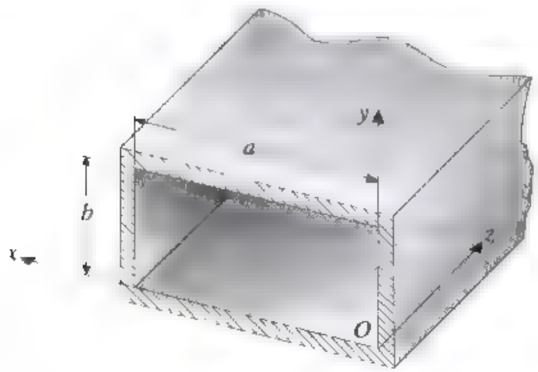
Considere la guía de ondas que aparece en la figura 9-4, con sección transversal rectangular de lados a y b. Se supone que el medio dieléctrico en el interior tiene parámetros constitutivos ϵ y μ. En el caso de ondas transversales magnéticas (TM), $H_z = 0$ y E_z se obtiene de la ecuación (9-22). Si escribimos $E_z(x, y, z)$ como

$$E_z(x, y, z) = E_z^0(x, y)e^{-\gamma z}, \tag{9-52}$$

resolvemos la siguiente ecuación en derivadas parciales de segundo grado:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2\right) E_z^0(x, y) = 0. \tag{9-53}$$

FIGURA 9-4 Guía de ondas rectangular.



Suponemos que la solución $E_z^0(x, y)$ puede expresarse como un producto de una función $X(x)$, que únicamente dependa de x, y de una función $Y(y)$ que sólo dependa de y.

$$E_z^0(x, y) = X(x)Y(y). \tag{9-54}$$

En la subsección 3-11 5 mencionamos el teorema de la unicidad, el cual garantiza que la solución de la ecuación (9-54), independientemente de la manera que se obtenga, es la única solución posible si satisface las condiciones en la frontera del problema Al suponer una solución de producto, como la de la ecuación (9-54), hemos seguido el *método de separación de variables* Sustituyendo la ecuación (9-54) en la ecuación (9-53) y dividiendo la ecuación resultante por $X(x)Y(y)$ obtenemos

Método de separación de variables

$$-\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + h^2. \tag{9-55}$$

El lado izquierdo de la ecuación (9-55) es función únicamente de x y el lado derecho lo es sólo de y, de modo que ambos lados deben ser iguales a una constante para que la ecuación sea válida para todos los valores de x y y. Si llamamos a esta constante (constante de separación) k_x^2 obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias separadas:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k_x^2X(x) = 0, \quad \text{y} \tag{9-56}$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k_y^2Y(y) = 0, \tag{9-57}$$

donde

$$k_y^2 = h^2 - k_x^2. \tag{9-58}$$

Las soluciones generales de las ecuaciones (9-56) y (9-57) son

$$X(x) = A_1 \operatorname{sen} k_x x + A_2 \cos k_x x \quad \text{y} \tag{9-59}$$

$$Y(y) = B_1 \operatorname{sen} k_y y + B_2 \cos k_y y. \tag{9-60}$$

Las formas apropiadas que deben elegirse para $X(x)$ y $Y(y)$ deben ser tales que su producto en la ecuación (9-54) satisfaga las siguientes condiciones en la frontera.

1. En la dirección x:

$$E_z^0(0, y) = 0, \quad \text{y} \tag{9-61}$$

$$E_z^0(a, y) = 0. \tag{9-62}$$

2. En la dirección y:

$$E_z^0(x, 0) = 0, \quad \text{y} \tag{9-63}$$

$$E_z^0(x, b) = 0. \tag{9-64}$$

Es evidente entonces que hay que elegir:

$X(x)$ en la forma de sen $k_x x$,

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots;$$

$Y(y)$ en la forma de sen $k_y y$,

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

y la solución apropiada de $E_z^0(x, y)$ es

$$\boxed{E_z^0(x, y) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad \text{(V/m)},} \tag{9-65}$$

donde se ha sustituido E_0 por el producto A_1B_1, que se determinará a partir de las condiciones de excitación de la guía de ondas. Las otras componentes del campo se obtienen de las ecuaciones (9-11) a (9-14), poniendo $H_z^0 = 0$.

El valor característico h y la constante de propagación γ están relacionados con k_x y k_y a través de las ecuaciones (9-58) y (9-24), respectivamente. Tenemos

$$\boxed{h^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,} \tag{9-66}$$

$$\boxed{\gamma = j\beta = j\sqrt{k^2 - h^2} = j\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.} \tag{9-67}$$

Cada una de las combinaciones de los enteros m y n define un modo posible que puede designarse como el modo TM_{mn}; por lo tanto, hay un número doblemente infinito de modos TM. El primer subíndice denota el número de variaciones de medio ciclo de los campos en la dirección x, y el segundo subíndice indica el número de variaciones de medio ciclo de los campos en la dirección y. El corte de un modo dado es la condición para la cual se anula γ. La frecuencia de corte del modo TM_{mn} es, con base en la ecuación (9-26),

Frecuencia de corte del modo TM_{mn}

$$\boxed{(f_c)_{mn} = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \qquad \text{(Hz)}.} \tag{9-68}$$

Alternativamente, podemos escribir $\lambda_c = u/f_c = 2\pi/h$ o

Longitud de onda de corte del modo TM_{mn}

$$\boxed{(\lambda_c)_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \qquad \text{(m)},} \tag{9-69}$$

donde λ_c es la ***longitud de onda de corte.***

Para los modos TM en guías de ondas rectangulares, m y n no pueden ser cero. Si así fuera, desaparecerían $E_z^0(x, y)$ en la ecuación (9-65) y las demás componentes del campo. Por lo tanto, el modo TM_{11} tiene la menor frecuencia de corte de todos los modos TM en una guía de ondas rectangular. Aquí se aplican directamente las expresiones de la constante de fase β y de la impedancia de la onda Z_{TM} para los modos que se propagan, expresadas por las ecuaciones (9-29) y (9-34), respectivamente.

EJEMPLO 9-3

Una guía de ondas rectangular con dimensiones $a = 2.3$ (cm) y $b = 1.0$ (cm) está rellena con un medio caracterizado por $\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$.

a) Calcule h, f_c y λ_c para el modo TM_{11}.

b) Si la frecuencia de operación es un 15% mayor que la frecuencia de corte, calcule $(Z)_{TM}$, β_{TM} y $(\lambda_g)_{TM_{11}}$. Suponga que la guía de ondas no tiene pérdidas para los modos de propagación.

SOLUCIÓN

a) Para el modo TM_{11} se usa $m = n = 1$ en las ecuaciones (9-66), (9-68) y (9-69).

$$(h)_{TM_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2.3 \times 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{1.0 \times 10^{-2}}\right)^2} = 342.6 \quad (\text{m}^{-1}).$$

$$(f_c)_{TM_{11}} = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{hc}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{342.6 \times (3 \times 10^8)}{2\pi\sqrt{2.25}} = 10.9 \quad (\text{GHz}).$$

$$(\lambda_c)_{TM_{11}} = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{342.6} = 1.83 \quad (\text{cm}).$$

b) TM_{11} es un modo que se propaga a la frecuencia $f = 1.15 f_c = 1.15 \times 10.9 = 12.54$ (GHz). Las expresiones de Z_{TM}, β y λ_g en las ecuaciones (9-34), (9-29) y (9-30) contienen el factor $\sqrt{1 - (f_c/f)^2} = \sqrt{1 - (1/1.15)^2} = 0.494$. Tenemos

$$(Z)_{TM_{11}} = \eta\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{377}{\sqrt{2.25}} \times 0.494 = 124.2 \quad (\Omega),$$

$$(\beta)_{TM_{11}} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2\pi \times (12.54 \times 10^9)\sqrt{2.25}}{3 \times 10^8} \times 0.494$$
$$= 194.5 \quad (\text{rad/m}),$$

y

$$(\lambda_g)_{TM_{11}} = \frac{2\pi}{(\beta)_{TM_{11}}} = \frac{2\pi}{194.5} = 0.0323 \text{ (m)} = 3.23 \quad (\text{cm}).$$

■ **EJERCICIO 9.3** TM_{11} es un modo evanescente si $f < (f_c)_{TM_{11}}$. Encuentre la constante de atenuación para el modo TM_{11} en la guía de ondas del ejemplo 9-3 con $f = 0.85 f_c$. ¿Cuál es la distancia en la guía de ondas a la cual las amplitudes del campo se reducirán en un factor de e^{-1} o en un 36.8%?

RESPUESTA: 180.5 (Np/m), 5.5 (mm).

■ **EJERCICIO 9.4** Encuentre las frecuencias de corte para los modos TM_{12} y TM_{21} en la guía de ondas del ejemplo 9.3.

RESPUESTA: 20.5 (GHz), 13.3 (GHz).

9-3.2 ONDAS TRANSVERSALES ELÉCTRICAS EN GUÍAS DE ONDAS RECTANGULARES

En el caso de ondas transversales eléctricas (TE), $E_z = 0$, resolvemos la ecuación (9-36) para H_z. Escribimos

$$H_z(x, y, z) = H_z^0(x, y)e^{-\gamma z}, \tag{9-70}$$

donde $H_z^0(x, z)$ satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales de segundo grado:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2\right) H_z^0(x, y) = 0. \tag{9-71}$$

Se observa que la ecuación (9-71) tiene exactamente la misma forma que la ecuación (9-53). La solución de $H_z^0(x, y)$ debe satisfacer las siguientes condiciones en la frontera:

1. En la dirección x:

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial x} = 0 \ (E_y = 0) \qquad \text{en } x = 0, \tag{9-72}$$

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial x} = 0 \ (E_y = 0) \qquad \text{en } x = a. \tag{9-73}$$

2. En la dirección y:

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial y} = 0 \ (E_x = 0) \qquad \text{en } y = 0, \tag{9-74}$$

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial y} = 0 \ (E_x = 0) \qquad \text{en } y = b. \tag{9-75}$$

Es fácil comprobar que la solución apropiada de $H_z^0(x, y)$ es

$$\boxed{H_z^0(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad (\text{A/m}).} \tag{9-76}$$

Las otras componentes del campo se obtienen de las ecuaciones (9-11) a (9-14)

$$E_x^0(x, y) = \frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{9-77}$$

$$E_y^0(x, y) = -\frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{9-78}$$

$$H_x^0(x, y) = \frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{9-79}$$

$$H_y^0(x, y) = \frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{9-80}$$

donde h y γ tienen las mismas expresiones que las de las ecuaciones (9-66) y (9-67), respectivamente, para los modos TM.

La ecuación (9-68) para la frecuencia de corte también es aplicable en este caso. En los modos TE, m o n (pero no ambas) pueden ser cero. Si $a > b$, $h = \pi/a$ es el valor característico más pequeño y la frecuencia de corte es la *más baja* cuando $m = 1$ y $n = 0$:

El modo TE_{10} tiene la frecuencia de corte más baja de todos los modos TE en una guía de ondas rectangular con $a > b$.

$$\boxed{(f_c)_{TE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u}{2a} \qquad \text{(Hz)}.} \tag{9-81}$$

La longitud de onda de corte correspondiente es

Longitud de onda de corte del modo TE_{10}

$$\boxed{(\lambda_c)_{TE_{10}} = 2a \qquad \text{(m)}.} \tag{9-82}$$

Modo dominante

Importancia del modo TE_{10} en una guía de ondas rectangular

El modo con menor frecuencia de corte (longitud de onda de corte más larga) se denomina ***modo dominante***. Por consiguiente, *el modo* TE_{10} *es el modo dominante de una guía de ondas rectangular con* $a > b$. El modo TE_{10} tiene importancia especial, ya que posee la constante de atenuación más baja de todos los modos en una guía de ondas rectangular y su campo eléctrico está claramente polarizado en una dirección en todas las posiciones. Examinaremos con mayor detalle su estructura de campo y otras características más adelante, en este capítulo.

■ **EJERCICIO 9.5** (a) ¿Cuál es el modo dominante de una guía de ondas rectangular de $a \times b$ si $a < b$? ¿Cuál es su longitud de onda de corte? (b) ¿Cuáles son las frecuencias de corte en una guía de ondas cuadrada ($a = b$) para los modos TM_{11}, TE_{20} y TE_{02}?

RESPUESTA: (a) $2b$, (b) $1/a\sqrt{2\mu\epsilon}$.

EJEMPLO 9-4

Una onda TE_{10} a 10 (GHz) se propaga en una guía de ondas rectangular con dimensiones internas $a = 1.5$ (cm) y $b = 0.6$ (cm), rellena con polietileno ($\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$). Determine (a) la constante de fase, (b) la longitud de onda en la guía, (c) la velocidad de fase y (d) la impedancia de la onda.

SOLUCIÓN

A la frecuencia $f = 10^{10}$ (Hz) la longitud de onda en el polietileno *ilimitado* es

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = \frac{2 \times 10^8}{10^{10}} = 0.02 \quad \text{(m)}.$$

La frecuencia de corte del modo TE_{10} es, usando la ecuación (9-81),

$$f_c = \frac{u}{2a} = \frac{2 \times 10^8}{2 \times (1.5 \times 10^{-2})} = 0.667 \times 10^{10} \quad \text{(Hz)}.$$

a) La constante de fase es, a partir de la ecuación (9-38),

$$\beta = \frac{\omega}{u}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2\pi 10^{10}}{2 \times 10^8}\sqrt{1 - 0.667^2}$$

$$= 74.5\pi = 234 \quad \text{(rad/m)}.$$

b) La longitud de onda en la guía es, con base en la ecuación (9-30),

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{0.02}{0.745} = 0.0268 \quad \text{(m)}.$$

c) La velocidad de fase es, a partir de la ecuación (9-33),

$$u_p = \frac{u}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{2 \times 10^8}{0.745} = 2.68 \times 10^8 \quad \text{(m/s)}.$$

d) La impedancia de la onda es, usando la ecuación (9-39),

$$(Z_{TE})_{10} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{377/\sqrt{2.25}}{0.745} = 337.4 \quad (\Omega).$$

■ **EJERCICIO 9.6** ¿Cuáles son los modos TM y TE que pueden propagarse en la guía de ondas rectangular rellena de polietileno del ejemplo 9-4 si la frecuencia de operación es de 19 (GHz)? ¿Cuáles son sus frecuencias de corte?

RESPUESTA: TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11} y TM_{11}. Frecuencias de corte en (GHz): 6.67, 13.3, 16.7, 17.9 y 17.9.

EJEMPLO 9-5

(a) Escriba las expresiones instantáneas de los campos para el modo TE_{10} en una guía de ondas rectangular de lados a y b. (b) Dibuje las líneas de los campos eléctrico y magnético en los planos genéricos xy, yz y xz. (c) Dibuje las corrientes de superficie sobre las paredes de la guía.

SOLUCIÓN

a) Las expresiones instantáneas de los campos para el modo dominante TE_{10} se obtienen multiplicando las expresiones fasoriales de las ecuaciones (9-76) a

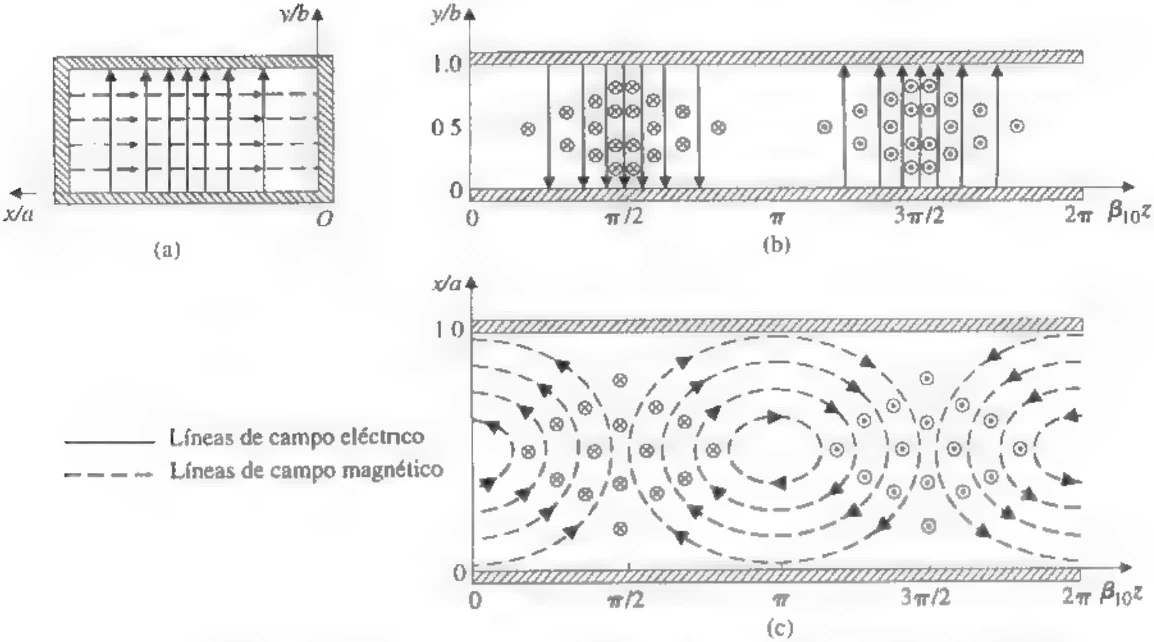


FIGURA 9-5 Líneas de campo para el modo TE_{10} en una guía de ondas rectangular

(9-80) por $e^{j(\omega t-\beta z)}$, para luego tomar la parte real del producto. Para $m = 1$ y $n = 0$ ($h_{10} = \pi/a$) tenemos

$$E_x(x, y, z; t) = 0, \tag{9-83}$$

$$E_y(x, y, z; t) = \frac{\omega\mu a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta_{10}z), \tag{9-84}$$

$$E_z(x, y, z; t) = 0, \tag{9-85}$$

$$H_x(x, y, z; t) = -\frac{\beta_{10}a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta_{10}z), \tag{9-86}$$

$$H_y(x, y, z; t) = 0, \tag{9-87}$$

$$H_z(x, y, z; t) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - \beta_{10}z), \tag{9-88}$$

donde

$$\beta = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}. \tag{9-89}$$

b) De las ecuaciones (9-83) a (9-88) podemos ver que el modo TE_{10} sólo tiene tres componentes de campo distintas de cero: E_y, H_x y H_z. En un plano genérico xy, por ejemplo, cuando sen $(\omega t - \beta z) = 1$, E_y y H_x varían de acuerdo con sen $(\pi x/a)$ y son independientes de y, como se ilustra en la figura 9-5(a). En un plano genérico yz, por ejemplo en $x = a/2$ o sen $(\pi x/a) = 1$ y cos $(\pi x/a) = 0$,

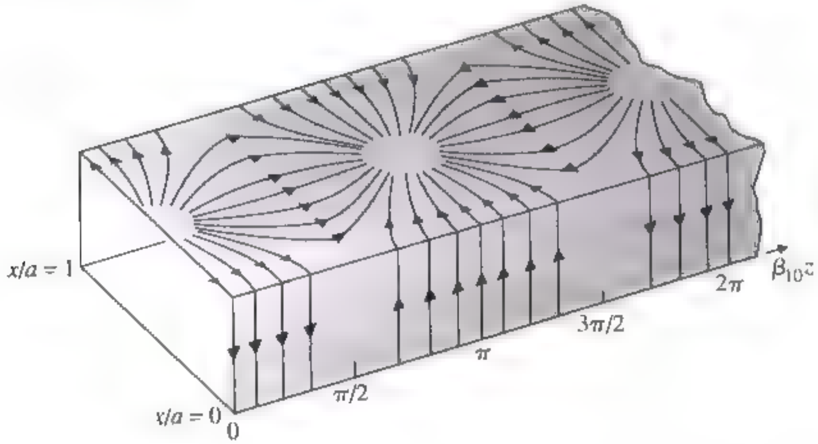


FIGURA 9-6 Corrientes superficiales en las paredes de la guía para el modo TE $_{0}$ en una guía de ondas rectangular.

sólo tenemos E_y y H_x y ambos varían senoidalmente con βz. En la figura 9-5(b) aparece un diagrama de E_y y H_x en $t = 0$.

El diagrama en un plano xz ilustrará las tres componentes de campo distintas de cero: E_y, H_x y H_z. La pendiente de las líneas **H** en $t = 0$ está regida por la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{\mathbf{H}} = \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)\tan\left(\frac{\pi}{a}x\right)\tan\beta z, \tag{9-90}$$

que puede usarse para dibujar las líneas **H** de la figura 9-5(c). Estas líneas son independientes de y.

c) La densidad de corriente superficial por sobre las paredes de la guía, $\mathbf{J}_s$, está relacionada con la intensidad de campo magnético a través de la ecuación (6-47b):

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H}, \tag{9-91}$$

donde $\mathbf{a}_n$ es la normal *hacia afuera* de la superficie de la pared y **H** es la intensidad de campo magnético en la pared. En $t = 0$ se tiene

$$\mathbf{J}_s(x = 0) = -\mathbf{a}_y H_z(0, y, z; 0) = -\mathbf{a}_y H_0 \cos\beta z, \tag{9-92}$$

$$\mathbf{J}_s(x = a) = \mathbf{a}_y H_z(a, y, z; 0) = \mathbf{J}_s(x = 0), \tag{9-93}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_s(y = 0) &= \mathbf{a}_x H_z(x, 0, z; 0) - \mathbf{a}_z H_x(x, 0, z; 0)\\ &= \mathbf{a}_x H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\beta z - \mathbf{a}_z \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\beta z,\end{aligned} \tag{9-94}$$

$$\mathbf{J}_s(y = b) = -\mathbf{J}_s(y = 0). \tag{9-95}$$

En la figura 9-6 se ilustran las corrientes superficiales sobre las paredes internas en $x = 0$ y $y = b$.

■ **EJERCICIO 9.7** A medida que las ondas se propagan por una guía de ondas, se depositan cargas en la superficie interior de sus paredes. Encuentre la expresión de las distribuciones de cargas superficiales

a) a lo largo de las líneas centrales sobre las paredes superior e inferior, y
b) a lo largo de las paredes laterales para el modo TE_{10} en $t = 0$.

RESPUESTA: (a) $\rho_s = (\omega\mu\epsilon a/\pi)H_0$ sen $\beta_{10}z$ (C/m²) sobre la pared superior, (b) 0

EJEMPLO 9-6

Se han diseñado guías de ondas rectangulares estándar, rellenas de aire, para las bandas de radar listadas en la tabla 6-4. Las dimensiones interiores de una guía de ondas adecuada para aplicaciones en banda X son. $a = 2.29$ cm (0.90 pulg) y $b = 1.02$ cm (0.40 pulg). Si se desea que la guía de ondas opere únicamente en el modo dominante TE_{10} y que la frecuencia de operación sea al menos un 25% superior a la frecuencia de corte del modo TE_{10}, pero no mayor que el 95% de la siguiente frecuencia de corte más alta, ¿cuál es el intervalo de frecuencias de operación permitidas?

SOLUCIÓN

Si $a = 2.29 \times 10^{-2}$ (m) y $b = 1.02 \times 10^{-2}$ (m), los dos modos con menor frecuencia de corte son TE_{10} y TE_{20}. Usamos la ecuación (9-68) para encontrar

$$(f_c)_{10} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 2.29 \times 10^{-2}} = 6.55 \times 10^9 \quad \text{(Hz)},$$

$$(f_c)_{20} = \frac{c}{a} = 13.10 \times 10^9 \quad \text{(Hz)}.$$

Por lo tanto, el intervalo de frecuencias de operación permitidas en las condiciones especificadas es

$$1.25(f_c)_{TE_{10}} \leq f \leq 0.95(f_c)_{TE_{10}}$$

o

$$8.19 \text{ (GHz)} \leq f \leq 12.45 \text{ (GHz)}.$$

9-3.3 ATENUACIÓN EN GUÍAS DE ONDAS RECTANGULARES

Causas de la atenuación en las guías de ondas

La atenuación en una guía de ondas se origina de dos fuentes: dieléctrico con pérdidas o paredes que no son conductores perfectos. Las pérdidas modifican los campos eléctricos y magnéticos en la guía, dificultando la obtención de soluciones exactas. Sin embargo, las pérdidas en las guías de ondas prácticas por lo general son muy pequeñas y podemos suponer que las distribuciones de campos transversales de los modos de propagación no son afectadas de manera apreciable por dichas pérdidas. Una parte real de la constante de propagación aparecerá ahora como la constante de atenuación, que considera las pérdidas de potencia. La constante de atenuación consiste en dos partes:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c, \tag{9-96}$$

donde α_d es la constante de atenuación por pérdidas en el dieléctrico y α_c es la que se debe a pérdidas de potencia óhmica en las paredes conductoras imperfectas. La determinación analítica de α_d y α_c es algo tediosa, y aquí sólo describiremos el procedimiento general para determinarlas.

Para hallar α_d, recordamos que en la sección 7-3 se explicó que podemos estudiar los efectos de un dieléctrico con pérdidas sobre la propagación de ondas considerando una permitividad compleja

$$\begin{aligned}\epsilon_d &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ &= \epsilon' - j\frac{\sigma_d}{\omega},\end{aligned} \tag{9-97}$$

La atenuación debida a un dieléctrico con pérdidas aumenta con la conductividad del dieléctrico y con la frecuencia.

donde $\epsilon''/\epsilon' = \sigma_d/\omega\epsilon'$ es la tangente de pérdidas y σ_d es la conductividad equivalente del dieléctrico. Si se usa ϵ_d en lugar de ϵ en la ecuación (9-24) se producirá una constante de propagación compleja γ, cuya parte real es α_d. Podrá verse que α_d es directamente proporcional a σ_d y disminuye con la razón (f_c/f).

Para hallar α_c se usa la ecuación (8-57), derivada de la ley de la conservación de la energía,

$$\alpha_c = \frac{P_L(z)}{2P(z)}, \tag{9-98}$$

La atenuación debida a la conductividad finita de las paredes es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la conductividad de la pared, pero depende de manera complicada del modo y de la frecuencia.

donde $P(z)$ es la potencia media temporal que se propaga por la guía en la posición z y $P_L(z)$ es la pérdida de potencia media temporal por unidad de longitud en la posición z. Podemos determinar $P(z)$ a partir de las intensidades de campos transversales eléctricos y magnéticos, usando la ecuación (7-79). Para calcular $P_L(z)$ es necesario considerar la pérdida de potencia en las cuatro paredes de la guía, ocasionada por una conductividad finita σ_c. Esto requiere la integración de $|J_s|^2R_s$ sobre las superficies interiores por unidad de longitud de las paredes, donde J_s y R_s denotan, respectivamente, la densidad de corriente superficial sobre las paredes conductoras y su resistencia intrínseca (véase la Ec. 7-53). Las expresiones de α_c para TM_{mn} y TE_{mn} son diferentes debido a la diferencia en las distribuciones de corrientes. Dependen de forma complicada de las dimensiones de la guía y de la razón (f_c/f). α es directamente proporcional a R_s para todos los modos; a su vez, R_s es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la conductividad de las paredes σ_c. Es evidente que α_c será igual a cero (no hay pérdida de potencia) si las paredes de la guía son infinitamente conductoras ($\sigma_c \rightarrow \infty$).

El modo TE_{10} tiene la atenuación más baja en una guía de ondas rectangular.

En la figura 9-7 aparecen representadas gráficamente las curvas genéricas de α_c en función de la frecuencia de operación f para los modos TE_{10} y TM_{11} en una guía de ondas rectangular de cobre de 2.29 (cm) por 1.02 (cm). De la ecuación (9-68) encontramos que $(f_c)_{10} = 6.55$ (GHz) y que $(f_c)_{11} = 16.10$ (GHz). Estas curvas muestran que la constante de atenuación aumenta rápidamente hacia el infinito conforme la frecuencia de operación se aproxima a la frecuencia de corte. Ambas curvas poseen un mínimo amplio en el intervalo de operación ($f > f_c$). La constante de atenuación del modo TE_{10} siempre es menor que la del modo TM_{11}. Estos hechos tienen una importancia directa en la elección de las frecuencias y de los modos de operación

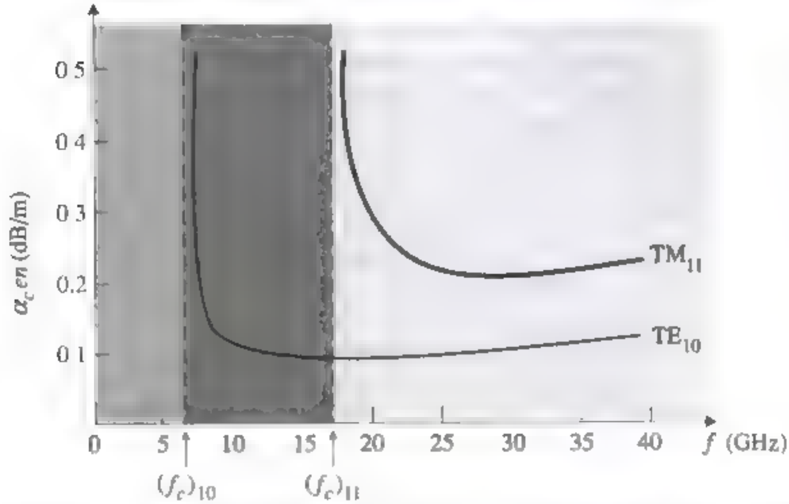


FIGURA 9-7 Atenuación debida a las pérdidas en las paredes de una guía de ondas rectangular de cobre para los modos TE_{10} y TM_{11}, $a = 2.29$ (cm), $b = 1.02$ (cm).

EJEMPLO 9-7

Una guía de ondas rectangular de 5.0 (cm) por 2.5 (cm), rellena de aire, tiene 0.8 (m) de longitud y debe suministrar 1.2 (kW) a una carga adaptada a 4.5 (GHz). Suponga que la constante de atenuación es de 0.05 (dB/m) y calcule (a) la potencia media de entrada requerida para la guía de ondas, (b) la cantidad total de potencia disipada en las paredes de la guía de ondas y (c) el valor máximo de la intensidad eléctrica dentro de la guía.

SOLUCIÓN

Dado: $a = 5.0 \times 10^{-2}$ (m), $b = 2.5 \times 10^{-2}$ (m).

$$(f_c)_{10} \text{ del modo dominante} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 5.0 \times 10^{-2}}$$
$$= 3 \times 10^9 \text{ (Hz)} = 3 \text{ (GHz)}.$$

Los modos más altos que le siguen son TE_{20} y TE_{01}, ambos con frecuencia de corte de 6 (GHz) > 4.5 (GHz). Por lo tanto, el único modo de propagación a 4.5 (GHz) es el modo TE_{10}.

a) $\alpha = 5 \times 10^{-2}$ (dB/m) $= 5.75 \times 10^{-3}$ (Np/m).

$$P_{ent} = P_{carga} e^{2\alpha\ell} = 1.2 \times 10^3 e^{2 \times (5.75 \times 10^{-3}) \times 0.8}$$
$$= 1.2 \times 10^3 e^{0.0092} = 1211 \quad \text{(W)}.$$

b) Potencia disipada $= P_{ent} - P_{carga}$

$$= 1211 - 1200 = 11 \quad \text{(W)}.$$

c) Las expresiones fasoriales de las componentes de los campos transversales para el modo TE_{10} pueden escribirse a partir de las ecuaciones (9-84) y (9-86) como

$$E_y^0 = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\right) x \tag{9-99}$$

y

$$H_x^0 = -\frac{E_0}{\eta_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right), \tag{9-100}$$

donde $\eta_0 - \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ y β_{10} en la ecuación (9-86) se ha escrito como $\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ $\sqrt{1-(f_c/f)^2}$ véase la Ec. 9-38). Puesto que los campos máximos ocurren en el extremo de entrada, a partir de la ecuación (7-79) tenemos

$$\begin{aligned} P_{\text{ent}} &= -\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a E_y^0 H_x^0\, dx\, dy \\ &= \frac{E_0^2 ab}{4\eta_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}. \end{aligned} \tag{9-101}$$ †

Si se sustituyen los números en la ecuación (9-101) se obtiene lo siguiente:

$$1211 = \frac{E_0^2(5.0\times 10^{-2})(2.5\times 10^{-2})}{4\times 377}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4.5}\right)^2},$$

de donde se obtiene

$E_0 = 44\,283$ (V/m).

PREGUNTAS DE REPASO

P.9-12 Explique el método de separación de variables para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

P.9-13 ¿Qué significa el *modo dominante* de una guía de ondas? ¿Cuál es el modo dominante de una guía de ondas de placas paralelas?

P.9-14 Enuncie las condiciones en la frontera que debe satisfacer E_z para las ondas TM en una guía de ondas rectangular.

P.9-15 ¿Cuál es el modo TM que tiene la frecuencia de corte más baja de todos los modos TM en una guía de ondas rectangular?

P.9-16 Enuncie las condiciones en la frontera que debe satisfacer H_z para las ondas TE en una guía de ondas rectangular.

† A partir de la ecuación (7-79),

$$P_{\text{ent}} = \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a \mathcal{R}e(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{a}_z\, dx\, dy,$$

donde $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_y^0$ y $\mathbf{H} = \mathbf{a}_x H_x^0 + \mathbf{a}_z H_z^0$. Por lo tanto, $\mathcal{R}e(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = -\mathbf{a}_z E_y^0 H_x^0$, ya que H_z^0 está 90° fuera de fase con respecto a E_y^0 y su producto no tiene parte real

P.9-17 ¿Cuál es el modo dominante en una guía de ondas rectangular si (a) $a > b$, (b) $a < b$ y (c) $a = b$?

P.9-18 ¿Cuál es la longitud de onda de corte del modo TE_{10} en una guía de ondas rectangular si $a > b$?

P.9-19 ¿Cuáles son las componentes del campo distintas de cero para el modo TE_{10} en una guía de ondas rectangular?

P.9-20 ¿Por qué tiene especial importancia práctica el modo TE_{10} en las guías de ondas rectangulares?

P.9-21 ¿Por qué no se usan guías de ondas para VHF y bandas de frecuencias más bajas?

■ **EJERCICIO 9.8** Encuentre la cantidad máxima de potencia media a 10 (GHz) que puede transmitirse sin ruptura en el modo TE_{10} por una guía de ondas rectangular rellena de aire de dimensiones $a = 2.25$ (cm), $b = 1.00$ (cm)

COMENTARIOS

1. Hay una cantidad doblemente infinita de modos TE y TM en una guía de ondas.
2. Los valores característicos de los modos TM y TE en las guías de ondas rectangulares son números discretos reales.
3. Las frecuencias de corte de los modos TM_{mn} y TE_{mn} son las mismas.
4. Las frecuencias de corte son inversamente proporcionales a $\sqrt{\epsilon_r}$ del medio dieléctrico.
5. El modo TM de menor grado en una guía de ondas rectangular es TM_{11}.
6. El modo dominante en una guía de ondas rectangular con $a > b$ es el TE_{10}, cuya longitud de onda de corte es $2a$.
7. El modo TE_{10} en una guía de ondas rectangular tiene la menor constante de atenuación por pérdidas en las paredes.
8. La constante de atenuación por pérdidas en las paredes de una guía de ondas es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la conductividad de las paredes.

9-4 OTROS TIPOS DE GUÍAS DE ONDAS

En la sección 9-2 vimos que el procedimiento usado para analizar el comportamiento de las ondas en una guía de ondas uniforme comenzaba con la solución de una ecuación vectorial homogénea de Helmholtz en el plano de la sección transversal de la guía. Una solución completa depende de la forma y de las dimensiones de la sección transversal. En la sección 9-3 seguimos este procedimiento para obtener las características de operación de las guías de ondas rectangulares. En esta sección analizaremos brevemente otros tipos de guía de ondas que también tienen aplicaciones prácticas

En primer lugar mencionaremos las guías de ondas circulares huecas, que de hecho son tubos metálicos redondos. Un análisis completo del comportamiento de las ondas en una guía de ondas circular implica la resolución de una ecuación bidimensional de Helmholtz en la sección transversal circular de la guía, en coordenadas polares (r, ϕ). A su vez, para esto se requieren conocimientos de la ecuación diferencial de Bessel y de las funciones de Bessel. No intentaremos obtener esta solución en este libro, excepto para señalar que, al igual que en las guías de ondas rectangulares, pueden existir modos TM y TE con frecuencias de corte características.

Las láminas dieléctricas y las barras sin paredes conductoras también pueden propagar modos TM y TE de ondas guiadas confinadas fundamentalmente al medio dieléctrico. Los campos decrecen exponencialmente fuera del medio guía. Son campos de dispersión y pueden causar problemas de interferencias en circuitos vecinos.

Las fibras ópticas son guías de ondas a frecuencias ópticas. Son flexibles, y tienen una atenuación muy baja y un ancho de banda muy grande.

Un tipo de guía de ondas de gran importancia a frecuencias ópticas consiste en una fibra muy fina de material dieléctrico, por lo general vidrio, revestida con un material que tiene un índice de refracción ligeramente menor. Estas guías de ondas ópticas se conocen como ***fibras ópticas***; en la figura 7-18 se ilustró una fibra óptica revestida. Podemos explicar el funcionamiento de una fibra óptica en términos de la reflexión interna total, como se hizo en el ejemplo 7-10 correspondiente a la figura 7-13. El diámetro del núcleo de las fibras ópticas por lo general mide entre 25 y 100 (μm) y a frecuencias infrarrojas puede lograrse una atenuación tan baja como 1/4 (dB km). Comparada con una atenuación de unos 30 (dB/km) para las guías de ondas metálicas huecas y cientos de dB/km para los cables coaxiales ordinarios, es evidente que esta característica de baja atenuación es una enorme ventaja de las fibras ópticas. Además, el ancho de banda disponible a frecuencias infrarrojas es tal que un solo circuito de fibras ópticas puede manejar cerca de 20 millones de canales telefónicos o 20 000 canales de televisión.

Las fibras ópticas son tan finas y flexibles como un cabello, y se pueden agrupar miles de ellas para formar una parte importante de un endoscopio, instrumento médico para examinar el interior de un órgano hueco del cuerpo humano, como los bronquios, el colon, la vejiga, etcétera. Las imágenes se transmiten eficazmente a través de las guías de ondas ópticas.

9-5 CAVIDADES RESONANTES

Las cavidades resonantes son cajas metálicas cerradas.

Ya señalamos que es difícil fabricar elementos de circuito concentrados ordinarios, como R, L y C, a frecuencias de microondas, y que los campos de dispersión se hacen importantes. Los circuitos con dimensiones comparables a la longitud de onda de operación se convierten en radiadores eficientes e interfieren con otros circuitos y sistemas. Así mismo, los circuitos convencionales hechos de alambres tienden a tener mayor resistencia eficaz por la pérdida de energía a través de radiaciones y como resultado

Los campos electromagnéticos están confinados dentro de la caja Se eliminan los efectos de radiación y alta resistencia, produciendo una Q muy elevada.

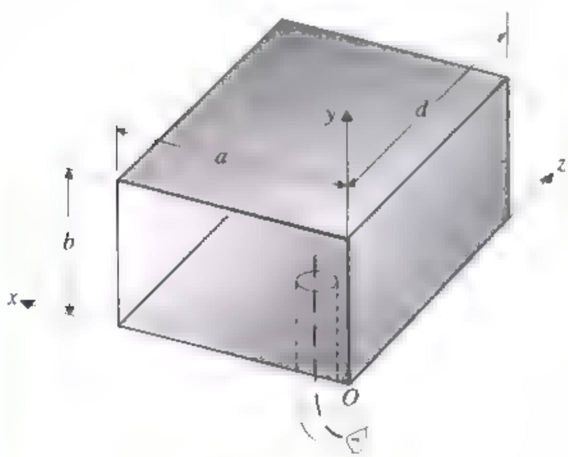
del efecto de penetración. Para lograr un circuito resonante en UHF y frecuencias más altas es necesario acudir a una cavidad completamente rodeada por paredes conductoras. Esta cavidad blindada confina los campos electromagnéticos en el interior y ofrece amplias áreas para el flujo de corriente, eliminando así la radiación y los efectos de alta resistencia. Estas cavidades, que tienen frecuencias resonantes naturales y un Q (factor de calidad) muy alto, se conocen como ***cavidades resonantes***.

9-5.1 CAVIDADES RESONANTES RECTANGULARES

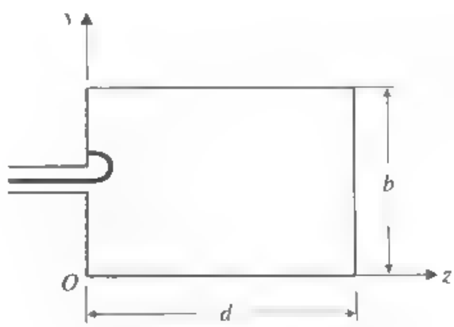
Considere una guía de ondas rectangular con los dos extremos cerrados por una pared conductora. Las dimensiones interiores de la cavidad son a, b y d, como puede verse en la figura 9-8. Dejemos a un lado por el momento la parte de la figura de la excitación por una sonda. Como los modos TM y TE pueden existir en una guía rectangular, es de esperar que también existan estos modos en una cavidad resonante rectangular. Sin embargo, la designación de modos TM y TE en una cavidad resonante *no es única* porque tenemos la libertad de elegir x, y o z como "dirección de propagación"; es decir, no hay una "dirección longitudinal única". Por ejemplo, un modo TE con respecto al eje z puede ser un modo TM con respecto al eje y.

Para nuestros fines *elegimos el eje z como referencia* de la "dirección de propagación" En realidad, la existencia de paredes conductoras en $z = 0$ y $z = d$ genera reflexiones múltiples y crea ondas estacionarias; las ondas no se propagan en una cavidad cerrada Se requiere un subíndice de tres símbolos (***mnp***) para designar una distribución de onda estacionaria TM o TE en una cavidad resonante.

FIGURA 9-8 Excitación de los modos en la cavidad con una línea coaxial



(a) Excitación por sonda.



(b) Excitación por bucle.

(A) Modos TM_{mnp}

En las ecuaciones (9-52) y (9-65) se presentó la expresión fasorial para la única componente longitudinal, $E_z(x, y, z) = E_z^0(x, y)e^{-\gamma z}$, de los modos TM_{mn} en una guía de ondas. Note que la variación longitudinal de una onda que se propaga en la dirección $+z$ está descrita por el factor $e^{-\gamma z}$ o $e^{-j\beta z}$. Esta onda se reflejará en la pared en $z = d$, y la onda reflejada, que va en la dirección $-z$, está descrita por el factor $e^{j\beta z}$. La superposición de un término con $e^{-j\beta z}$ y otro de igual amplitud con $e^{j\beta z}$ produce una onda estacionaria de tipo sen βz o cos βz. ¿De qué tipo debería ser? La respuesta a esta pregunta depende de la componente particular del campo.

Considere la componente transversal $E_y(x, y, z)$. Las condiciones en la frontera en las superficies conductoras requieren que sea cero en $z = 0$ y $z = d$. Esto significa que (1) su dependencia con z debe ser del tipo sen βz y que (2) $\beta = p\pi/d$. El mismo argumento se aplica a la otra componente del campo transversal eléctrico, $E_x(x, y, z)$. Las relaciones entre las componentes transversales, E_x^0 y E_y^0, y E_z^0 se presentaron en las ecuaciones (9-13) y (9-14), donde H_z^0 es nula para los modos TM. Recordemos que la presencia del factor $(-\gamma)$ en las ecuaciones (9-13) y (9-14) es el resultado de una diferenciación con respecto a z. Entonces, si $E_y(x, y, z)$ depende de sen βz, a partir de la ecuación (9-14), que contiene el factor $(-\gamma)$, podemos llegar a la conclusión de que $E_z(x, y, z)$ debe variar de acuerdo con cos βz. Para el modo TM_{mnp} tenemos

Para los modos TM_{mnp}, $m \neq 0$ y $n \neq 0$

$$E_z(x, y, z) = E_z^0(x, y)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right). \tag{9-102}$$

Las demás componentes del campo se escriben usando E_z en las ecuaciones (9-11) a (9-14), notando que la multiplicación por $(-\gamma)$ representa una diferenciación parcial con respecto a z.

Si se sustituye $\beta = p\pi/d$ en la ecuación (9-67) se obtiene la frecuencia resonante de los modos TM_{mnp} $(u = 1/\sqrt{\mu\epsilon})$:

Frecuencia resonante de una cavidad resonante

$$\boxed{f_{mnp} = \frac{u}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2} \qquad \text{(Hz)}.} \tag{9-103}$$

La ecuación (9-103) enuncia el hecho evidente de que la frecuencia resonante aumenta al elevarse el orden del modo.

(B) Modos TE_{mnp}

Las expresiones fasoriales para las componentes de la onda estacionaria de los modos TE_{mnp} $(E_z = 0)$ se escriben a partir de las ecuaciones (9-76) y (9-77) a (9-80). Se siguen las mismas reglas utilizadas para los modos TM_{mnp}, a saber, (1) las componentes del campo transversal eléctrico (tangencial) deben desaparecer en $z = 0$ y $z = d$ y (2) el factor γ indica una diferenciación parcial negativa con respecto a z. Para la primera regla se requiere un factor sen $(p\pi z/d)$ en $E_x(x, y, z)$,

$E_y(x, y, z)$ y $H_z(x, y, z)$; la segunda regla indica un factor cos ($p\pi z/d$) en $H_x(x, y, z)$ y $H_y(x, y, z)$. Tenemos

Para los modos TE_{mnp}, $p \neq 0$; m y n no son ambos igual a cero

$$H_z(x, y, z) = H_z^0(x, y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{d} z\right)$$

$$= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \tag{9-104}$$

Las demás componentes del campo se escriben usando H_z en las ecuaciones (9-11) a (9-14) y observando que la multiplicación por $(-\gamma)$ significa una diferenciación parcial con respecto a z.

La expresión de la frecuencia resonante, f_{mnp}, es la misma que se obtuvo para los modos TM_{mnp} (Ec.(9-103)). Los modos distintos que tienen la misma frecuencia resonante se denominan ***modos degenerados***. De esta manera, los modos TM_{mnp} y TE_{mnp} siempre son degenerados si ninguno de los índices del modo es cero El modo con menor frecuencia resonante para un tamaño dado de la cavidad se conoce como ***modo dominante*** (véase el ejemplo 9-8)

Modos degenerados

Un modo determinado en una cavidad resonante (o en una guía de ondas) puede excitarse a partir de una línea coaxial usando una pequeña sonda o una antena de bucle En la figura 9-8(a) se muestra una sonda que consiste en la punta del conductor interno de un cable coaxial, la sonda está situada en la cavidad en el lugar donde el campo eléctrico es máximo para el modo deseado Esta sonda es de hecho una antena que acopla la energía electromagnética a la cavidad resonante. Como alternativa, podemos excitar la cavidad resonante introduciendo una pequeña espira en un lugar donde el flujo magnético del modo deseado ligado a la espira sea máximo. En la figura 9-8(b) se ilustra esta disposición. Por supuesto, la frecuencia de la señal en la línea coaxial debe ser igual a la frecuencia resonante del modo deseado en la cavidad.

Una cavidad resonante puede excitarse con una sonda pequeña o con un bucle.

Como ejemplo, para el modo TE_{101} en una cavidad rectangular de $a \times b \times d$ sólo hay tres componentes del campo distintas de cero:

$$E_y = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} H_0 \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{d} z\right), \tag{9-105}$$

$$H_x = -\frac{a}{d} H_0 \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{d} z\right), \tag{9-106}$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{d} z\right). \tag{9-107}$$

Podemos excitar este modo introduciendo una sonda en la región central de la cara superior o la inferior, donde E_y tiene valor máximo, como se muestra en la figura 9-8(a), o introduciendo una espira en la cara anterior o posterior para acoplar el valor máximo de H_x, como puede verse en la figura 9-8(b) El mejor lugar para colocar una sonda o una espira depende de los requisitos de adaptación de impedancias del circuito de microondas del cual forma parte la cavidad resonante

Una cavidad resonante también puede excitarse por medio de un iris.

Un método común para acoplar la energía de una guía de ondas a una cavidad resonante es introducir un agujero o un iris en la posición apropiada en la pared de la cavidad El campo en la guía de ondas en el agujero debe tener una componente que sea favorable para la excitación del modo deseado en la cavidad resonante.

EJEMPLO 9-8

Determine los modos dominantes y sus frecuencias en una cavidad resonante rectangular rellena con aire para los casos (a) $a > b > d$, (b) $a > d > b$ y (c) $a = b = d$, donde a, b y d son las dimensiones en las direcciones x, y y z, respectivamente.

SOLUCIÓN

Como siempre, elegimos el eje z como "dirección de propagación" de referencia. La ecuación (9-102) nos dice que en los modos TM_{mnp} ni m ni n pueden ser cero, pero que p sí puede serlo. La ecuación (9-104) indica que, en los modos TM_{mnp}, H_z no se anula incluso si m y n son cero, siempre y cuando p no sea cero. Sin embargo, si H_z es independiente de x y y, las ecuaciones (9-11) a (9-14) indican que no habrá componente transversal del campo. Entonces, p no puede ser cero en los modos TE_{mnp} y m o n (pero no ambos) puede ser cero.

Los modos de menor orden en una cavidad resonante rectangular son

TM_{110}, TE_{011} y TE_{101}.

La frecuencia resonante de los modos TM y TE está dada por la ecuación (9-103)

a) Si $a > b > d$, la frecuencia resonante más baja es

$$f_{110} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \tag{9-108}$$

donde c es la velocidad de la luz en el espacio libre. Por lo tanto, TM_{110} es el modo dominante.

b) Si $a > d > b$, la frecuencia resonante más baja es

$$f_{101} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}}, \tag{9-109}$$

y TE_{101} es el modo dominante.

c) Si $a = b = d$, los tres modos de menor orden (TM_{110}, TE_{011} y TE_{101}) tienen las mismas distribuciones de campo. La frecuencia resonante de estos modos degenerados es

$$f_{110} = \frac{c}{\sqrt{2}a}. \tag{9-110}$$

■ **EJERCICIO 9.9** Determine las cuatro frecuencias resonantes más bajas de una cavidad resonante rectangular de 2.5 (cm) por 1.5 (cm) por 5.0 (cm) rellena de aire; identifique sus modos.

RESPUESTA: 6.71, 8.49, 10.44, 11.66 (GHz).

9-5.2 FACTOR DE CALIDAD DE LAS CAVIDADES RESONANTES

Una cavidad resonante almacena energía en los campos eléctrico y magnético para cualquier configuración particular de un modo. Toda cavidad resonante práctica tiene paredes con conductividad finita (resistencia superficial distinta de cero) y la pérdida de potencia resultante ocasiona una disminución de la energía almacenada. El ***factor de calidad***, Q, de una cavidad resonante, como el de cualquier circuito resonante, es una medida del ancho de banda de la cavidad resonante y se define como

Definición de Q de una cavidad resonante

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\text{Energía media temporal almacenada a una frecuencia resonante}}{\text{Energía disipada en un periodo de esta frecuencia}} \quad \text{(Sin dimensiones).}} \tag{9-111}$$

Sea W la energía media temporal total en una cavidad resonante. Escribimos

$$W = W_e + W_m, \tag{9-112}$$

donde W_e y W_m denotan las energías almacenadas en los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Si P_L es la potencia media temporal disipada en la cavidad, entonces la energía disipada en un periodo es P_L dividido por la frecuencia y podemos escribir la ecuación (9-111) como

Fórmula para calcular la Q de una cavidad resonante

$$\boxed{Q = \frac{\omega W}{P_L} \qquad \text{(Sin dimensiones).}} \tag{9-113}$$

Al determinar la Q de una cavidad a una frecuencia resonante, lo habitual es suponer que la pérdida es tan pequeña que permitirá el uso de las distribuciones de campo cuando no hay pérdidas.

A continuación determinaremos la Q de una cavidad $a \times b \times d$ del modo TE_{101} que tiene tres componentes del campo distintas de cero, definidas por las ecuaciones (9-105), (9-106) y (9-107). La energía eléctrica media temporal almacenada es

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\epsilon_0}{4}\int |E_y|^2\, dv \\ &= \frac{\epsilon_0 \omega_{101}^2 \mu_0^2 a^2}{4\pi^2} H_0^2 \int_0^d \int_0^b \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{d}z\right) dx\, dy\, dz \\ &= \frac{\epsilon_0 \omega_{101}^2 \mu_0^2 a^2}{4\pi^2} H_0^2 \left(\frac{a}{2}\right) b \left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{4}\epsilon_0 \mu_0^2 a^3 b d f_{101}^2 H_0^2. \end{aligned} \tag{9-114}$$

La energía magnética media temporal total almacenada es

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{\mu_0}{4}\int \{|H_x|^2 + |H_z|^2\}\,dv\\&= \frac{\mu_0}{4}H_0^2\int_0^d\int_0^b\int_0^a \left\{\frac{a^2}{d^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{d}z\right)\right.\\&\qquad\left. + \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{d}z\right)\right\}dx\,dy\,dz\\&= \frac{\mu_0}{4}H_0^2\left\{\frac{a^2}{d^2}\left(\frac{a}{2}\right)b\left(\frac{d}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right)b\left(\frac{d}{2}\right)\right\} = \frac{\mu_0}{16}abd\left(\frac{a^2}{d^2}+1\right)H_0^2\end{aligned} \tag{9-115}$$

A partir de la ecuación (9-103), la frecuencia resonante del modo TE_{101} es

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{d^2}}. \tag{9-116}$$

Si en la ecuación (9-114) se sustituye f_{101} de la ecuación (9-116), se demuestra que, *a la frecuencia resonante*, $W_e = W_m$. Por lo tanto,

$$W = 2W_e = 2W_m = \frac{\mu_0 H_0^2}{8}abd\left(\frac{a^2}{d^2}+1\right). \tag{9-117}$$

Para hallar P_L, observe que la pérdida de potencia por unidad de área es

$$\mathscr{P}_{av} = \tfrac{1}{2}|J_s|^2 R_s = \tfrac{1}{2}|H_t|^2 R_s, \tag{9-118}$$

donde $|H_t|$ denota la magnitud de la componente tangencial del campo magnético en las paredes de la cavidad. La pérdida de potencia en la pared $z = d$ (posterior) es igual que en la pared $z = 0$ (anterior). Así mismo, la pérdida de potencia en la pared $x = a$ (izquierda) es la misma que en la pared $x = 0$ (derecha); la pérdida de potencia en la pared $y = b$ (superior) es igual que en la pared $y = 0$ (inferior). Tenemos

$$\begin{aligned}P_L &= \oint \mathscr{P}_{av}\,ds = R_s\left\{\int_0^b\int_0^a |H_x(z=0)|^2\,dx\,dy + \int_0^d\int_0^b |H_z(x=0)|^2\,dy\,dz\right.\\&\qquad\left. + \int_0^d\int_0^a |H_x|^2\,dx\,dz + \int_0^d\int_0^a |H_z|^2\,dx\,dz\right\}\\&= \frac{R_s H_0^2}{2}\left\{\frac{a^2}{d}\left(\frac{b}{d}+\frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{9-119}$$

Usamos las ecuaciones (9-117) y (9-119) en la ecuación (9-113) para obtener

$$Q_{101} = \frac{\pi f_{101}\mu_0 abd(a^2+d^2)}{R_s[2b(a^3+d^3)+ad(a^2+d^2)]} \qquad (\text{modo } TE_{101}), \tag{9-120}$$

donde f_{101} está dada por la ecuación (9-116).

■ **EJERCICIO 9.10** La energía total almacenada, W, en una cavidad con pérdidas decrece exponencialmente con el factor $e^{-2\alpha t}$ y la razón de cambio de W con el tiempo es igual a la potencia, P_L, disipada en las paredes de la cavidad. Demuestre que la constante de atenuación α está relacionada con la cavidad Q por medio de la fórmula $\alpha = \omega/2Q$.

EJEMPLO 9-9

a) ¿Cuál debe ser el tamaño de una cavidad cúbica hecha de cobre para que tenga una frecuencia resonante dominante de 10 (GHz)?

b) Encuentre Q a dicha frecuencia.

SOLUCIÓN

a) Para una cavidad cúbica, $a = b = d$. A partir del apartado (c) del ejemplo 9-8, sabemos que TM_{110}, TE_{011} y TE_{101} son modos dominantes degenerados con las mismas distribuciones de campo; sabemos además que

$$f_{101} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2}a} = 10^{10} \quad \text{(Hz)}.$$

Por consiguiente,

$$a = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2} \times 10^{10}} = 2.12 \times 10^{-2} \quad \text{(m)}$$

$$= 21.2 \quad \text{(mm)}.$$

b) La expresión de Q en la ecuación (9-120), correspondiente a una cavidad cubica, se reduce a

$$Q_{101} = \frac{\pi f_{101} \mu_0 a}{3R_s} = \frac{a}{3}\sqrt{\pi f_{101} \mu_0 \sigma}. \tag{9-121}$$

El valor de σ para el cobre es de 5.80×10^7 (S/m), tenemos entonces

$$Q_{101} = \left(\frac{2.12}{3} \times 10^{-2}\right)\sqrt{\pi 10^{10}(4\pi 10^{-7})(5.80 \times 10^7)} = 10{,}693.$$

La Q de una cavidad resonante es sumamente alta en comparación con la que se obtiene en los circuitos resonantes LC concentrados. El valor anterior es algo menor en la práctica, por las pérdidas a través de las conexiones de alimentación y las irregularidades de la superficie.

Una cavidad resonante con una Q alta tiene un ancho de banda muy estrecho.

De la teoría de circuitos sabemos que la variable de respuesta (voltaje o corriente) en un circuito resonante es máxima a la frecuencia resonante y disminuye de forma pronunciada en un circuito de Q alta a medida que la frecuencia se desvía, por ambos lados, con respecto a la frecuencia resonante. Por esto, una cavidad resonante de Q alta es muy selectiva y tiene un ancho de banda muy estrecho.

■ **EJERCICIO 9.11** Suponiendo que la cavidad cúbica del ejemplo 9-9 está hecha de bronce y rellena con un material dieléctrico ($\epsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$), determine

a) la frecuencia resonante más baja, y

b) el factor de calidad Q

RESPUESTA: 5.78 (GHz), (b) 4230.

PREGUNTAS DE REPASO

P.9-22 ¿Qué son las cavidades resonantes? ¿Cuáles son sus propiedades más deseables?

P.9-23 ¿Son ondas que se propagan u ondas estacionarias las distribuciones de campo en una cavidad resonante? ¿Cómo difieren de las distribuciones en una guía de ondas?

P.9-24 Haciendo referencia al eje z, diga cuáles de los modos siguientes no pueden existir en una cavidad resonante rectangular $TM_{0\ 1}$, $TM_{\ 0}$, $TM_{\ \ 0}$, TE_{01}, TE_{101}, TE_{110} Explique por qué.

P.9-25 ¿Qué se quiere decir con *modos degenerados*?

P.9-26 Defina el factor de calidad, Q, de una cavidad resonante.

P.9-27 ¿Cuál es la suposición fundamental que se hace al obtener las fórmulas para la Q de las cavidades resonantes?

P.9-28 Explique por qué la Q medida en una cavidad resonante es menor que su valor calculado.

COMENTARIOS

1. Los modos TM_{mnp} y TE_{mnp} ($m, n, p \neq 0$) en una cavidad resonante rectangular tienen las mismas frecuencias resonantes.
2. Los subíndices m, n y p denotan, respectivamente, el número de semilongitudes de onda de las variaciones de campo en las direcciones x, y y z.
3. La Q de una cavidad resonante es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la conductividad de las paredes.

RESUMEN

En este capítulo sobre guías de ondas y cavidades resonantes

- estudiamos el método para analizar el comportamiento de ondas en estructuras guía uniformes por medio de la resolución de ecuaciones vectoriales homogéneas de Helmholtz;
- examinamos las características generales de las ondas TM y TE,
- explicamos las propiedades de corte y pasaalto de las guías de ondas;
- analizamos las distribuciones de campos y corrientes del modo dominante $TE_{\ 0}$ en una guía de ondas rectangular;
- estudiamos el método para determinar la constante de atenuación de los modos que se propagan en una guía de ondas rectangular y mostramos curvas genéricas de α_c en función de la frecuencia, y

- explicamos los modos de ondas, determinamos las frecuencias resonantes y verificamos la propiedad de Q alta de las cavidades resonantes rectangulares.

PROBLEMAS

P.9-1 (a) Represente gráficamente las impedancias de la onda para una guía de ondas rellena de aire en función de la razón (f/f_c) para los modos TM y TE (b) Compare los valores de Z_{TM} y Z_{TE} para $f = 1.1f_c$ y $2.2f_c$.

P.9-2 Use las relaciones apropiadas presentadas en la sección 9-2 para las guías de ondas uniformes y

a) demuestre que el diagrama universal que relaciona u_g/u y f_c/f es un cuarto de círculo con radio unidad,

b) dibuje la gráfica universal de λ_g/λ en función de f/f_c,

c) calcule u_g/u, λ_g/λ y u_p/u para $f = 1.25f_c$.

P.9-3 Suponga que se envía una onda TE de frecuencia f en la dirección z por la guía de ondas de placas paralelas de la figura 9-3. El medio dieléctrico entre las placas tiene parámetros constitutivos ϵ y μ. (a) Encuentre la expresión fasorial de $H_z^0(y)$. Determine la frecuencia de corte del modo TE_1. (c) Escriba las expresiones instantáneas de todas las componentes del campo del modo TE_1.

P.9-4 Para la guía de ondas de placas paralelas rellena de aire de la figura 9-3,

a) obtenga las expresiones fasoriales de todas las componentes del campo para los modos TE,

b) determine la frecuencia de corte para el modo TE_n, y

c) encuentre las densidades superficiales de corriente sobre las placas conductoras. ¿Fluyen en la misma dirección las corrientes de las dos placas o lo hacen en direcciones opuestas?

P.9-5 La longitud de onda en la guía y la impedancia se pueden medir mediante un detector conectado a una prueba que se mueve por una sección ranurada de guía de ondas. Suponga que al colocar un plano conductor en cortocircuito en el extremo de carga de una guía de ondas rectangular hueca sin pérdidas de 2.50 (cm) por 1.25 (cm), que soporta el modo TE_{10}, los mínimos de voltaje adyacentes están a una distancia de 2.65 (cm). Al reemplazar el cortocircuito por una carga, la razón de onda estacionaria es 2.0 y los mínimos de voltaje se han desplazado 0.80 (cm) hacia la carga. Calcule (a) la frecuencia de operación, (b) la impedancia de la carga y (c) la potencia suministrada a la carga por una potencia de entrada de 10 (W).

P.9-6 Se tiene una guía de ondas rectangular rellena de aire, de dimensiones $a \times b$, que funciona a la frecuencia f en el modo TM_{11}. (a) Escriba las expresiones fasoriales de todas las componentes del campo y (b) encuentre f_c, λ_c y λ_g.

P.9-7 Una guía de ondas rectangular estándar de banda S, rellena de aire, tiene dimensiones $a = 7.21$ (cm) y $b = 3.40$ (cm). ¿Qué tipos de modos pueden usarse para transmitir ondas electromagnéticas que tienen las siguientes longitudes de onda?

a) $\lambda = 10$ (cm) y b) $\lambda = 5$ (cm).

P.9-8 Calcule y liste en orden ascendente las frecuencias de corte (en términos de la frecuencia de corte del modo dominante) de los modos siguientes en una guía de ondas rectangular de $a \times b$: TE_{01}, TE_{10}, TE_{02}, TE_{20}, TM_{11}, TM_{12} y TM_{22} (a) si $a = 2b$ y (b) si $a = b$.

P.9-9 Hay que construir una guía de ondas rectangular de $a \times b$ ($b < a < 2b$), rellena de aire, que opere a 3 (GHz) en el modo dominante. Deseamos que la frecuencia de operación sea al menos un 20% mayor que la frecuencia de corte del modo dominante y también un 20% menor que la frecuencia de corte del siguiente modo de orden mayor.

a) Presente un diseño genérico para las dimensiones a y b.

b) Calcule β, u_p, λ_g y la impedancia de la onda a la frecuencia de operación de su diseño.

P.9-10 Calcule y compare los valores de β, u_p, u_g, λ_g y Z_{TE} para una guía de ondas rectangular de 2.5 (cm) por 1.5 (cm) que funciona a 7.5 (GHz):

a) si la guía de ondas está hueca, y

b) si la guía de ondas está rellena con un medio dieléctrico caracterizado por $\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 0$.

P.9-11 Comience con la ecuación (9-45) y

a) obtenga las expresiones de $E_x^0(x, y)$, $E_y^0(x, y)$, $H_x^0(x, y)$ y $H_y^0(x, y)$ para el modo TM_{11}, y

b) obtenga una fórmula para la potencia media P_{av} transmitida a lo largo de una guía de ondas de $a \times b$.

P.9-12 La expresión instantánea para E_z de un modo TM en una guía de ondas rectangular rellena de aire, de 5.0 (cm) por 2.5 (cm) es

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}(100\pi x) \operatorname{sen}(100\pi y) \cos(2\pi 10^{10} t - \beta z) \text{ (V/m)}.$$

a) ¿Cuál es el modo de operación?

b) Calcule f_c, β, Z_{TM} y λ_g.

P.9-13 La expresión instantánea para H_z de un modo TE en una guía de ondas cuadrada rellena de aire de 2.5 (cm) por 2.5 (cm) es

$$H_z = 0.3 \cos(80\pi y) \cos(\omega t - 280z) \text{ (A/m)}.$$

a) ¿Cuál es el modo de operación?

b) Calcule f_c, f, Z_{TE} y λ_g.

c) Suponga que las pérdidas son despreciables y calcule el flujo de potencia media en la guía de ondas.

P.9-14 La atenuación de los modos de propagación en una guía de ondas debida a un dieléctrico con pérdidas puede estudiarse en términos de una permitividad compleja ϵ_d y una conductividad equivalente σ_d, como se muestra en la ecuación (9-97). (a) Sustituya la ecuación (9-97) en la ecuación (9-24) para obtener una fórmula para la constante de atenuación α_d debida al dieléctrico con pérdidas, en términos de la razón

f_c/f (b) Calcule α_d para una guía de ondas rectangular de 2.50 (cm) por 1.25 (cm) que funciona a 4.0 (GHz). El medio dieléctrico tiene una constante dieléctrica de 4 y una conductividad equivalente de 3×10^{-5} (S/m).

P.9-15 Una onda electromagnética se propaga por una guía de ondas rectangular rellena de aire, de dimensiones $a \times b$, en el modo dominante. Suponga que $a = 2.50$ (cm) y que el ancho de banda utilizable está entre $1.15(f_c)_{10}$ y un 15% por debajo de la frecuencia de corte del siguiente modo más alto.

a) Calcule y compare el ancho de banda permitido para $b = 0.25a$, $b = 0.50a$ y $b = 0.75a$.

b) Calcule y compare la potencia media transmitida en las tres guías del apartado (a) a 7 (GHz) si la intensidad eléctrica máxima es de 10 (kV/m). Ignore las pérdidas.

P.9-16 Se tiene una cavidad resonante rectangular sin pérdidas, rellena de aire, con dimensiones de 8 (cm) × 6 (cm) × 5 (cm). Encuentre los ocho primeros modos de menor orden y sus frecuencias resonantes.

P.9-17 Una cavidad rectangular rellena de aire, con paredes de metal (ϵ_0, μ_0, $\sigma = 1.57 \times 10^7$ (S/m)), tiene las dimensiones siguientes: $a = 4$ (cm), $b = 3$(cm), $d = 5$ (cm).

a) Determine el modo dominante y su frecuencia resonante para esta cavidad.

b) Calcule la Q y las energías eléctrica y magnética media temporal almacenadas a la frecuencia resonante, suponiendo que H_0 es de 0.1 (A/m).

P.9-18 Si la cavidad rectangular del problema P.9-17 está rellena con un material dieléctrico sin pérdidas con constante dieléctrica de 2.5, calcule

a) la frecuencia resonante del modo dominante,

b) la Q, y

c) las energías eléctrica y magnética media temporal almacenadas a la frecuencia resonante, suponiendo que H_0 es de 0.1 (A/m).

P.9-19 La ecuación (9-121) indica que el factor de calidad Q_{101} para el modo TE_{101} en una cavidad resonante cúbica ($a = b = d$) puede escribirse como

$$Q_{101} = \frac{a}{3\delta}, \tag{9-122}$$

donde δ es la profundidad de penetración en las paredes de la cavidad.

a) Si la cavidad está hecha de metal, determine el valor de a necesario para obtener un factor de calidad de 6500.

b) Calcule la frecuencia resonante.

c) ¿Cuánto valdría Q_{101} si la cavidad estuviera hecha de cobre?

P.9-20 Para una cavidad resonante rectangular hecha de cobre, rellena de aire,

a) calcule Q para el modo TE_{101} si sus dimensiones son $a = d = 1.8b = 3.6$ (cm), y

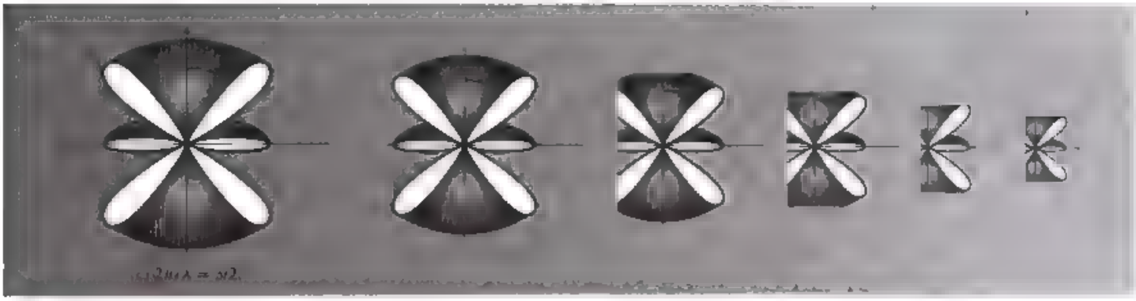
b) determine cuánto hay que incrementar b para que Q sea un 20% mayor.

CAPÍTULO 10

10-1 DESCRIPCIÓN GENERAL En el capítulo 7 estudiamos las características de propagación de las ondas electromagnéticas planas en un medio libre de fuentes, aunque sin considerar la forma en que se generaron estas ondas. Por supuesto, estas ondas deben originarse en fuentes, que en términos electromagnéticos son cargas y corrientes variables con el tiempo. Para radiar energía electromagnética de forma eficiente y en las direcciones prescritas, las cargas y corrientes deben distribuirse en formas específicas. Las ***antenas*** son estructuras diseñadas para radiar y recibir energía electromagnética eficazmente, en una forma prescrita. Cada antena tiene una impedancia de entrada característica y puede considerarse como un transductor para adaptar la línea de transmisión de alimentación o la guía de ondas a la impedancia intrínseca del medio circundante. Si no hubiera una antena eficiente, la energía electromagnética estaría localizada y no sería posible la transmisión inalámbrica de información a grandes distancias.

Funciones de las antenas

En este capítulo estudiaremos primero los campos de radiación y las propiedades características de un dipolo eléctrico elemental. Después veremos las antenas lineales delgadas de longitud finita, de las cuales la antena dipolar de media longitud de onda es un caso especial. Las características de radiación de una antena lineal están determinadas en gran medida por su longitud y por la forma en que es excitada. También es posible agrupar varias antenas para formar un ***sistema de antenas*** y obtener una mayor directividad y otras propiedades deseables. Consideraremos algunas de las propiedades básicas de los sistemas simples. Analizaremos los conceptos del área eficaz de las antenas receptoras y el área transversal de retrodispersión de los dispersores. Así mismo,



Antenas y sistemas de antenas

examinaremos la relación de transmisión de potencia entre las antenas transmisoras y receptoras, incluyendo la ecuación del radar.

Procedimiento para determinar las características de radiación de una antena

En términos generales, el análisis de las características de radiación de una antena sigue los tres pasos descritos a continuación.

1. Determinar el potencial magnético **A** de una distribución de corriente **J** conocida o supuesta en la antena. Para la dependencia armónica con el tiempo, el fasor del potencial vector retardado es, a partir de la ecuación (6-85),

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V}\frac{\mathbf{J}e^{-jkR}}{R}\,dv', \tag{10-1}$$

donde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ es el número de onda.

2. Encontrar la intensidad de campo magnético **H** a partir de **A**. Véase la ecuación (6-50).

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}. \tag{10-2}$$

3. Hallar la intensidad de campo eléctrico **E** a partir de **H**. Use la ecuación (6-80b) con $\mathbf{J} = 0$ en el espacio.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\times\mathbf{H}. \tag{10-3}$$

Una vez que se conocen **E** y **H** podemos determinar las demás características de radiación de la antena.

10-2 EL DIPOLO ELÉCTRICO ELEMENTAL

Consideremos primero las características de radiación de un alambre conductor muy corto (comparado con la longitud de onda de operación) y fino, de longitud $d\ell$, por el que circula una corriente con una dependencia armónica con el tiempo

$$i(t) = I\cos\omega t = \mathcal{R}e[Ie^{j\omega t}], \tag{10-4}$$

como se ilustra en la figura 10-1 Este elemento de corriente es un componente esencial de las antenas lineales y se denomina ***dipolo hertziano***

Un dipolo hertziano es un elemento de corriente radiante muy corto

Para determinar el campo electromagnético de un dipolo hertziano se siguen los tres pasos descritos en la sección 10-1.

PASO 1 Encontrar la representación fasorial del potencial vector retardado **A**. De la ecuación (10-1) tenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right), \tag{10-5}$$

donde $\beta = k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Como (véase la Ec. 2-47)

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_R\cos\theta - \mathbf{a}_\theta \operatorname{sen}\theta, \tag{10-6}$$

las componentes esféricas de $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi$ son

$$A_R = A_z\cos\theta = \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\cos\theta, \tag{10-6a}$$

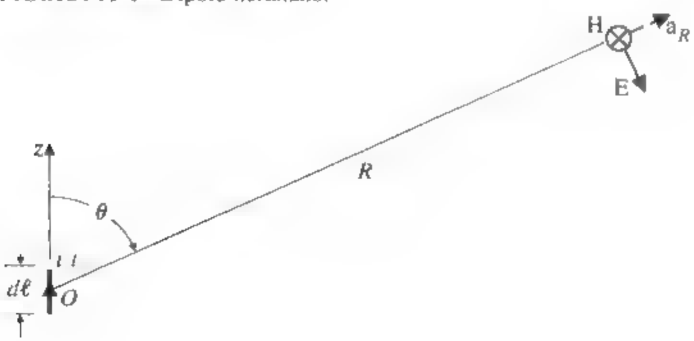
$$A_\theta = -A_z\operatorname{sen}\theta = -\frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\operatorname{sen}\theta, \tag{10-6b}$$

$$A_\phi = 0. \tag{10-6c}$$

PASO 2 Determinar **H** a partir de **A**.

Con base en la geometría de la figura 10-1, es de esperar que no se presenten variaciones con respecto a la coordenada ϕ. Tenemos entonces, a partir de la ecuación (2-99),

FIGURA 10-1 Dipolo hertziano.



$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{1}{\mu_0 R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right] \\
&= -\mathbf{a}_\phi \frac{I\,d\ell}{4\pi}\beta^2 \operatorname{sen}\theta\left[\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2}\right]e^{-j\beta R}.
\end{aligned}
\tag{10-7}
$$

PASO 3 Determinar $\mathbf{E}$ a partir de $\mathbf{H}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\nabla \times \mathbf{H} \\
&= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left[\mathbf{a}_R \frac{1}{R\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi \operatorname{sen}\theta) - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{R}(RH_\phi)\right],
\end{aligned}
\tag{10-8}
$$

que da

$$
E_R = -\frac{I\,d\ell}{4\pi}\eta_0\beta^2 2\cos\theta\left[\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right]e^{-j\beta R}, \tag{10-8a}
$$

$$
E_\theta = -\frac{I\,d\ell}{4\pi}\eta_0\beta^2 \operatorname{sen}\theta\left[\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right]e^{-j\beta R}, \tag{10-8b}
$$

$$
E_\phi = 0, \tag{10-8c}
$$

donde $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cong 120\pi$ (Ω).

Las ecuaciones (10-7) y (10-8) constituyen los campos electromagnéticos de un dipolo hertziano. Estas expresiones son bastante complicadas, sin embargo, en los problemas de antenas lo que más nos interesa son los campos a distancias muy lejanas de la antena, es decir, regiones donde $R \gg \lambda/2\pi$ o $\beta R = 2\pi R/\lambda \gg 1$. En estas circunstancias (en la *zona lejana*) podemos despreciar los términos $1/(\beta R)^2$ y $1/(\beta R)^3$ y escribir el ***campo lejano***, o ***campo de radiación***, del dipolo eléctrico elemental como

Zona lejana

Los campos de radiación son campos lejanos.

$$
\boxed{H_\phi = j\frac{I\,d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\beta\operatorname{sen}\theta \qquad (\text{A/m}),} \tag{10-9}
$$

Campos lejanos de un dipolo hertziano

$$
\boxed{E_\theta = j\frac{I\,d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\eta_0\beta\operatorname{sen}\theta = \eta_0 H_\phi \qquad (\text{V/m}).} \tag{10-10}
$$

También se pueden despreciar las otras componentes del campo

PREGUNTAS DE REPASO

P.10-1 ¿Cuáles son las funciones esenciales de las antenas?

P.10-2 Enuncie el procedimiento para encontrar el campo electromagnético debido a una distribución supuesta de corriente con dependencia armónica con el tiempo en la estructura de una antena.

P.10-3 ¿Qué es un *dipolo hertziano*?

P.10-4 Defina la *zona lejana* de una antena

P.10-5 ¿Qué significan los *campos de radiación* de una antena?

COMENTARIOS

1. El campo de radiación de un dipolo hertziano vertical consiste en H_ϕ y $E_\theta = \eta_0 H_\phi$.
2. E_θ y H_ϕ están en cuadratura espacial y en fase temporal; ambos varían inversamente con la distancia al dipolo.

10-3 DIAGRAMAS DE ANTENAS Y DIRECTIVIDAD

Diagrama de radiación de una antena o diagrama de la antena

Diagramas de radiación en el plano E y en el plano H

Ninguna antena física radia de manera uniforme en todas las direcciones del espacio. La gráfica que describe la intensidad del campo lejano en función de la dirección a una distancia fija de una antena se denomina ***diagrama de radiación*** de la antena, o simplemente ***diagrama de la antena***. Por lo general, un diagrama de antena es tridimensional y varía con θ y ϕ en un sistema de coordenadas esféricas. Podemos evitar la dificultad que implica la elaboración de gráficas tridimensionales representando gráficamente por separado la magnitud de la intensidad de campo normalizada (con respecto al valor de pico) en función de θ para una ϕ constante (un ***diagrama en el plano E***) y la magnitud de la intensidad de campo normalizada en función de ϕ para $\theta = \pi/2$ (el ***diagrama en el plano H***).

EJEMPLO 10-1

Represente gráficamente los diagramas de radiación en el plano E y en el plano H de un dipolo hertziano.

SOLUCIÓN

E_θ y H_ϕ son proporcionales entre sí en la zona lejana, por lo que sólo hay que considerar la magnitud normalizada de E_θ.

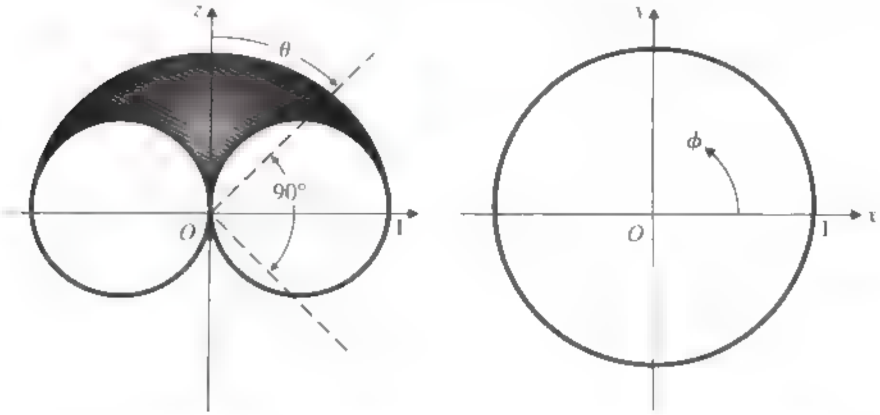
a) *Diagrama en el plano E* Para una R dada, E_θ es independiente de ϕ; a partir de la ecuación (10-10), la magnitud normalizada de E_θ es

$$|E_\theta| \text{ Normalizada} = |\text{sen}\,\theta|. \tag{10-11}$$

La función de configuración es la función de intensidad eléctrica normalizada que describe un diagrama de antena.

Ésta es la ***función de configuración*** en el plano E de un dipolo hertziano. La ecuación (10-11) representa un par de círculos para cualquier ϕ, como se ilustra en la figura 10-2(a).

b) *Diagrama en el plano H*. Para una R dada y $\theta = \pi/2$, la magnitud normalizada de E_θ es $|\text{sen}\,\theta| = 1$. El diagrama en el plano H es simplemente un círculo de radio unidad centrado en el dipolo que está situado a lo largo del eje z, como se ve en la figura 10-2(b).



(a) Diagrama en el plano E. (b) Diagrama en el plano H.

FIGURA 10-2 Diagramas de radiación de un dipolo hertziano.

Un parámetro que se usa comúnmente para medir la capacidad de una antena para dirigir la potencia radiada en una dirección determinada es la ***ganancia directiva***, que puede definirse en términos de la intensidad de radiación. La ***intensidad de radiación*** es la potencia media temporal por unidad de ángulo sólido. La unidad en el SI de la intensidad de radiación es el watt por estereorradián (W/sr) Como hay R^2 metros cuadrados de superficie esférica por unidad de ángulo sólido, la intensidad de radiación, U, es igual a R^2 veces la potencia media temporal por unidad de área o R^2 veces la magnitud del vector de Poynting medio temporal, $\mathscr{P}_{av}$.

Definición y unidad en el SI de la intensidad de radiación

$$U = R^2\mathscr{P}_{av} \qquad \text{(W/sr)}. \tag{10-12}$$

La potencia media temporal total radiada es

$$P_r = \oint \boldsymbol{\mathscr{P}}_{av}\cdot d\mathbf{s} = \oint U\, d\Omega \qquad \text{(W)}, \tag{10-13}$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido diferencial, $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$

La ***ganancia directiva***, $G_D(\theta, \phi)$ de un diagrama de antena es la razón de la intensidad de radiación en la dirección (θ, ϕ) a la intensidad de radiación media:

Ganancia directiva

$$G_D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{P_r/4\pi} = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{\oint U\, d\Omega}. \tag{10-14}$$

Las antenas isótropas u omnidireccionales no existen en la práctica.

Es obvio que la ganancia directiva de una antena isótropa u omnidireccional (una antena que radia uniformemente en todas las direcciones) es la unidad. Sin embargo, en la práctica no existen las antenas isótropas.

Directividad de una antena

La máxima ganancia directiva de una antena se denomina ***directividad*** de la antena. Es la razón de la intensidad de radiación máxima a la intensidad de radiación media y generalmente se denota con D:

$$\boxed{D = \frac{U_{máx}}{U_{av}} = \frac{4\pi U_{máx}}{P_r} \qquad \text{(sin dimensiones).}} \tag{10-15}$$

Podemos expresar D de la siguiente manera en términos de la intensidad de campo eléctrico:

Cálculo de la directividad a partir de la intensidad de campo eléctrico lejano

$$\boxed{D = \frac{4\pi|E_{máx}|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|E(\theta,\phi)|^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi} \qquad \text{(sin dimensiones).}} \tag{10-16}$$

La directividad muchas veces se expresa en decibeles, referidos a la unidad

EJEMPLO 10-2

Encuentre la ganancia directiva y la directividad de un dipolo hertziano.

SOLUCIÓN

La magnitud del vector de Poynting medio temporal para un dipolo hertziano es

$$\mathscr{P}_{av} = \tfrac{1}{2}\mathscr{R}e|\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*| = \tfrac{1}{2}|E_\theta||H_\phi|. \tag{10-17}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones (10-9), (10-10) y (10-12),

$$U = \frac{(I\,d\ell)^2}{32\pi^2}\eta_0\beta^2 \operatorname{sen}^2\theta. \tag{10-18}$$

La ganancia directiva puede obtenerse a partir de la ecuación (10-14).

$$\begin{aligned} G_D(\theta,\phi) &= \frac{4\pi \operatorname{sen}^2\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi} \\ &= \tfrac{3}{2}\operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned} \tag{10-19}$$

La directividad es el valor máximo de $G_D(\theta, \phi)$:

$$D = G_D\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = 1.5,$$

que corresponde a 10 $\log_{10}$ 1.5 o 1.76 (dB).

Definición de la ganancia de una antena

Una medida de la eficiencia de la antena es la ganancia en potencia. La ***ganancia en potencia***, o simplemente ***ganancia***, G_P, de una antena con respecto a una fuente isótropa es la razón de su intensidad de radiación máxima a la intensidad de radiación de

una fuente isótropa sin pérdidas con la misma potencia de entrada. La ganancia directiva definida en la ecuación (10-14) se basa en la potencia radiada P_r. Debido a la pérdida de potencia óhmica, P_ℓ, en la propia antena, así como en las estructuras con pérdidas cercanas, incluyendo la tierra, P_r es inferior a la potencia total de entrada P_i. Tenemos

$$P_i = P_r + P_\ell. \tag{10-20}$$

La ganancia en potencia de la antena es entonces

Definición de la eficiencia de radiación

$$\boxed{G_p = \frac{4\pi U_{máx}}{P_i} \qquad \text{(sin dimensiones).}} \tag{10-21}$$

La razón de la ganancia a la directividad de una antena se denomina ***eficiencia de radiación***, ζ_r:

$$\boxed{\zeta_r = \frac{G_p}{D} = \frac{P_r}{P_i} \qquad \text{(sin dimensiones).}} \tag{10-22}$$

Normalmente, la eficiencia de una antena bien construida se aproxima al 100%.

Resistencia de radiación de una antena

Una medida muy util de la cantidad de potencia radiada por una antena es la resistencia de radiación. La ***resistencia de radiación*** de una antena es el valor de una resistencia hipotética que disiparía una cantidad de potencia igual a la potencia radiada P_r cuando la corriente en la resistencia fuera igual a la corriente máxima por la antena. Una resistencia de radiación elevada es una propiedad deseable en una antena.

EJEMPLO 10-3

Determine la resistencia de radiación de un dipolo hertziano.

SOLUCIÓN

Si suponemos que no hay pérdidas óhmicas, la potencia media temporal radiada por un dipolo hertziano para una corriente de entrada con dependencia armónica con el tiempo con amplitud I es

$$P_r = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E_\theta H_\phi^* R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi. \tag{10-23}$$

Usando los campos lejanos de las ecuaciones (10-9) y (10-10) encontramos

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{I^2(d\ell)^2}{32\pi^2}\eta_0\beta^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{I^2(d\ell)^2}{12\pi}\eta_0\beta^2 = \frac{I^2}{2}\left[80\pi^2\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{10-24}$$

En esta última expresión hemos usado 120π como impedancia intrínseca del espacio libre, η_0, y sustituido $2\pi/\lambda$ por β.

Puesto que la corriente a lo largo del corto dipolo hertziano es uniforme, referimos la potencia disipada en la resistencia de radiación R_r a I. Al igualar $I^2R_r/2$ a P_r obtenemos

Resistencia de radiación de un dipolo hertziano

$$\boxed{R_r = 80\pi^2\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 \quad (\Omega).} \tag{10-25}$$

Como ejemplo, si $d\ell = 0.01\lambda$, R_r es de sólo 0.08 (Ω), un valor extremadamente pequeño. Por consiguiente, una antena dipolar corta es un mal radiador de potencia electromagnética. Si embargo, no es correcto decir sin aclarar que la resistencia de radiación de una antena dipolar aumenta como el cuadrado de su longitud, ya que la ecuación (10-24) sólo es válida si $d\ell \ll \lambda$.

EJEMPLO 10-4

Encuentre la eficiencia de radiación de un dipolo hertziano aislado hecho de alambre metálico de radio a, longitud d y conductividad σ.

SOLUCIÓN

Sea I la amplitud de la corriente en el dipolo de alambre que tiene una resistencia de pérdidas R_ℓ. La pérdida de potencia óhmica es entonces

$$P_\ell = \tfrac{1}{2}I^2R_\ell. \tag{10-26}$$

En términos de la resistencia de radiación R_r, la potencia radiada es

$$P_r = \tfrac{1}{2}I^2R_r. \tag{10-27}$$

A partir de las ecuaciones (10-20) y (10-22) tenemos

$$\begin{aligned}\zeta_r &= \frac{P_r}{P_r + P_\ell} = \frac{R_r}{R_r + R_\ell}\\ &= \frac{1}{1 + (R_\ell/R_r)},\end{aligned} \tag{10-28}$$

donde R_r ha sido obtenido de la ecuación (10-25). La resistencia de pérdidas R_ℓ del alambre metálico puede expresarse en términos de la resistencia superficial R_s:

$$R_\ell = R_s\left(\frac{d\ell}{2\pi a}\right), \tag{10-29}$$

donde

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} \tag{10-30}$$

como indica la ecuación (7-53). Si usamos las ecuaciones (10-25) y (10-29) en la ecuación (10-28) obtenemos la eficiencia de radiación de un dipolo hertziano aislado:

$$\zeta_r = \frac{1}{1 + \dfrac{R_s}{160\pi^3}\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)\left(\dfrac{\lambda}{d\ell}\right)}. \tag{10-31}$$

Suponga que $a = 1.8$ (mm), $d\ell = 2$ (m), la frecuencia de operación $f = 1.5$ (MHz) y σ (para el cobre) $= 5.80 \times 10^7$ (S/m). Encontramos que

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{1.5 \times 10^6} = 200 \quad \text{(m)},$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi \times (1.50 \times 10^6) \times (4\pi 10^{-7})}{5.80 \times 10^7}} = 3.20 \times 10^{-4} \quad (\Omega),$$

$$R_\ell = 3.20 \times 10^{-4} \times \left(\frac{2}{2\pi 1.8 \times 10^{-3}}\right) = 0.057 \quad (\Omega),$$

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{2}{200}\right)^2 = 0.079 \quad (\Omega),$$

y

$$\zeta_r = \frac{0.079}{0.079 + 0.057} = 58\%,$$

que es muy bajo. La ecuación (10-31) indica que cuanto más pequeños sean los valores de (a/λ) y $(d\ell/\lambda)$ más se reduce la eficiencia de radiación.

■ **EJERCICIO 10.1** La función de configuración normalizada en el plano E de una antena vertical sobre un plano puesto a tierra es $\sqrt{\operatorname{sen} \theta}$, $(0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi)$.

a) Obtenga la expresión de la ganancia directiva.

b) Calcule su directividad.

RESPUESTA: (a) $(8/\pi)$ sen θ, (b) 2.55, o 4.06 (dB)

PREGUNTAS DE REPASO

P.10-6 Defina el *diagrama de una antena.*

P.10-7 Describa los diagramas en el plano E y en el plano H de un dipolo hertziano.

P.10-8 Defina la *intensidad de radiación.*

P.10-9 Defina la *ganancia directiva* y la *directividad* de una antena

P.10-10 Defina la *ganancia en potencia* y la *eficiencia de radiación* de una antena

P.10-11 Defina la *resistencia de radiación* de una antena.

COMENTARIOS

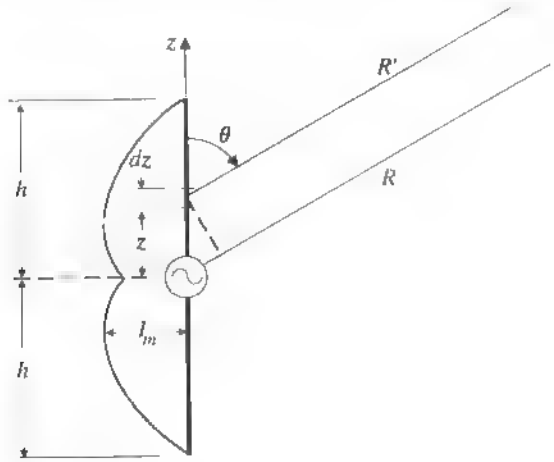
1. Un diagrama de intensidad de radiación (o diagrama de potencia) de una antena es una representación gráfica del cuadrado de la intensidad del campo en función de θ o ϕ a una distancia fija.
2. *No* es lo mismo la ganancia directiva que la ganancia en potencia.
3. La directividad *no* es lo mismo que la eficiencia de radiación.
4. La resistencia de radiación *no* es lo mismo que la parte real de la impedancia de entrada.

10-4 ANTENAS LINEALES DELGADAS

Antena dipolar lineal

Acabamos de indicar que una antena dipolar corta no es un buen radiador de potencia electromagnética, por su baja resistencia de radiación y su baja eficiencia de radiación. Ahora veremos las características de radiación de una antena recta delgada con alimentación central cuya longitud es comparable a la longitud de onda, como se ilustra en la figura 10-3. Este tipo de antena se conoce como ***antena dipolar lineal***. Si se conoce la distribución de corriente por la antena, podemos hallar su campo de radiación

FIGURA 10-3 Dipolo lineal alimentado en el centro con distribución de corriente senoidal.



integrando el campo de radiación debido a un dipolo elemental sobre toda la longitud de la antena. La determinación de la distribución exacta de corriente en esta configuración geométrica que parece tan sencilla (un alambre recto de radio finito) es, sin embargo, un problema muy difícil de valor en la frontera. Para nuestros fines supondremos una variación espacial senoidal de la corriente en un dipolo recto y muy delgado. Esta distribución de corriente que constituye una especie de onda estacionaria en el dipolo, como puede verse en la figura 10-3, representa una buena aproximación.

Como el dipolo se alimenta en el centro, las corrientes en las dos mitades son simétricas y se anulan en los extremos. Escribimos el fasor de corriente como

$$\begin{aligned} I(z) &= I_m \operatorname{sen}\beta(h-|z|) \\ &= \begin{cases} I_m \operatorname{sen}\beta(h-z), & z>0, \\ I_m \operatorname{sen}\beta(h+z), & z<0. \end{cases} \end{aligned} \tag{10-32}$$

Sólo nos interesan los campos lejanos. La contribución al campo lejano del elemento de corriente diferencial $I\,dz$ es, a partir de las ecuaciones (10-9) y (10-10),

$$dE_\theta = \eta_0\, dH_\phi = j\frac{I\,dz}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R'}}{R'}\right)\eta_0\beta \operatorname{sen}\theta. \tag{10-33}$$

R' en la ecuación (10-33) es un poco distinto de R medida al origen de las coordenadas esféricas, que coincide con el centro del dipolo. $R \gg h$ en la zona lejana,

$$R' \cong R - z\cos\theta. \tag{10-34}$$

La diferencia en magnitud entre $1/R'$ y $1/R$ es insignificante, pero hay que conservar la relación aproximada de la ecuación (10-34) en el término de fase. Si usamos las ecuaciones (10-32) y (10-34) en la ecuación (10-33) e integramos, obtendremos

$$\begin{aligned} E_\theta &= \eta_0 H_\phi \\ &= j\frac{I_m\eta_0\beta\operatorname{sen}\theta}{4\pi R}e^{-j\beta R}\int_{-h}^{h}\operatorname{sen}\beta(h-|z|)e^{j\beta z\cos\theta}\,dz. \end{aligned} \tag{10-35}$$

El integrando en la ecuación (10-35) es un producto de una función par de z, sen $\beta(h-|z|)$, y

$$e^{j\beta z\cos\theta} = \cos(\beta z\cos\theta) + j\operatorname{sen}(\beta z\cos\theta),$$

donde sen $(\beta z \cos\theta)$ es una función impar de z. Al integrar entre límites simétricos $-h$ y h, sabemos que únicamente la parte del integrando que contiene el producto de dos funciones pares de z, sen $\beta(h-|z|)$ cos $(\beta z\cos\theta)$, genera un valor distinto de cero. La ecuación (10-35) se reduce entonces a

$$E_\theta = \eta_0 H_\phi = j\frac{I_m\eta_0\beta\operatorname{sen}\theta}{2\pi R}e^{-j\beta R}\int_0^h \operatorname{sen}\beta(h-z)\cos(\beta z\cos\theta)\,dz$$

$$= \frac{j60I_m}{R} e^{-j\beta R} F(\theta), \tag{10-36}$$

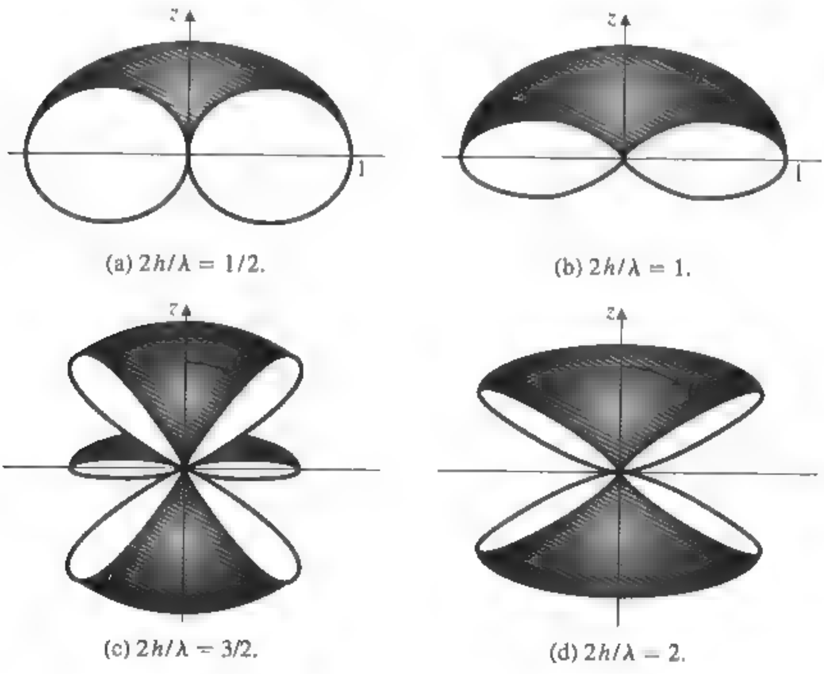
donde

Función de configuración de una antena dipolar lineal con media longitud h

$$\boxed{F(\theta) = \frac{\cos(\beta h \cos\theta) - \cos\beta h}{\operatorname{sen}\theta}.} \tag{10-37}$$

El factor $|F(\theta)|$ es la ***función de configuración*** en el plano E de una antena dipolar lineal. La forma exacta del diagrama de radiación representado por $|F(\theta)|$ en la ecuación (10-37) depende del valor de $\beta h = 2\pi h/\lambda$ y puede variar bastante para distintas longitudes de antena. No obstante, el diagrama de radiación siempre es simétrico con respecto al plano $\theta = \pi/2$. En la figura 10-4 se muestran los diagramas de plano E de cuatro longitudes de dipolo distintas, medidas en términos de la longitud de onda: $2h/\lambda = \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ y 2. Los diagramas en el plano H son círculos, ya que $F(\theta)$ es independiente de ϕ. En los diagramas de la figura 10-4 podemos observar que la dirección de la radiación máxima tiende a desplazarse del plano $\theta = 90°$ cuando la longitud del dipolo se aproxima a $3\lambda/2$. No hay radiación en el plano $\theta = 90°$ cuando $2h = 2\lambda$.

FIGURA 10-4 Diagramas de radiación en el plano E para antenas dipolares con alimentación central.



10-4.1 EL DIPOLO DE MEDIA ONDA

El dipolo de media onda con longitud $2h = \lambda/2$ tiene una importancia especial, por sus deseables características de impedancia y de diagrama. Si $\beta h = 2\pi h/\lambda = \pi/2$, la función de configuración de la ecuación (10-37) se convierte en

Función de configuración de un dipolo de media onda

$$\boxed{F(\theta) = \frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\operatorname{sen}\theta}.} \tag{10-38}$$

Esta función tiene un valor máximo igual a la unidad en $\theta = 90°$ y valores nulos en $\theta = 0°$ y $180°$. El correspondiente diagrama de radiación en el plano E aparece en la figura 10-4(a). Los fasores de campo lejano son, a partir de la ecuación (10-36),

$$E_\theta = \eta_0 H_\phi = \frac{j60I_m}{R} e^{-j\beta R} \left\{\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\operatorname{sen}\theta}\right\}. \tag{10-39}$$

La magnitud del vector de Poynting medio temporal es

$$\mathscr{P}_{av}(\theta) = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* = \frac{15 I_m^2}{\pi R^2} \left\{\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\operatorname{sen}\theta}\right\}^2. \tag{10-40}$$

La potencia total radiada por un dipolo de media onda se obtiene al integrar $\mathscr{P}_{av}$ sobre la superficie de una gran esfera:

$$\begin{aligned} P_r &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathscr{P}_{av}(\theta) R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 30 I_m^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\operatorname{sen}\theta} \, d\theta \end{aligned} \tag{10-41}$$

La integral de la ecuación (10-41) puede calcularse numéricamente para obtener un valor de 1.218. Entonces,

$$P_r = 36.54 I_m^2 \quad (\mathrm{W}), \tag{10-42}$$

de donde se obtiene la resistencia de radiación de un dipolo aislado de media onda:

Resistencia de radiación de un dipolo de media onda

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 73.1 \quad (\Omega). \tag{10-43}$$

Si ignoramos las pérdidas, vemos que la resistencia de entrada de un dipolo de media onda delgado es igual a 73.1 (Ω) y que la reactancia de entrada es un número positivo pequeño que puede hacerse nulo cuando se ajusta la longitud del dipolo para que sea un poco más corto que $\lambda/2$. (Previamente indicamos que el cálculo real de la impedancia de entrada es algo muy tedioso y queda fuera del alcance de este libro.)

Podemos determinar la directividad de un dipolo de media onda usando la ecuación (10-15). A partir de las ecuaciones (10-12) y (10-40) tenemos

$$U_{\text{máx}} = R^2 \mathscr{P}_{\text{at}}(90°) = \frac{15}{\pi} I_m^2 \tag{10-44}$$

y

Directividad de un dipolo de media onda

$$D = \frac{4\pi U_{\text{máx}}}{P_r} = \frac{60}{36.54} = 1.64, \tag{10-45}$$

que corresponde a 10 $\log_{10}$ 1.64 o 2.15 (dB), referida a un radiador omnidireccional

EJEMPLO 10-5

Una antena vertical delgada de cuarto de onda, colocada sobre un plano de tierra perfectamente conductor, es excitada en su base por una fuente con dependencia armónica con el tiempo Encuentre su diagrama de radiación, resistencia de radiación y directividad.

SOLUCIÓN

Puesto que la corriente es la carga en movimiento, podemos usar el método de imágenes analizado en la subsección 3-11.5 y reemplazar el plano de tierra conductor por la imagen de la antena vertical. Si pensamos en ello un poco nos convenceremos de que la imagen de una antena vertical por la que circula una corriente I es otra antena vertical de la misma longitud colocada por debajo del plano de tierra. Por esta antena imagen circula la misma corriente en la *misma dirección* que en la antena original. El campo electromagnético en el *semiespacio superior* debido a la antena vertical de cuarto de onda de la figura 10-5(a) es, pues, igual que el campo de la antena de media onda de la figura 10-5(b) La función de configuración de la ecuación (10-38) se aplica en este caso para $0 \leq \theta < \pi/2$, y el diagrama de radiación dibujado con una línea discontinua en la figura 10-5(b) es la mitad superior del dibujado en la figura 10-4(a).

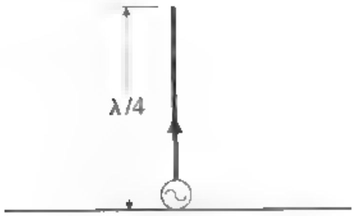
La magnitud del vector de Poynting medio temporal, $\mathscr{P}_{\text{av}}$, de la ecuación (10-40), es válida para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ Puesto que la antena de cuarto de onda (un ***monopolo***) radia únicamente en el semiespacio superior, su potencia total radiada es la mitad de la que se obtiene con la ecuación (10-42):

$$P_r = 18.27 I_m^2 \quad \text{(W)}.$$

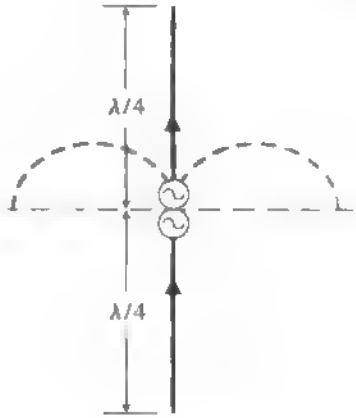
Por consiguiente, la resistencia de radiación es

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 36.54 \quad (\Omega), \tag{10-46}$$

que es la mitad de la resistencia de radiación de la antena de media onda en el espacio libre.



(a) Monopolo vertical de cuarto de onda sobre un plano de tierra conductor.



(b) Dipolo equivalente de media onda que radia hacia el semiespacio superior.

FIGURA 10-5 Monopolo de cuarto de onda sobre un plano de tierra conductor y su dipolo de media onda correspondiente.

Para calcular la directividad observamos que la intensidad de radiación máxima, $U_{\text{máx}}$, y la intensidad de radiación media, $P_r/2\pi$, no cambian con respecto a las del dipolo de media onda. Así,

Directividad de un monopolo de cuarto de onda

$$D = \frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{av}}} = \frac{U_{\text{máx}}}{P_r/2\pi} = 1.64, \tag{10-47}$$

que es lo mismo que la directividad de una antena de media onda. Esta antena se conoce como ***monopolo de cuarto de onda***.

■ **EJERCICIO 10.2** Un dipolo con alimentación central de 25 (cm) de longitud funciona a 600 (MHz) y radia una potencia media total de 475 (W). Encuentre la magnitud de las intensidades de campo eléctrico y magnético en el punto $P(100 \text{ m}, \pi/2, 0)$.

RESPUESTA: 2.17 (V/m), 5.75 (mA/m).

PREGUNTAS DE REPASO

P.10-12 Describa de forma cualitativa los diagramas de radiación en el plano E y H de la antena dipolar de media onda.

P.10-13 ¿Cuál es la resistencia de radiación y la directividad de una antena dipolar de media onda?

P.10-14 ¿Cuál es la resistencia de radiación y la directividad de un monopolo vertical de cuarto de onda sobre un plano de tierra conductor?

P.10-15 ¿Cual es la imagen de un dipolo horizontal sobre un plano de tierra conductor?

COMENTARIOS

1. Las distribuciones de corriente con dependencia armónica con el tiempo en antenas lineales delgadas con alimentación central son ondas estacionarias aproximadamente senoidales que se anulan en los extremos.
2. Las únicas intensidades de campo lejano de una antena vertical son E_θ y H_ϕ.
3. La resistencia de radiación y la directividad de una antena dipolar lineal de media onda con alimentación central son 73.1 (Ω) y 1.64, respectivamente.

10-5 SISTEMAS DE ANTENAS

Como hemos visto, las antenas lineales de un solo elemento tienden a difundir la potencia radiada por los anchos haces de sus diagramas de radiación. Tienen baja directividad y sus haces principales apuntan en direcciones fijas. Es posible superar estas restricciones agrupando varios elementos de antenas en diversas configuraciones (líneas rectas, círculos, triángulos, etcétera) con relaciones apropiadas de amplitud y fase para obtener las características de radiación que se desean. Estas disposiciones de elementos de antenas se denominan ***sistemas de antenas***. En esta sección examinaremos la teoría básica y las características de los sistemas de antenas lineales (elementos radiantes dispuestos a lo largo de una línea recta). Primero veremos el caso más sencillo: los sistemas de dos elementos. Después de acumular un poco de experiencia con estos sistemas, consideraremos las propiedades básicas de los sistemas lineales uniformes formados por varios elementos idénticos.

Sistemas de antenas

10-5.1 SISTEMAS DE DOS ELEMENTOS

El sistema más simple es aquel que consiste en dos elementos radiantes (antenas) idénticos separados por una distancia. Esta disposición se ilustra en la figura 10-6. Supongamos, por cuestiones de sencillez, que las antenas están alineadas a lo largo del eje x y examinemos el campo eléctrico lejano de las antenas individuales en la dirección θ. Las antenas son excitadas por una corriente de la misma magnitud, pero la fase en la antena 1 está adelantada un ángulo ξ con respecto a la fase de la antena 0. En el punto $P(\theta, \phi)$ tenemos

$$E_0 = E_m F(\theta, \phi)\frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0}, \qquad \text{y} \tag{10-48}$$

$$E_1 = E_m F(\theta, \phi)\frac{e^{j\xi}e^{-j\beta R_1}}{R_1}, \tag{10-49}$$

donde $F(\theta, \phi)$ es la función de configuración de las antenas individuales y E_m es una función de amplitud. El campo eléctrico del sistema de los dos elementos es la suma de E_0 y E_1. Así,

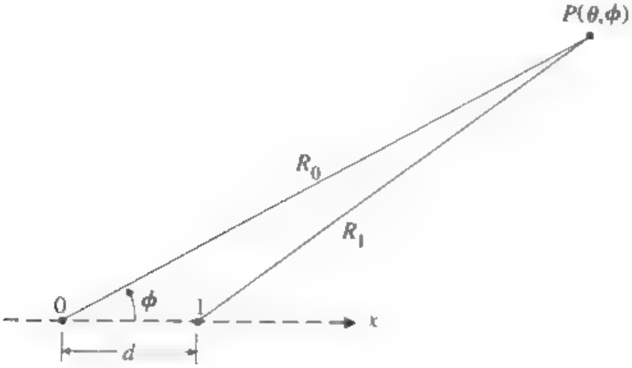


FIGURA 10-6 Sistema de dos elementos.

$$E = E_0 + E_1 = E_m F(\theta, \phi)\left[\frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0} + \frac{e^{j\xi}e^{-j\beta R_1}}{R_1}\right]. \tag{10-50}$$

$R_0 \gg d/2$ en la zona lejana, y en la magnitud podemos sustituir de forma aproximada el factor $1/R_1$ por $1/R_0$. Sin embargo, una pequeña diferencia entre R_0 y R_1 en los exponentes puede dar lugar a una diferencia en fase considerable, de manera que hay que usar una mejor aproximación Como las líneas que unen el punto de campo P con las dos antenas son casi paralelas, podemos escribir

$$R_1 \cong R_0 - d\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi. \tag{10-51}$$

Al sustituir la ecuación (10-51) en la ecuación (10-50) se obtiene

$$\begin{aligned} E &= E_m \frac{F(\theta, \phi)}{R_0} e^{-j\beta R_0}[1 + e^{j\beta d\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi}e^{j\xi}] \\ &= E_m \frac{F(\theta, \phi)}{R_0} e^{-j\beta R_0} e^{j\psi/2}\left(2\cos\frac{\psi}{2}\right), \end{aligned} \tag{10-52}$$

donde

$$\psi = \beta d\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \xi. \tag{10-53}$$

La magnitud del campo eléctrico del sistema es

$$|E| = \frac{2E_m}{R_0}|F(\theta, \phi)|\left|\cos\frac{\psi}{2}\right|, \tag{10-54}$$

donde $|F(\theta, \phi)|$ puede llamarse ***factor de elemento,*** y $|\cos(\psi/2)|$, ***factor de sistema*** normalizado. El factor de elemento es la magnitud de la función de configuración de los elementos radiantes individuales y el factor de sistema depende de la geometría del sistema y de las amplitudes y fases relativas de las excitaciones de los elementos. (Las amplitudes de excitación son iguales en este caso específico.)

Principio de multiplicación de diagramas

Con base en la ecuación (10-54) llegamos a la conclusión de que ***la función de configuración de un sistema de elementos idénticos está descrita por el producto del factor de elemento y el factor de sistema.*** Esta propiedad se conoce como ***principio de multiplicación de diagramas.***

EJEMPLO 10-6

Represente gráficamente los diagramas de radiación en el plano H de dos dipolos paralelos para los casos siguientes: (a) $d = \lambda/2$, $\xi = 0$ y (b) $d = \lambda/4$, $\xi = -\pi/2$

SOLUCIÓN

Supongamos que los dipolos están dirigidos según la dirección z y que están colocados sobre el eje x, como se muestra en la figura 10-6. Los dipolos son omnidireccionales en el plano H ($\theta = \pi/2$) y la función de configuración normalizada es igual al factor de sistema normalizado $A(\phi)$. Así,

$$|A(\phi)| = \left|\cos\frac{\psi}{2}\right| = \left|\cos\frac{1}{2}(\beta d\cos\phi + \xi)\right|.$$

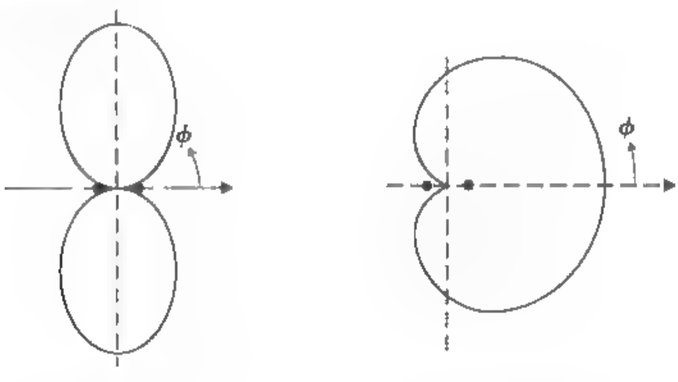
a) $d = \lambda/2$ ($\beta d = \pi$), $\xi = 0$:

$$|A(\phi)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right|. \tag{10-55}$$

Sistema de radiación transversal

El diagrama tiene un máximo en $\phi_0 = \pm\pi/2$, es decir, en la dirección transversal. Éste es un tipo de ***sistema de radiación transversal***. En la figura 10-7(a) se ilustra este diagrama transversal. Como las excitaciones en los dos dipolos están en fase, sus campos eléctricos se suman en las direcciones transversales, $\phi = \pm\pi/2$. En $\phi = 0$ y π, los campos eléctricos se cancelan porque la separación de $\lambda/2$ produce una diferencia en fase de 180°.

FIGURA 10-7 Diagramas de radiación en el plano H de un sistema dipolar paralelo de dos elementos



(a) $d = \lambda/2$, $\xi = 0$. (b) $d = \lambda/2$, $\xi = -\pi/2$.

b) $d = \lambda/4 \; (\beta d = \pi/2), \; \xi = -\pi/2$:

$$|A(\phi)| = \left|\cos\frac{\pi}{4}(\cos\phi - 1)\right|, \tag{10-56}$$

Sistema de radiación longitudinal

que tiene un máximo en $\phi_0 = 0$ y que se anula en $\phi = \pi$. El máximo del diagrama sigue la dirección *a lo largo* de la línea del sistema y los dos polos constituyen un ***sistema de radiación longitudinal***. En la figura 10-7(b) puede verse este diagrama longitudinal. En este caso, la fase del dipolo del lado derecho está *retrasada* $\pi/2$, lo cual compensa de manera exacta el hecho de que su campo eléctrico llega por la dirección $\phi = 0$ un cuarto de ciclo *antes* que el campo eléctrico del dipolo del lado izquierdo. Como consecuencia, los campos eléctricos se suman en la dirección $\phi = 0$. En la dirección $\phi = \pi$, el retraso en la fase de $\pi/2$ en el dipolo del lado derecho, más el retardo de cuarto de ciclo, da lugar a una cancelación total de los campos.

EJEMPLO 10-7

Analice el diagrama de radiación de un sistema lineal de tres fuentes isótropas espaciadas $\lambda/2$. Las excitaciones en las fuentes están en fase y tienen razones de amplitud 1:2:1.

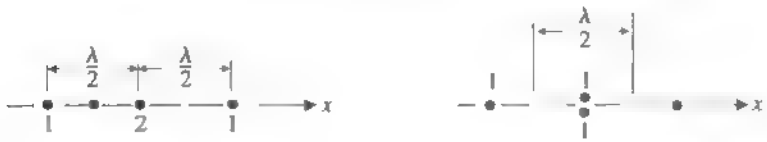
SOLUCIÓN

Este sistema de tres fuentes equivale a dos sistemas de dos elementos separados $\lambda/2$ entre sí, como se ilustra en la figura 10-8. Podemos considerar cada uno de estos sistemas de dos elementos como una fuente radiante con un factor de elemento expresado por la ecuación (10-55) y un factor de sistema indicado por la misma ecuación. Aplicando el principio de multiplicación de diagramas obtenemos

$$|E| = \frac{4E_m}{R_0}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right|^2 = \frac{4E_m}{R_0}|A(\phi)|. \tag{10-57}$$

La figura 10-9 muestra el diagrama de radiación representado por la función de sistema normalizada $|A(\phi)| = |\cos[(\pi/2)\cos\phi]|^2$. Si se compara con la función de configuración

FIGURA 10-8 Sistema de tres elementos y su correspondiente par de sistemas desplazados de dos elementos.



(a) Sistema binómico de tres elementos.

(b) Dos sistemas desplazados de dos elementos.

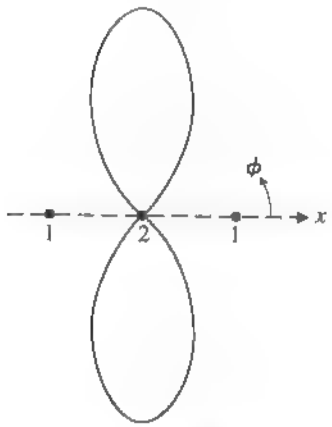


FIGURA 10-9 Diagrama de radiación de un sistema binómico transversal de tres elementos.

del sistema uniforme de dos elementos de la figura 10-7(a), este diagrama transversal de tres elementos es más agudo (más directivo). Ambos diagramas sólo tienen haces principales sin lóbulos laterales.

Sistemas binómicos

El sistema transversal de tres elementos es un caso especial de una clase de sistemas *sin lóbulos laterales* conocida como ***sistemas en binomio o binómicos***. En un sistema binómico de N elementos, el factor de sistema es una función binómica $(1 + e^{j\psi})^{N-1}$ y las amplitudes de excitación varían de acuerdo con los coeficientes de un desarrollo binómico $\binom{N-1}{n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Si $N = 3$, las amplitudes de excitación relativas son $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ y $\binom{2}{2} = 1$, como en el ejemplo 10-7. Para obtener un diagrama directivo sin lóbulos laterales, normalmente se restringe d en un sistema binómico a que sea $\lambda/2$.

■ **EJERCICIO 10.3** a) ¿Cuáles son las amplitudes de excitación relativas de un sistema binómico de cuatro fuentes isótropas equifase con espaciado uniforme de $\lambda/3$?

b) Suponiendo que las fuentes están situadas sobre el eje y, obtenga el factor de sistema normalizado en el plano $\theta = \pi/2$.

RESPUESTA: (a) 1:3:3:1, (b) $\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\cos\phi\right)\right|^3$

10-5.2 SISTEMAS LINEALES UNIFORMES GENERALES

Ahora veremos los sistemas que consisten en más de dos antenas idénticas espaciadas uniformemente sobre una línea recta. Las antenas son alimentadas con corrientes de igual magnitud y tienen un cambio de fase progresivo y uniforme por la línea. Este tipo de sistemas se conoce como ***sistema lineal uniforme***. En la figura 10-10 se presenta un ejemplo, con N elementos de antena alineados sobre el eje x. Los elementos de antena son idénticos, de manera que la función de configuración del sistema es el producto del factor de elemento por el factor de sistema. El factor de sistema normalizado en el plano xy es

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N}\,|1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi}|, \tag{10-58}$$

donde

$$\psi = \beta d \cos\phi + \xi. \tag{10-59}$$

El polinomio del lado derecho de la ecuación (10-58) es una progresión geométrica y puede expresarse en forma cerrada:

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N}\left|\frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}}\right|$$

o

Factor de sistema de un sistema lineal uniforme de *N* elementos

$$\boxed{|A(\psi)| = \frac{1}{N}\left|\frac{\text{sen}(N\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)}\right| \qquad \text{(Sin dimensiones).}} \tag{10-60}$$

Suponiendo diagramas omnidireccionales en el plano H para los elementos idénticos del sistema, podemos deducir varias propiedades importantes a partir de la expresión de $|A(\psi)|$ dada por la ecuación (10-60).

El haz principal ocurre en $\psi = 0$.

1. *Dirección del haz principal.* El valor máximo de $|A(\psi)|$ ocurre cuando $\psi = 0$, o cuando

   $\beta d \cos\phi_0 + \xi = 0,$

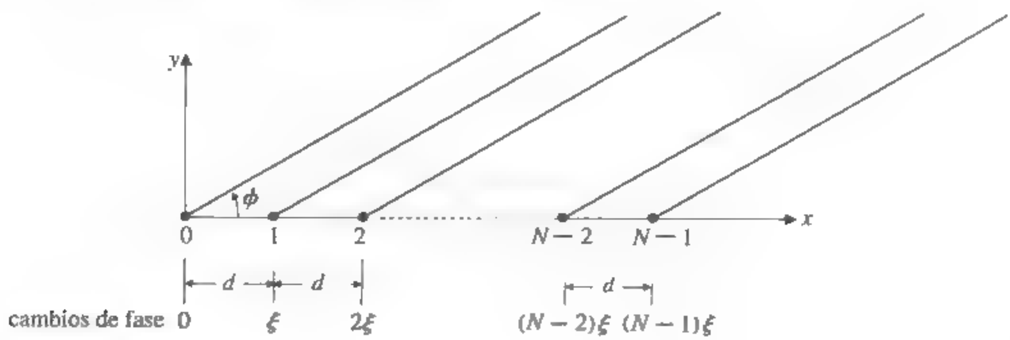
   lo cual nos lleva a

   $$\cos\phi_0 = -\frac{\xi}{\beta d}. \tag{10-61}$$

   Dos casos especiales tienen importancia particular.

   a) *Sistema de radiación transversal* En el caso de un sistema transversal, la radiación máxima ocurre en una dirección perpendicular a la línea del sistema; es decir, en $\phi_0 = \pm\pi/2$. Para esto se requiere que $\xi = 0$, lo que significa que todos los elementos de un sistema de radiación transversal lineal deben excitarse *en fase*, como en el ejemplo 10-6(a).

FIGURA 10-10 Sistema lineal uniforme general.



b) *Sistema de radiación longitudinal* En el caso de un sistema longitudinal, la radiación máxima ocurre en $\phi_0 = 0$. La ecuación (10-61) da

$$\xi = -\beta d \cos\phi_0 = -\beta d.$$

Podemos notar que es posible cambiar (para que rastree) la dirección del haz principal de un sistema lineal uniforme si se modifican los cambios de fase progresivos. Los sistemas de antenas equipados con cambiadores de fase para mover electrónicamente el haz principal se denomina *sistemas excitados en fase*.

Sistemas excitados en fase

Lóbulos laterales

2. *Situación de los lóbulos laterales.* Los lóbulos laterales son máximos menores que ocurren aproximadamente cuando el numerador del lado derecho de la ecuación (10-60) es un máximo; o sea, cuando sen $(N\psi/2) = 1$ o cuando

$$\frac{N\psi}{2} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Los primeros lóbulos laterales ocurren cuando

$$\frac{N\psi}{2} = \pm\frac{3}{2}\pi, \qquad (m = 1). \tag{10-62}$$

Observe que $N\psi/2 = \pm\pi/2$ $(m = 0)$ no representan situaciones de lóbulos laterales porque están dentro de la región del haz principal.

3. *Nivel de primeros lóbulos laterales.* Una característica importante del diagrama de radiación de un sistema de antenas es el nivel de los primeros lóbulos laterales en comparación con el nivel del haz principal, ya que el primero usualmente es el más alto de todos los lóbulos laterales. Los lóbulos laterales deben mantenerse lo más bajo posible para que la mayor parte de la potencia radiada se concentre en la dirección del haz principal y no se desvíe a las regiones de los lóbulos laterales. Si se sustituye la ecuación (10-62) en la ecuación (10-59) vemos que la amplitud de los primeros lóbulos laterales es

$$\frac{1}{N}\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(3\pi/2N)}\right| \simeq \frac{1}{N}\left|\frac{1}{3\pi/2N}\right| = \frac{2}{3\pi} = 0.212$$

para una N grande. En términos logarítmicos, los primeros lóbulos laterales de un sistema de antenas de varios elementos están $20 \log_{10}(1/0.212)$, es decir 13.5(dB), *por debajo* del máximo principal. Este número es casi independiente de N, siempre y cuando N sea muy grande (El nivel de los lóbulos laterales es mayor para una N más pequeña.)

La disminución progresiva de las amplitudes de excitación reduce los lóbulos laterales.

Una forma de reducir el nivel de los lóbulos laterales en el diagrama de radiación de un sistema lineal es disminuir progresivamente la distribución de corriente en los elementos del sistema, es decir, hacer que las amplitudes de excitación en los elementos en la parte central del sistema sean mayores que las de los elementos en los extremos finales (Prob. P.10-14).

■ **EJERCICIO 10.4** Determine el nivel y la situación de los primeros lóbulos laterales del diagrama de un sistema lineal de cinco elementos con $d = \lambda/2$, para los casos siguientes:

a) operación transversal, y
b) operación longitudinal.

RESPUESTA: (a) -12.1 (dB) en $\phi = \pm 53.1°$ y $\pm 126.9°$ (b) -12.1 (dB) en $\phi = \pm 66.4°$

EJEMPLO 10-8

Encuentre la anchura del haz principal de un sistema lineal uniforme de cinco elementos con espaciado $\lambda/2$ en (a) operación transversal y (b) operación longitudinal.

SOLUCIÓN

La anchura del haz principal es la región del diagrama entre los primeros valores nulos a ambos lados de la dirección de la radiación máxima. Los primeros valores nulos del diagrama del sistema ocurren en ψ_{01}, con lo cual (véase la Ec. 10-60)

$$\frac{N\psi_{01}}{2} = \pm\pi. \tag{10-63}$$

En este ejemplo, $\psi_{01} = \pm 2\pi/5 = \pm 0.4\pi$. Es obvio que las correspondientes posiciones nulas para ϕ son diferentes para los sistemas transversales y longitudinales, por los distintos valores de ξ implícitos en ψ.

a) *Operación transversal.* $\xi = 0$, $\psi = \beta d \cos\phi = \pi\cos\phi$. En los primeros nulos, $\pi\cos\phi_{01} = \pm 0.4\pi$, de lo que se obtiene

$$\phi_{01} = \cos^{-1}(\pm 0.4).$$

Si se toma el signo positivo se obtiene $\phi_{01} = \pm 66.4°$; si se usa el signo negativo, el resultado es $\phi_{01} = \pm 113.6°$. Los haces principales de un sistema transversal apuntan en las direcciones transversales en $\phi_0 = \pm 90°$. Por lo tanto, la anchura del haz principal es $113.6° - 66.4° = 47.2°$.

b) *Operación longitudinal.* $\xi = -\beta d$, $\psi = \beta d(\cos\phi - 1) = \pi(\cos\phi - 1)$. En los primeros nulos, $\pi(\cos\phi_{01} - 1) = -0.4\pi$,[†] de lo cual se obtiene

$$\phi_{01} = \cos^{-1} 0.6 = \pm 53.1°.$$

Por consiguiente, la anchura del haz principal en $\phi_0 = 0°$ es $2 \times 53.1° = 106.2°$.

Podemos ver que el haz principal de un sistema de radiación longitudinal es mucho más amplio que el del sistema de radiación transversal correspondiente.

La anchura del haz principal de un sistema de radiación longitudinal es mayor que la del sistema de radiación transversal correspondiente.

En la figura 10-11 se presenta una gráfica genérica del factor de sistema normalizado de la ecuación (10-60), para $N = 5$. Se trata de una gráfica en coordenadas rectangulares de $|A(\psi)|$ en función de ψ. El diagrama de sistema normalizado real para el intervalo del ángulo de azimut $\phi = 0$ a 2π (el ***intervalo visible***) depende de la relación entre ψ y ϕ. Como vimos previamente:

[†] Observe que el signo positivo de la ecuación (10-63) no es aplicable en este caso, ya que daría lugar a la situación imposible de $\cos\phi_{01} = 1.4$.

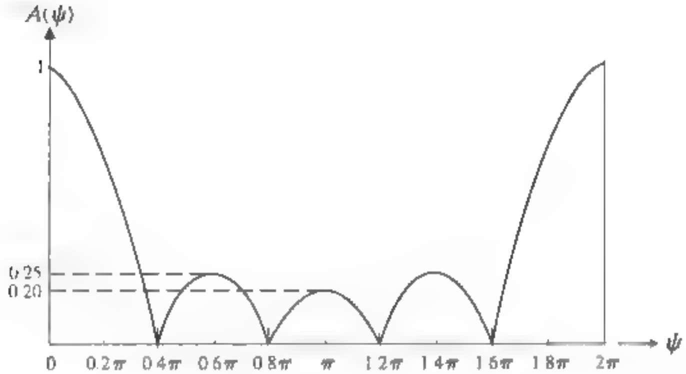


FIGURA 10-11 Factor de sistema normalizado de un sistema lineal uniforme de cinco elementos

a) Para sistemas transversales, $\phi_0 = \pm\pi/2$, $\xi = \beta d \cos\phi$, (10-64a)

b) Para sistemas longitudinales, $\phi_0 = 0$, $\xi = \beta d(\cos\phi - 1)$. (10.64b)

Las distintas transformaciones de las ecuaciones (10-64a) y (10-64b) dan lugar a diferentes diagramas de sistema en función de ϕ para el mismo factor de sistema.

■ **EJERCICIO 10.5** Use la figura 10-11 para representar gráficamente el diagrama de sistema normalizado $A(\phi)$ para ϕ de 0 a π para un sistema transversal uniforme de cinco elementos con $d = \lambda/2$:

a) en coordenadas rectangulares, y

b) en coordenadas polares.

■ **EJERCICIO 10.6** Use la figura 10-11 para representar gráficamente el diagrama de sistema normalizado $|A(\phi)|$ para ϕ de $-\pi/2$ a $\pi/2$ para un sistema transversal uniforme de cinco elementos con $d = \lambda/2$

a) en coordenadas rectangulares, y

b) en coordenadas polares.

PREGUNTAS DE REPASO

P.10-16 ¿Cuáles son las principales ventajas de los sistemas de antenas en comparación con las antenas de un elemento alimentadas con la misma potencia de entrada?

P.10-17 ¿Qué significa el *factor de sistema normalizado* de un sistema de antenas? ¿Cómo difiere de la función de configuración de las antenas individuales?

P.10-18 Enuncie el *principio de multiplicación de diagramas.*

P.10-19 Describa la diferencia entre una *sistema de radiación transversal* y un *sistema de radiación longitudinal.*

P.10-20 ¿Qué es un *sistema binómico*? ¿Cuáles son las amplitudes de excitación relativas de un sistema binómico de seis elementos?

P.10-21 ¿Tiene lóbulos laterales el diagrama de radiación de todos los sistemas binómicos lineales? Explique.

P.10-22 ¿Qué significa un *sistema lineal uniforme*?

P.10-23 ¿Qué es un *sistema excitado en fase*?

P.10-24 En el diagrama de radiación de un sistema lineal uniforme de muchos elementos, ¿cuántos decibeles por debajo del máximo principal están los primeros lóbulos laterales?

COMENTARIOS

1. El principio de multiplicación de diagramas sólo se aplica a sistemas con elementos idénticos.
2. Los elementos radiantes en un sistema transversal se alimentan en fase.
3. La fase de un elemento radiante en un sistema longitudinal usualmente está retrasada una cantidad igual a $(2\pi/\lambda)$ multiplicado por la distancia a la que el elemento está desplazado en la dirección de la radiación máxima.[†]
4. Un sistema transversal tiene un haz principal más estrecho y con mayor directividad que el del correspondiente sistema longitudinal.
5. El nivel de los lóbulos laterales en el diagrama de radiación de un sistema lineal con distribución progresiva de amplitud es menor que la del sistema correspondiente con distribución de amplitud uniforme.

10-6 ÁREA EFECTIVA Y SECCIÓN RECTA DE RETRODISPERSIÓN

En nuestro análisis de antenas y sistemas de antenas, hasta ahora solo hemos dado a entender que operan en modo de transmisión. En el modo de transmisión se aplica una fuente de voltaje a los terminales de entrada de una antena, estableciendo corrientes y cargas en la estructura de la antena. Las corrientes y las cargas, variables con el tiempo, generan a su vez ondas electromagnéticas que transportan energía o información. Entonces, podemos considerar una antena transmisora como un dispositivo que transforma energía de una fuente (un generador) en la energía asociada con una onda electromagnética. Por otra parte, una antena receptora extrae energía de una onda electromagnética incidente y la suministra a una carga. Si invocamos relaciones de reciprocidad es posible justificar las siguientes conclusiones:

Relaciones de reciprocidad para las antenas en los modos de transmisión y recepción

1. La impedancia equivalente de una antena actuando como generador en el modo receptor es igual a la impedancia de entrada de la antena en el modo transmisor.
2. El diagrama direccional de una antena para recepción es idéntico al de una antena para transmisión.

Aceptaremos estas conclusiones.

En la figura 10-12 se muestra un circuito equivalente aproximado de Thevenin para una antena receptora debilmente acoplada a una fuente transmisora. En esta figura, V_{oc} es el voltaje en circuito abierto que se induce en la antena receptora, Z_{g} es

[†] Las fases de excitación de un sistema de radiación longitudinal pueden ajustarse de formas específicas para mejorar la directividad del sistema. (Véase D. K. Cheng y P. D. Raymond, Jr., "Optimization of array directivity by phase adjustments", *Electronics Letters*, vol. 7, págs. 552-553, 9 de septiembre de 1971.)

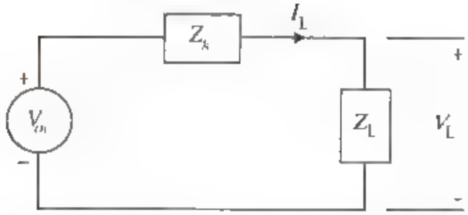


FIGURA 10-12 Circuito equivalente de Thévenin para una antena receptora con carga

la impedancia interna equivalente de la antena que actúa como generador en modo receptor (igual a su impedancia de entrada en modo transmisor) y Z_L es la impedancia de carga. Usaremos este circuito equivalente para estudiar el funcionamiento de las antenas receptoras

10-6.1 ÁREA EFECTIVA

Área efectiva de una antena receptora

Al analizar antenas receptoras es conveniente definir una cantidad llamada ***área efectiva***.† El área efectiva, A_e, de una antena receptora es la razón de la potencia media, P_L, suministrada a una *carga adaptada* a la densidad de potencia media temporal, $\mathscr{P}_{av}$, de la onda electromagnética que incide sobre la antena. Escribimos

$$A_e = \frac{P_L}{\mathscr{P}_{av}} \quad (\text{m}^2). \tag{10-65}$$

En condiciones de adaptación,

$$Z_L = Z_g^* = Z_i^*. \tag{10-66}$$

Si se ignoran las pérdidas, la impedancia de entrada de la antena Z en el modo de transmisión puede escribirse como

$$Z_i = R_r + jX_i, \tag{10-67}$$

donde R_r denota la resistencia de radiación. Con base en las ecuaciones (10-66) y (10-67), el voltaje en circuito abierto inducido V_{oc} en la figura 10-12 se presenta a través de una resistencia total de $2R_r$ y la potencia media suministrada a la carga adaptada es

$$P_L = \frac{1}{2}\left\{\frac{|V_{oc}|}{2R_r}\right\}^2 R_r = \frac{|V_{oc}|^2}{8R_r}. \tag{10-68}$$

Sea E_i la amplitud de la intensidad de campo eléctrico en la antena receptora. La densidad de potencia media temporal en el punto de recepción es entonces

† También llamada ***abertura efectiva*** o ***sección recta receptora***.

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{E_i^2}{2\eta_0} = \frac{E_i^2}{240\pi}. \tag{10-69}$$

La relación entre P_L y $\mathscr{P}_{av}$ da el área efectiva.

EJEMPLO 10-9

Determine el área efectiva, $A_e(\theta)$, de un dipolo eléctrico elemental de longitud $d\ell$ ($\ll \lambda$) usado para recibir una onda electromagnética plana incidente de longitud de onda λ. Suponga que el eje del dipolo forma un ángulo θ con la dirección de la onda electromagnética incidente.

SOLUCIÓN

Sea E_i la amplitud de la intensidad de campo eléctrico en el dipolo. El voltaje en circuito abierto inducido es entonces

$$V_{oc} = E_i \, d\ell \operatorname{sen} \theta. \tag{10-70}$$

La resistencia de radiación del dipolo eléctrico elemental es, a partir de la ecuación (10-25),

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2. \tag{10-71}$$

Si en la ecuación (10-68) usamos V_{oc} de la ecuación (10-70) y R_r de la ecuación (10-71) obtenemos

$$P_L = \frac{E_i^2}{640\pi^2} (\lambda \operatorname{sen} \theta)^2. \tag{10-72}$$

Al sustituir las ecuaciones (10-69) y (10-72) en la ecuación (10-65) obtenemos el área efectiva del dipolo eléctrico elemental (dipolo hertziano):

Área efectiva de un dipolo hertziano

$$A_e = \frac{3}{8\pi} (\lambda \operatorname{sen} \theta)^2. \tag{10-73}$$

Recordando a partir de la ecuación (10-19) del ejemplo 10-2 que la ganancia directiva de un dipolo hertziano es

$$G_D(\theta, \phi) = \tfrac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \theta, \tag{10-74}$$

podemos escribir la siguiente relación para una antena en condiciones de adaptación de impedancia.

Relación entre el área efectiva y la ganancia directiva de una antena

$$\boxed{A_e(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_D(\theta, \phi) \quad (\mathrm{m}^2).} \tag{10-75}$$

Puede demostrarse que por lo general la relación entre A_e y G_D expresada por la ecuación (10-75) es válida para cualquier antena.

■ **EJERCICIO 10.7** Calcule el área efectiva máxima de un dipolo hertziano a 3 (GHz).

RESPUESTA: 11.9 (cm^2).

10-6.2 SECCIÓN RECTA DE RETRODISPERSIÓN

Sección recta de retrodispersión (sección recta de radar)

Como vimos en la subsección anterior, el concepto del área efectiva tiene que ver con la potencia disponible para la carga adaptada de una antena receptora para una determinada densidad de potencia incidente. En aquellas situaciones en las cuales la onda incide sobre un objeto pasivo cuyo propósito no es extraer energía de la onda incidente, pero cuya presencia crea un campo disperso, es conveniente definir una cantidad denominada ***sección recta de retrodispersión*** o ***sección recta de radar***. La sección recta de retrodispersión de un objeto es el área equivalente que interceptaría la cantidad de potencia incidente para producir la misma densidad de potencia dispersa en el receptor, si el objeto dispersara de manera uniforme en todas las direcciones (de forma isótropa). Sea

$\mathscr{P}_i$ = Densidad de potencia media temporal incidente en el objeto (W/m^2),

$\mathscr{P}_s$ = Densidad de potencia media temporal dispersa en el lugar del receptor (W/m^2),

σ_{bs} = Sección recta de retrodispersión (m^2),

r = Distancia entre el dispersor y el receptor (m).

Entonces

$$\frac{\sigma_{bs}\mathscr{P}_i}{4\pi r^2} = \mathscr{P}_s,$$

o

$$\boxed{\sigma_{bs} = 4\pi r^2 \frac{\mathscr{P}_s}{\mathscr{P}_i} \quad (m^2).} \tag{10-76}$$

Observe que $\mathscr{P}_s$ es inversamente proporcional a r^2 para grandes valores de r, y que σ_{bs} no cambia con r.

Radar

La sección recta de retrodispersión es una medida de la detectabilidad del objeto (objetivo) por ***radar*** (***radio detection and ranging***, detección y telemetría por radio), de aquí proviene el término de sección recta de radar. Es una medida que depende en forma complicada de varios factores como la geometría, la orientación, los parámetros constitutivos y las condiciones superficiales del objeto, además de la frecuencia y de la polarización de la onda incidente. El diseño de una aeronave que no pueda ser detectada por radar debe ser tal que la sección recta de retrodispersión o radar sea excepcionalmente pequeña.

10-7 FÓRMULA DE TRANSMISIÓN DE FRIIS Y ECUACIÓN DEL RADAR

Ahora veremos la relación de transmisión de potencia entre las antenas transmisoras y receptoras. Suponga que se establece un enlace de comunicación entre las estaciones 1 y 2 usando antenas con áreas efectivas A_{e1} y A_{e2}, respectivamente. Las antenas están separadas una distancia r. Queremos hallar una relación entre la potencia transmitida y la recibida.

Sea P_t la potencia total radiada por la antena 1, con ganancia directiva G_{D1}. La densidad de potencia media en la antena 2, $\mathscr{P}_{av}$, a una distancia r es

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{P_t}{4\pi r^2} G_{D1}. \tag{10-77}$$

Si la antena 2 tiene un área efectiva A_{e2}, recibirá una potencia P_L en una carga adaptada (véase la Ec. 10-65):

$$P_L = A_{e2}\mathscr{P}_{av}. \tag{10-78}$$

Combinando las ecuaciones (10-77) y (10-78) y usando la ecuación (10-75) obtenemos

$$\frac{P_L}{P_t} = \left(\frac{A_{e2}}{4\pi r^2}\right) G_{D1} = \left(\frac{A_{e2}}{4\pi r^2}\right)\left(\frac{4\pi A_{e1}}{\lambda^2}\right),$$

o

Fórmula de transmisión de Friis

$$\boxed{\frac{P_L}{P_t} = \frac{A_{e1}A_{e2}}{r^2\lambda^2}.} \tag{10-79}$$

La relación de la ecuación (10-79) se conoce como ***fórmula de transmisión de Friis***. Para una potencia transmitida, la potencia recibida es directamente proporcional al producto de las áreas efectivas de las antenas transmisora y receptora e inversamente proporcional al cuadrado del producto de la distancia de separación y la longitud de onda.

Con base en la ecuación (10-75), podemos escribir la fórmula de transmisión de Friis en la siguiente forma alternativa:

Forma alternativa de la fórmula de transmisión de Friis

$$\boxed{\frac{P_L}{P_t} = \frac{G_{D1}G_{D2}\lambda^2}{(4\pi r)^2}} \tag{10-80}$$

La potencia recibida P_L en las ecuaciones (10-79) y (10-80) supone una condición de adaptación y no contempla la potencia disipada en la propia antena. También supone que las antenas transmisora y receptora están en las zonas lejanas respectivas.

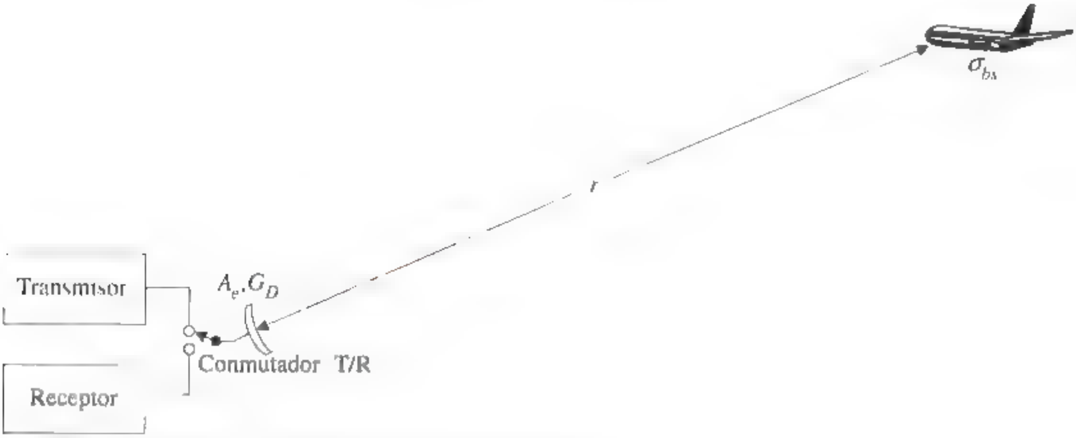


FIGURA 10-13 Sistema de radar monoestático

Considere ahora un sistema de radar que usa la misma antena para transmitir cortos pulsos de radiación con dependencia armónica con el tiempo y para recibir la energía dispersa por un objetivo, como se ilustra en la figura 10-13.[†] Para una potencia transmitida P_t, la densidad de potencia en el objetivo a una distancia r es (véase la Ec. 10-77)

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{P_t}{4\pi r^2} G_D(\theta, \phi), \tag{10-81}$$

donde $G_D(\theta, \phi)$ es la ganancia directiva de la antena en la dirección del objetivo. Si σ_{bs} denota la retrodispersión o la sección recta de radar del objetivo, la potencia equivalente que se dispersa de forma isótropa es $\sigma_{bs}\mathscr{P}_{av}$, que da lugar a una densidad de potencia en la antena de $\sigma_{bs}\mathscr{P}_{av}/4\pi r^2$. Sea A_e el área afectiva de la antena. Tenemos entonces la siguiente expresión para la potencia recibida:

$$\begin{aligned} P_L &= A_e \sigma_{bs} \frac{\mathscr{P}_{av}}{4\pi r^2} \\ &= A_e \sigma_{bs} \frac{P_t}{(4\pi r^2)^2} G_D(\theta, \phi). \end{aligned} \tag{10-82}$$

Al usar la ecuación (10-75), la ecuación (10-82) se convierte en

Ecuación del radar

$$\boxed{\frac{P_L}{P_t} = \frac{\sigma_{bs}\lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} G_D^2(\theta, \phi),} \tag{10-83}$$

conocida como ***ecuación del radar***. Podemos escribir la ecuación del radar de otra manera, en términos del área efectiva de la antena A_e en lugar de la ganancia directiva $G_D(\theta, \phi)$:

[†] Un sistema de radar que emplea una antena común para transmitir y recibir en el mismo lugar usando un conmutador T/R (transmisión/recepción, xmt/rcv), se denomina *radar monoestático*.

Forma alternativa de la ecuación del radar

$$\boxed{\frac{P_L}{P_t} = \frac{\sigma_{bs}}{4\pi}\left(\frac{A_e}{\lambda r^2}\right)^2.} \tag{10-84}$$

Como las señales de radar tienen que hacer los viajes de ida y vuelta, de la antena al objetivo y de regreso a la antena, la potencia recibida es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia r entre el objetivo y la antena. En la práctica, una parte de la potencia dispersada por el objetivo es reflejada o rerradiada al llegar a la antena receptora. Por consiguiente, P_L será un poco menor que lo que indica la ecuación (10-84).

Un sistema de comunicación vía satélite usa los satélites que viajan en órbita alrededor del plano ecuatorial de la Tierra. La velocidad de los satélites y el radio de sus órbitas son tales que el periodo de rotación de los satélites alrededor de la Tierra es el mismo que el de la Tierra, de manera que los satélites parecen estar estacionarios con respecto a la superficie terrestre, por esto se conocen como geoestacionarios. El radio de la órbita geosíncrona es de 42 300 (km). El radio de la Tierra es de 6380 (km), así que los satélites están a unos 36 000 (km) sobre la superficie terrestre.

Satélites geosíncronos

Las señales se transmiten al satélite desde una antena de alta ganancia en una estación terrestre. El satélite recibe las señales, las amplifica y las retransmite a la estación terrestre a una frecuencia distinta. Tres satélites espaciados a igual distancia entre sí alrededor de la órbita geosíncrona cubrirían casi toda la superficie del planeta, con excepción de las regiones polares (véase el Prob. P.10-21). Para efectuar un análisis cuantitativo de las relaciones de potencia y ganancia de antena para un circuito de comunicación vía satélite hay que aplicar dos veces la fórmula de transmisión de Friis, una para el enlace de subida (de la estación terrestre al satélite) y otra para el enlace de bajada (del satélite a la estación terrestre).

EJEMPLO 10-10

Se desea establecer un enlace de microondas a una distancia de 10 millas, usando una frecuencia de 300 (MHz) y dos reflectores parabólicos idénticos, cada uno con ganancia directiva de 30 (dB). La antena transmisora radía una potencia de 500 (W). Ignore las pérdidas y determine (a) la potencia recibida y (b) la magnitud de la intensidad de campo eléctrico en la antena receptora.

SOLUCIÓN

a) Lo primero es convertir la ganancia directiva logarítmica de 30 (dB) a un número

$$10 \log_{10}(G_D) = 30 \text{ (dB)},$$
$$G_D = 10^3 = 1000.$$

$$r = 10 \times 1609 = 1.609 \times 10^4 (\text{m}), \qquad \lambda = \frac{3 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 1 \text{ (m)}.$$

Usamos la ecuación (10-80) para obtener

$$\begin{aligned} P_L &= P_t \left(\frac{G_D \lambda}{4\pi r} \right)^2 \\ &= 500 \left(\frac{1000 \times 1}{4\pi \times 1.609 \times 10^4} \right)^2 \\ &= 12.23 \times 10^{-3} (\text{W}) = 12.23 \text{ (mW)}. \end{aligned}$$

b) A partir de las ecuaciones (10-77) y (10-69) tenemos

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{P_t G_D}{4\pi r^2} = \frac{E_i^2}{240\pi}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{r} \sqrt{60 P_t G_D} \\ &= \frac{1}{1.609 \times 10^4} \sqrt{60 \times 500 \times 1000} = 0.341 \text{ (V/m)}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 10-11

Suponga que se aplican 50 (kW) a la antena de un sistema de radar que opera a 3 (GHz) La antena tiene un área efectiva de 4 (m^2) y una eficiencia de radiación del 90% La potencia de señal mínima detectable (por encima del ruido inherente en el sistema receptor y en el ambiente) es de 1.5 (pW), y el coeficiente de reflexión en potencia de la antena en recepción es de 0.05. Determine el máximo alcance utilizable del radar para detectar un objetivo con una sección recta de retrodispersión de 1 (m^2)

SOLUCIÓN

En $f = 3 \times 10^9$ (Hz), $\lambda = 0.1$ (m):

$$\begin{aligned} A_e &= 4 \quad (\text{m}^2), \\ P_t &= 0.90 \times 5 \times 10^4 = 4.5 \times 10^4 \quad (\text{W}), \\ P_L &= 1.5 \times 10^{-12} \left(\frac{1}{1 - 0.05} \right) = 1.58 \times 10^{-12} \quad (\text{W}), \\ \sigma_{bs} &= 1 \quad (\text{m}^2) \end{aligned}$$

De la ecuación (10-84),

$$r^4 = \frac{\sigma_{bs} A_e^2}{4\pi\lambda^2}\left(\frac{P_t}{P_L}\right),$$

y

$$r = 4.20 \times 10^4 \text{ (m)} = 42 \text{ (km)}.$$

EJERCICIO 10.8 Calcule lo siguiente para el sistema de radar del ejemplo 10-11

a) el máximo alcance para detectar un objetivo que tiene una sección recta de retrodispersión de 0.2 (m^2),

b) la directividad en (dB) de una nueva antena para detectar el nuevo objetivo a 42 (km), y

c) la pérdida total de transmisión en (dB) en el caso original.

RESPUESTA: (a) 28.1 (km), (b) 40.5 (dB), (c) 155.2 (dB).

PREGUNTAS DE REPASO

P.10-25 ¿Cuáles son las consecuencias importantes de las relaciones de reciprocidad que tienen que ver con antenas que operan en los modos de transmisión y recepción?

P.10-26 Defina el *área efectiva* de una antena.

P.10-27 Defina la *sección recta de retrodispersión* de un objeto

P.10-28 Explique el principio del *radar*.

P.10-29 ¿Qué dice la *fórmula de transmisión de Friis* en términos de las áreas efectivas de las antenas?

COMENTARIOS

1. La relación entre el área efectiva y la ganancia directiva de una antena es una constante universal igual a $\lambda^2/4\pi$.
2. Para una densidad de potencia incidente determinada, la potencia suministrada a una carga adaptada es proporcional al área efectiva (y por consiguiente también a la ganancia directiva) de una antena.
3. El área efectiva es una propiedad de las antenas, mientras que la sección recta de retrodispersión (radar) es una propiedad de los objetos pasivos.
4. Para una potencia transmitida, la potencia que se recibe en un sistema de radar monoestático es proporcional a la sección recta de retrodispersión del objetivo y al cuadrado del producto de la ganancia directiva de la antena y la longitud de onda operativa; también es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia al objetivo.

RESUMEN

Las antenas y los sistemas de antenas se usan para radiar y/o recibir energía electromagnética de forma eficaz, de manera predeterminada. En este capítulo

- analizamos el procedimiento general para determinar los campos electromagnéticos radiados por una antena con una distribución de corriente supuesta,
- encontramos las intensidades de campos eléctricos y magnéticos lejanos de un dipolo eléctrico elemental (hertziano) radiante,
- definimos las características esenciales de la radiación (ganancia directiva, directividad, ganancia en potencia, resistencia de radiación, eficiencia de radiación) de una antena;
- examinamos las funciones de configuración de una antena lineal general, un dipolo de media onda y un monopolo de cuarto de onda;
- explicamos el principio de multiplicación de diagramas para sistemas de antenas con elementos idénticos;
- señalamos la característica especial de los sistemas binómicos;
- analizamos las características generales de los factores de sistema, destacando los sistemas de radiación transversal y longitudinal;
- explicamos los conceptos del área efectiva y la sección recta de retrodispersión, y
- obtuvimos la fórmula de transmisión de Friis y la ecuación del radar.

PROBLEMAS

P.10-1 Determine los valores máximos de las intensidades de campo eléctrico y magnético a una distancia de 10 (km) de un dipolo hertziano para una potencia de entrada de 15 (kW) que radia con una eficiencia del 70%.

P.10-2 La intensidad de radiación de una antena es

$$U(\theta, \phi) = \begin{cases} 50 \operatorname{sen}^2 \theta \cos\phi; & 0 \le \theta \le \pi, \quad \pi/2 \le \phi \le \pi/2 \\ 0; & \text{en los demás puntos.} \end{cases}$$

Determine (a) la directividad y (b) la resistencia de radiación de la antena si la magnitud de la corriente de entrada es 2 (A) y las pérdidas son despreciables.

P.10-3 (a) Suponga que la distribución espacial de la corriente en un dipolo de media onda muy delgado, con alimentación central, que yace sobre el eje z, es $I_0 \cos 2\pi z$ Determine la distribución de carga en el dipolo. ¿Cuál es la longitud de onda? (b) Repita el apartado (a) suponiendo que la distribución de corriente en el dipolo es una función triangular descrita por

$$I(z) = I_0(1 - 4 z).$$

P.10-4 Una corriente uniforme de 1 (MHz) fluye por una antena vertical de 15 (m) de longitud La antena es una varilla de cobre, con alimentación central, de 2 (cm) de radio. Calcule:

a) la resistencia de radiación,

b) la eficiencia de radiación, y

c) la intensidad máxima del campo eléctrico a una distancia de 20 (km) si la potencia radiada por la antena es de 1.6 (kW).

P.10-5 Determine la eficiencia de radiación de un dipolo con alimentación central de 1.5 (m) de longitud que opera a 100 (MHz). El dipolo está hecho de metal y tiene un radio de 1 (mm).

P.10-6 La amplitud de la distribución de corriente con dependencia armónica con el tiempo en una antena dipolar corta con alimentación central de longitud $2h(h \ll \lambda)$ puede aproximarse mediante una función triangular

$$I(z) = I_0\left(1 - \frac{|z|}{h}\right).$$

Encuentre (a) las intensidades de campo eléctrico y magnetico lejanos, (b) la resistencia de radiación y (c) la directividad.

P.10-7 La antena transmisora de un sistema de radionavegación es un mástil metálico vertical de 40 (m) de altura aislado de tierra. Una fuente de 180 (kHz) envía una corriente de 100 (A) de amplitud a la base del mástil. Suponga que la amplitud de corriente en la antena decrece linealmente hasta cero en la parte superior del mástil y que la tierra es un plano conductor perfecto. Determine:

a) la intensidad máxima de campo a una distancia de 160 (km) de la antena,

b) la potencia media temporal radiada, y

c) la resistencia de radiación.

P.10-8 (a) Compruebe los diagramas de radiación polares en el plano E de las figuras 10–4(c) y 10–4(d) para las antenas dipolares con alimentación central con $2h/\lambda = 3/2$ y $2h/\lambda = 2$, respectivamente. (b) Represente gráficamente estos diagramas en forma rectangular con $F(\theta)$ en función de θ. (c) Estime los ángulos, θ_0, donde los diagramas presentan un máximo.

P.10-9 El ángulo entre los puntos de potencia mitad del haz principal del diagrama de radiación de una antena se denomina con frecuencia *ancho de haz* del diagrama. (Los puntos de potencia mitad son aquellos donde la intensidad del campo es $1/\sqrt{2}$ de la que existe en dirección de la radiación máxima.) Encuentre el ancho de haz del diagrama en el plano E de (a) un dipolo hertziano, (b) un dipolo de media onda.

P.10-10 Esboce el diagrama de radiación polar en función de θ de una antena dipolar delgada de longitud total $2h = 1.25\lambda$. Determine la anchura del haz principal entre los primeros valores nulos.

P.10-11 Dos antenas dipolares elementales, cada una de $2h$ ($h \ll \lambda$) de longitud, se alínean colinealmente sobre el eje z con sus centros espaciados una distancia d ($d > 2h$). Las excitaciones en las dos antenas son de igual amplitud y fase.

a) Escriba la expresión general del campo eléctrico lejano de este sistema colineal de dos elementos.

b) Represente gráficamente el diagrama en el plano E normalizado para $d = \lambda/2$.

c) Repita el apartado (b) para $d = \lambda$.

P.10-12 Represente gráficamente el diagrama de radiación polar en el plano H de dos dipolos paralelos para los casos

a) $d = \lambda/4$, $\xi = \pi/2$; **b)** $d = 3\lambda/4$, $\xi = \pi/2$.

P.10-13 Para un sistema binómico transversal de cinco elementos:

a) Determine las amplitudes de excitación relativas de los elementos del sistema

b) Represente gráficamente el factor de sistema para $d = \lambda/2$.

c) Determine el ancho de haz de potencia mitad y compárelo con el de un sistema uniforme de cinco elementos que tenga el mismo espaciado entre elementos.

P.10-14 Determine el factor de sistema y represente gráficamente el diagrama de radiación normalizado de un sistema transversal de cinco elementos isótropos espaciados $\lambda/2$ y con razones de amplitud de excitación 1 : 2 : 3 : 2 : 1. Compare el nivel de los primeros lóbulos laterales con el de un sistema uniforme de cinco elementos.

P.10-15 Obtenga la función de configuración de un sistema rectangular con excitación uniforme de $N_1 \times N_2$ dipolos de media onda paralelos. Suponga que los dipolos son paralelos al eje z y que sus centros están espaciados d_1 y d_2 en las direcciones x y y, respectivamente.

P.10-16 Al tratar con antenas lineales delgadas, en ocasiones es conveniente definir una longitud efectiva, ℓ_e, de la antena, que es el momento de corriente normalizado con respecto a la corriente en el punto de alimentación. Para un dipolo con alimentación central de media longitud h, la longitud efectiva máxima (en $\theta = \pi/2$) es

$$\ell_e(\pi/2) = \frac{1}{I(0)} \int_{-h}^{+h} I(z)dz. \tag{10-85}$$

Determine la longitud efectiva de

a) un dipolo hertziano de longitud $d\ell$,

b) un dipolo de media onda con distribución de corriente senoidal $I_0 \cos \beta z$, y

c) un dipolo de media onda con distribución de corriente triangular $I_0(1 - 4|z|/\lambda)$

P.10-17 Cuando se usa una antena de longitud efectiva ℓ_e, según la definición de la ecuación (10-85), para recibir un campo eléctrico incidente E_i paralelo al dipolo, el producto $|E_i \ell_e|$ es igual al voltaje en circuito abierto $|V_{oc}|$ inducido en el circuito receptor. Suponga que un dipolo de media onda radia 2 (kW) a 300 (MHz) y que se emplea como antena receptora otro dipolo de media onda paralelo al primero, a 150 (m) de distancia. Ignore las pérdidas y determine (a) $|V_{oc}|$ en el circuito receptor equivalente y (b) la potencia recibida en una carga adaptada.

P.10-18 (a) Dos dipolos de media onda paralelos están separados 150 (m). El dipolo transmisor radia 2 (kW) a 300 (MHz). Use la ecuación (10-80) para hallar la potencia recibida por el dipolo receptor. (b) Repita el apartado (a) suponiendo que las dos antenas son dipolos hertzianos.

P.10-19 Se tiene una antena dipolar simétrica de media longitud $\lambda/4$.

a) obtenga una expresión para el área efectiva, $A_e(\theta)$,

b) calcule el valor máximo de A_e a 100 (Mhz), y

c) calcule el valor máximo de A_e a 200 (MHz) ¿Por qué es menor esta respuesta que la que obtuvo en el apartado (b)?

P.10-20 La antena de un radar monoestático de 120 (kW) opera a 3 (GHz) y tiene una ganancia directiva de 20 (dB). Suponga que rastrea un objetivo a 8 (km) de distancia y que la sección recta de retrodispersión del objetivo es de 15 (m^2). Determine

a) la magnitud de la intensidad electrica en el objetivo,

b) la cantidad de potencia interceptada por el objetivo, y

c) la cantidad de potencia reflejada que absorbe la antena del radar

P.10-21 (a) Demuestre que tres satélites igualmente espaciados alrededor de la órbita geosíncrona en el plano ecuatorial cubrirían casi toda la superficie terrestre. Explique por qué no están cubiertas las regiones polares (b) Suponiendo que el haz principal del diagrama de radiación de la antena del satelite tiene la forma de un cono circular que cubre justamente la Tierra, sin sobresalirse, encuentre una relación entre el ancho de haz del lóbulo principal y la ganancia directiva de la antena.

P.10-22 La antena de la estación terrestre de un enlace de comunicación vía satélite tiene una ganancia de 55 (dB) a 14 (GHz) y apunta a un satélite geoestacionario a 36 500 (km) de distancia. Suponga que la antena del satélite tiene una ganancia de 35 (dB) al transmitir la señal de regreso a la estación terrestre a 12 (GHz) La señal mínima utilizable es 8 (pW).

a) Ignore las pérdidas óhmicas y por desadaptación de la antena y determine la potencia de transmisión mínima requerida para el satelite

b) Calcule la potencia de pico del pulso transmitido necesaria en la estación terrestre para detectar el satélite como un objeto pasivo, suponiendo que la sección recta de retrodispersión del satélite, incluyendo sus paneles solares, es de 25 (m^2) y que la potencia mínima detectable del pulso de retorno es de 0 5 (pW).

Apéndice A

SÍMBOLOS Y UNIDADES

A-1 UNIDADES FUNDAMENTALES EN EL SI (MKSA RACIONALIZADOS)

Cantidad	Símbolo	Unidad	Abreviatura
Longitud	ℓ	metro	m
Masa	m	kilogramo	kg
Tiempo	t	segundo	s
Corriente	I, i	ampere	A

[†] Además del sistema MKSA para las unidades de longitud, masa, tiempo y corriente, el sistema internacional adoptado por el Comité Internacional de Pesos y Medidas consiste en otras dos unidades fundamentales: el kelvin (K) para la temperatura termodinámica y la candela (cd) para la intensidad luminosa.

A-2 CANTIDADES DERIVADAS

Cantidad	Símbolo	Unidad	Abreviatura
Admitancia	Y	siemens	S
Capacitancia	C	farad	F
Carga	Q, q	coulomb	C
Conductancia	G	siemens	S
Conductividad	σ	siemens/metro	S/m
Constante de atenuación	α	neper/metro	Np/m
Constante de fase	β	radián/metro	rad/m
Constante dieléctrica (permitividad relativa)	ϵ_r	(sin dimensiones)	—
Constante de propagación	γ	metro^{-1}	m^{-1}
Densidad de carga (lineal)	ρ_ℓ	coulomb/metro	C/m
Densidad de carga (superficie)	ρ_s	coulomb/metro^2	C/m^2
Densidad de carga (volumen)	ρ_v	coulomb/metro^3	C/m^3
Densidad de corriente (superficie)	$\mathbf{J}_s$	ampere/metro	A/m
Densidad de corriente (volumen)	$\mathbf{J}$	ampere/metro^2	A/m^2
Densidad de energía	w	joule/metro^3	J/m^3
Densidad de flujo magnético	$\mathbf{B}$	tesla	T
Desplazamiento eléctrico (densidad de flujo eléctrico)	$\mathbf{D}$	coulomb/metro^2	C/m^2
Directividad	D	(sin dimensiones)	—
Energía (trabajo)	W	joule	J
Fase	ϕ	radián	rad
Flujo magnético	$\mathbf{\Phi}$	weber	Wb
Frecuencia	f	hertz	Hz
Frecuencia angular	ω	radián/segundo	rad/s
Fuerza	$\mathbf{F}$	newton	N
Fuerza electromotriz	$\mathcal{V}$	volt	V
Fuerza magnetomotriz	$\mathcal{V}_m$	ampere	A
Impedancia	Z, η	ohm	Ω
Inductancia	L	henry	H

Cantidad	Símbolo	Unidad	Abreviatura
Intensidad de campo eléctrico	$\mathbf{E}$	volt/metro	V/m
Intensidad de campo magnético	$\mathbf{H}$	ampere/metro	A/m
Intensidad de radiación	U	watt/estereorradián	W/sr
Longitud de onda	λ	metro	m
Magnetización	$\mathbf{M}$	ampere/metro	A/m
Momento dipolar eléctrico	$\mathbf{p}$	coulomb-metro	C · m
Momento dipolar magnético	$\mathbf{m}$	ampere-metro^2	A · m^2
Número de onda	k	radián/metro	rad/m
Par de torsión	T	newton-metro	N · m
Permeabilidad	μ, μ_0	henry/metro	H/m
Permeabilidad relativa	μ_r	(sin dimensiones)	—
Permitividad	ϵ, ϵ_0	farad/metro	F/m
Permitividad relativa (constante dieléctrica)	ϵ_r	(sin dimensiones)	—
Potencia	P	watt	W
Potencial eléctrico	V	volt	V
Potencial magnético (vector)	$\mathbf{A}$	weber/metro	Wb/m
Reactancia	X	ohm	Ω
Reluctancia	$\mathscr{R}$	henry^{-1}	H^{-1}
Resistencia	R	ohm	Ω
Susceptancia	B	siemens	S
Susceptibilidad eléctrica	χ_e	(sin dimensiones)	—
Susceptibilidad magnética	χ_m	(sin dimensiones)	—
Trabajo (energía)	W	joule	J
Vector de polarización	$\mathbf{P}$	coulomb/metro^2	C/m
Vector de Poynting (densidad de potencia)	$\mathscr{P}$	watt/metro^2	W/m^2
Velocidad	u	metro/segundo	m/s
Voltaje	V	volt	V

A-3 MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DE UNIDADES

Factor por el cual se multiplica la unidad	Prefijo	Símbolo
$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$	exa	E
$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$	peta	P
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
$1\,000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto†	h
$10 = 10^{1}$	deca†	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci†	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi†	c
$0.001 = 10^{-3}$	mili	m
$0.000\,001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	atto	a

† Estos prefijos por lo general sólo se usan para medidas de longitud, área y volumen.

Apéndice B

ALGUNAS CONSTANTES MATERIALES ÚTILES

B-1 CONSTANTES DEL ESPACIO LIBRE

Constante	Símbolo	Valor
Velocidad de la luz	c	$\sim 3 \times 10^8$ (m/s)
Permitividad	ϵ_0	$\sim \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ (F/m)
Permeabilidad	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)
Impedancia intrínseca	η_0	$\sim 120\pi$ o 377 (Ω)

B-2 CONSTANTES FÍSICAS DEL ELECTRÓN Y DEL PROTÓN

Constante	Símbolo	Valor
Masa en reposo del electrón	m_e	9.107×10^{-31} (kg)
Carga del electrón	$-e$	-1.602×10^{-19} (C)
Razón carga-masa del electrón	$-e/m_e$	-1.759×10^{11} (C/kg)
Radio del electrón	R_e	2.81×10^{-15} (m)
Masa en reposo del protón	m_p	1.673×10^{-27} (kg)

B-3 PERMITIVIDADES RELATIVAS (CONSTANTES DIELÉCTRICAS)

Material	Permitividad relativa, ϵ_r
Aire	1.0
Baquelita	5.0
Vidrio	4–10
Mica	6.0
Aceite	2.3
Papel	2–4
Cera parafina	2.2
Plexiglás	3.4
Polietileno	2.3
Poliestireno	2.6
Porcelana	5.7
Caucho	2.3–4.0
Tierra (seca)	3–4
Teflon	2.1
Agua (destilada)	80
Agua de mar	72

B-4 CONDUCTIVIDADES†

Material	Conductividad, σ (S/m)	Material	Conductividad, σ (S/m)
Plata	6.17×10^7	Agua dulce	10^{-3}
Cobre	5.80×10^7	Agua destilada	2×10^{-4}
Oro	4.10×10^7	Tierra seca	10^{-5}
Aluminio	3.54×10^7	Aceite de transformador	10^{-11}
Latón	1.57×10^7	Vidrio	10^{-12}
Bronce	10^7	Porcelana	2×10^{-13}
Hierro	10^7	Caucho	10^{-15}
Agua de mar	4	Cuarzo fundido	10^{-17}

† Tenga en cuenta que los parámetros constitutivos de algunos de los materiales dependen de la frecuencia y de la temperatura. Las constantes listadas son valores para baja frecuencia a temperatura ambiente.

B-5 PERMEABILIDADES RELATIVAS†

Material	Permeabilidad relativa, μ_r
Ferromagnéticos (no lineales)	
Níquel	250
Cobalto	600
Hierro (puro)	4,000
Mumetal	100,000
Paramagnéticos	
Aluminio	1.000021
Magnesio	1.000012
Paladio	1.00082
Titanio	1.00018
Diamagnéticos	
Bismuto	0.99983
Oro	0.99996
Plata	0.99998
Cobre	0.99999

† Tenga en cuenta que los parámetros constitutivos de algunos de los materiales dependen de la frecuencia y de la temperatura. Las constantes listadas son valores para baja frecuencia a temperatura ambiente.

Apéndice C

Algunas identidades vectoriales útiles

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\nabla(\psi V) = \psi\nabla V + V\nabla\psi$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{A}) = \psi\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\psi$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{A}) = \psi\nabla\times\mathbf{A} + \nabla\psi\times\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot\nabla V = \nabla^2 V$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla\times\nabla V = 0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dv = \oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(Teorema de la divergencia)}$$

$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(Teorema de Stokes)}$$

Operaciones de gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\nabla V = \mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)

$$\nabla V = \mathbf{a}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{a}_\phi \frac{\partial V}{r \partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{\partial A_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_r \left(\frac{\partial A_z}{r \partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\phi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas (R, θ, ϕ)

$$\nabla V = \mathbf{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} + \mathbf{a}_\theta \frac{\partial V}{R\,\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{R \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{R \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

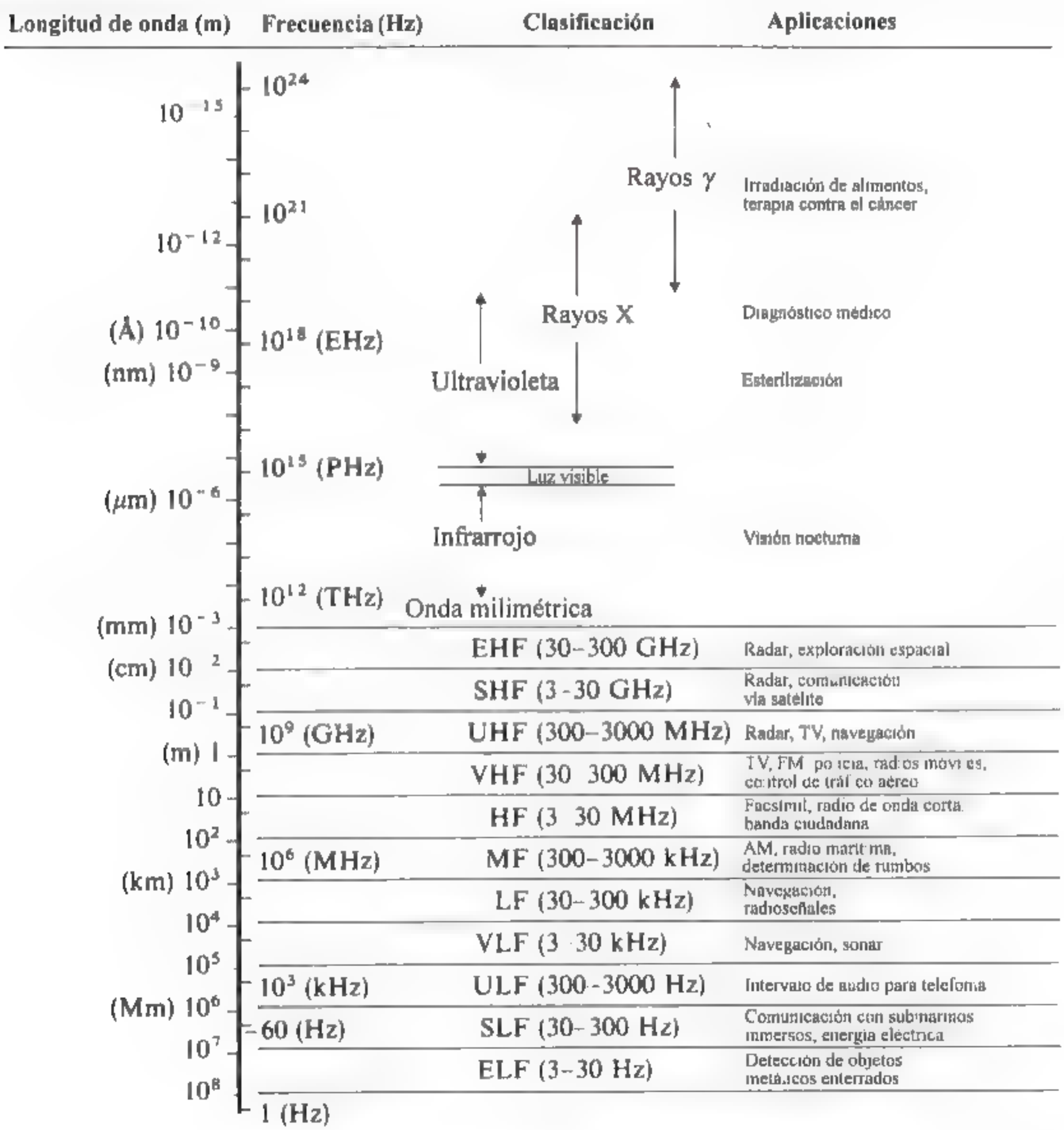
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (R \operatorname{sen}\theta)A_\phi \end{vmatrix} = \mathbf{a}_R \frac{1}{R \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \operatorname{sen}\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]$$

$$+ \mathbf{a}_\theta \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right]$$

$$+ \mathbf{a}_\phi \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\theta}\right) + \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Espectro de las ondas electromagnéticas



Intervalo de longitudes de onda de la visión humana: 720(nm) — 380(nm)
(Rojo oscuro) (Violeta)

Bibliografía

Consideramos que los libros sobre campos y ondas electromagnéticos listados a continuación son útiles como referencias y tienen un nivel comparable con el de este libro. Se listan en orden alfabético por apellido del primer autor.

Bewley, L. V., *Two Dimensional Fields in Electrical Engineering*, Dover Publications, Nueva York, 1963.

Cheng, D. K., *Field and Wave Electromagnetics*, 2da. ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.

Collin, R. E., *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985.

Crowley, J. M., *Fundamentals of Applied Electrostatics*, Wiley, Nueva York, 1986

Feynman, R. P.; Leighton, R. O., y Sands, M., *Lectures on Physics*, vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.

Javid, M. y Brown, P. M., *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1963.

Jordan, E. C. y Balmain, K. G., *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2da. ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1968.

Kraus, J. D., *Electromagnetics*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1992

Lorrain, P. y Corson, D., *Electromagnetic Fields and Waves*, 2da. ed., Freeman, San Francisco, California, 1970.

Neff, H. P., Jr., *Introductory Electromagnetics*, Wiley, Nueva York, 1991

Paris, D. T. y Hurd, F. K., *Basic Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1969

Parton, J. E.; Owen, S. J. T.; y Raven, M. S., *Applied Electromagnetics*, 2da. ed., Macmillan, Londres, 1986

Paul, C. R. y Nasar, S. A., *Introduction to Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, Nueva York, 1987

Plonsey, R. y Collin, R. E. *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, 2da ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1982.

Plonus, M. A., *Applied Electromagnetics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1978

Popović, B. D., *Introductory Engineering Electromagnetics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.

Pozar, D M , *Microwave Engineering*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.

Ramo, S.; Whinnery, J. R., y Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electronics*, 2da. ed., Wiley, Nueva York, 1984.

Sander, K F. y Reed, G. A. L., *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves*, 2da. ed., Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1986.

Seshadri, S R , *Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971

Shen, L C. y Kong, J A., *Applied Electromagnetism*, 2da. ed , PWS Engineering, Boston, Massachusetts, 1987.

Zahn, M., *Electromagnetic Field Theory*, Wiley, Nueva York, 1979.

Respuestas a los problemas con número impar

CAPÍTULO 2

P.2-3 **a)** $(\mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 3 + \mathbf{a}_z 6)/7$. **b)** 17.1. **c)** -1.71. **d)** -24. **e)** -3.43. **f)** 104.2°. **g)** $-\mathbf{a}_x 4 - \mathbf{a}_y 3 - \mathbf{a}_z 10$. **h)** -118.

P.2-5 **a)** Ángulo recto en P_1. **b)** 15.3.

P.2-7 **a)** $(\mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z)/\sqrt{30}$. **b)** $(\mathbf{a}_x 2 + \mathbf{a}_y 5)/\sqrt{29}$.

P.2-11 **a)** $(-3/2,\ -3\sqrt{3}/2,\ -4)$. **b)** $(5,\ 143.1°,\ 240°)$.

P.2-13 **a)** $A_x \cos\phi_1 + A_y \operatorname{sen}\phi_1$. **b)** $A_R(r_1/\sqrt{r_1^2 + z_1^2}) + A_\theta(z_1/\sqrt{r_1^2 + z_1^2})$

P2.-15 **a)** $\mathbf{a}_R 2$; $-4/3$. **b)** 112.4°.

P.2-17 **a)** $-(\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z)/R^3$. **b)** $-\mathbf{a}_R(1/R^2)$.

P.2-19 **a)** $\mathbf{a}_\phi$; $-\mathbf{a}_r$.

P.2-21 **a)** 3/2. **b)** $y + z + x$.

P.2-23 **a)** $2\pi R^3/3$. **b)** 1.

P.2-27 **a)** 1/2. **b)** $\mathbf{a}_z(3r - 5)\cos\phi$. **c)** 1/2.

CAPÍTULO 3

P.3-1 **a)** $\dfrac{m}{e}\left(\dfrac{u_0 h}{w}\right)^2$. **b)** $\dfrac{1}{2}\left(w + \dfrac{m u_0^2 D h}{e w V_{max}}\right)$

P.3-3 **a)** $Q_1/Q_2 = 4/3$. **b)** $Q_1/Q_2 = 3/4$.

P.3-5 $z = 8.66b$.

P.3-7 Suponiendo que la línea de carga semicircular alrededor del origen está en la mitad superior del plano xy, $\mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \rho_l/2\pi\epsilon_0 b$.

P.3-9 **a)** $E_r = 0$, $r < a$; $E_r = a\rho_{sa}/\epsilon_0 r$, $a < r < b$; $E_r = (a\rho_{sa} + b\rho_{sb})/\epsilon_0 r$, $r > b$.

b) $b/a = -\rho_{sa}/\rho_{sb}$.

P.3-11 **a)** $-30\,(\mu\text{J})$. **b)** $-60\,(\mu\text{J})$.

P.3-13 **a)** $\rho_{ps} = P_0 L/2$ en las seis caras; $\rho_{pv} = -3P_0$.

P.3-15 **a)** $\rho_{ps} = P_0 r_o(3 + \text{sen}^2\phi)$, $r = r_o$; $\rho_{ps} = -P_0 r_i(3 + \text{sen}^2\phi)$, $r = r_i$, $\rho_{pv} = -7P_0$.

P.3-17 **a)** $150\,(k\text{V})$. **b)** $1{,}000\,(k\text{V})$. **c)** $130\,(k\text{V})$.

P.3-19 $\epsilon_{r2} = 1.667$.

P.3-21 **a)** $\mathbf{a}_r V_0/a \ln(b/a)$.

b) $a = b/e = b/2.718$.

c) eV_0/b.

d) $2\pi\epsilon$(F/m).

P.3-23 $4\pi\epsilon \Big/ \left(\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R_o}\right)$.

P.3-25 **a)** 27 (nJ). **b)** 27 (nJ).

P.3-27 $\mathbf{a}_x(\epsilon - \epsilon_0)V_0^2 w/2d$.

P.3-29 $V = c_1 \ln r + c_2 - Ar/\epsilon$; $c_1 = [A(b-a)/\epsilon - V_0]/\ln(b/a)$,

$c_2 = [V_0 \ln b + A(a \ln b - b \ln a)/\epsilon]/\ln(b/a)$.

P.3-31 **a)** $$V(\theta) = V_0 \frac{\ln\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

b) $$\mathbf{E}(\theta) = -\mathbf{a}_\theta \frac{V_0}{R \ln[\tan(\alpha/2)]\,\text{sen}\,\theta}.$$

P.3-35 **a)** $d_i = 0.46$ (mm). **b)** 2.96 (nF/m). **c)** $|\mathbf{E}| = 111.9$ (V/m).

CAPÍTULO 4

P.4-1 **a)** 3.54×10^7(S/m).

b) 6×10^{-3}(V/m).

c) 1(W).

d) 8.4×10^{-6}(m/s)

P.4-3 **a)** $\mathbf{a}_R\, 7.5 \times 10^9 Re^{-9.42\times10^{11}t}$(V/m), $R < b$, $\mathbf{a}_R(9/R^2) \times 10^6$(V/m), $R > b$

b) $\mathbf{a}_R\, 7.5 \times 10^{10} Re^{-9.42\times10^{11}t}$(A/m²), $R < b$; 0, $R > b$.

P.4-5 $P_{R_1} = 3.33$(mW), $P_{R_2} = 8.00$(mW), $P_{R_3} = 5.31$(mW),

$P_{R_4} = 8.87$(mW), $P_{R_5} = 44.5$(mW). Resistencia total $= 7(\Omega)$.

P.4-7 **a)** $\dfrac{d}{(\sigma_2 - \sigma_1)S} \ln\left(\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$.

b) $\dfrac{\epsilon_0(\sigma_2 - \sigma_1)V_0}{\sigma_2 d \ln(\sigma_2/\sigma_1)}$, $y = d$.

P.4-9 a) $C_i = \dfrac{2\pi\epsilon_1 L}{\ln(c/a)},\ G_i = \dfrac{2\pi\sigma_1 L}{\ln(c/a)},$

$C_o = \dfrac{2\pi\epsilon_2 L}{\ln(b/c)},\ G_o = \dfrac{2\pi\sigma_2 L}{\ln(b/c)}.$

b) $J_i = J_o = \dfrac{\sigma_1\sigma_2 V_0}{r[\sigma_1 \ln(b/c) + \sigma_2 \ln(c/a)]}$

P.4-11 $R = \dfrac{2}{\pi\sigma h}\ln(b/a).$

CAPÍTULO 5

P.5-1 $\mathbf{E} = u_0(\mathbf{a}_y B_z - \mathbf{a}_z B_y).$

P.5-5 $\mathbf{B}_{P_2} = -\mathbf{a}_z \dfrac{\mu_0 I}{2\pi w}\ln\left(1 + \dfrac{w}{d_2}\right).$

P.5-7 Suponiendo que la corriente I fluye en sentido contrario al de las agujas del reloj en un triángulo que yace sobre el plano xy, $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \dfrac{9\mu_0 I}{2\pi w}.$

P.5-9 a) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\dfrac{r_o}{r}\right).$

b) $2.34(\mu Wb).$

P.5-11 a) $\mathbf{a}_z \mu_0 H_0/\mu.$

b) $\mathbf{a}_z(H_0 - M_i).$

P.5-13 a) $\mathbf{J}_{mv} = 0,\ \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{a}_\phi M_0 \operatorname{sen}\theta$

b) $(2/3)\mu_0\mathbf{M}_0.$

P.5-15 $L = \mu_0 N^2(r_o - \sqrt{r_o^2 - b^2}),\ L \cong \mu_0 N^2 b^2/2r_o.$

P.5-17 $L_{12} = \dfrac{\mu_0 h_2}{2\pi}\ln\dfrac{(w_1 + d)(w_2 + d)}{d(w_1 + w_2 + d)}$

P.5-19 $\mathbf{f} = \mathbf{a}_x \dfrac{\mu_0 I^2}{\pi w}\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{2D}\right).$

P.5-21 $\mathbf{T} = -\mathbf{a}_z 0.1(\mathrm{N\cdot m}).$

CAPÍTULO 6

P.6-1 $\mathscr{V} = -\oint_C \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\ell.$

P.6-3 $i_2(t) = -\dfrac{\omega\mu_0 I_1 h}{2\pi\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\ln\left(1 + \dfrac{w}{d}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t + \tan^{-1}\dfrac{R}{\omega L}\right).$

P.6-5 a) $i = 0.251 \operatorname{sen} 100\pi t\,(\mathrm{A}).$

b) $i = 0.104 \operatorname{sen}(100\pi t - 65.6°)(\mathrm{A}).$

P.6-7 a) $1(\mathrm{GHz}).$ **b)** $7.2(\mathrm{MHz}).$

P.6-9 a) $\mathbf{H}_2 = \mathbf{a}_x 30 + \mathbf{a}_y 45 + \mathbf{a}_z 10(\mathrm{A/m}).$

b) $\mathbf{B}_2 = 2\mu_0\mathbf{H}_2.$ **c)** $\alpha_1 = 68.2°.$ **d)** $\alpha_2 = 79.5°.$

P.6-15 $\alpha = \pi/6,\ H_0 = 1.73 \times 10^{-4}(\mathrm{A/m}).$

P6-17 **a)** $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi$, donde

$$A_R = A_z \cos\theta = \frac{\mu_0 I\,d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\cos\theta,$$

$$A_\theta = -A_z \,\text{sen}\,\theta = -\frac{\mu_0 I\,d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\text{sen}\,\theta,$$

$$A_\phi = 0.$$

b) $\mathbf{H} = -\mathbf{a}_\phi \dfrac{I\,d\ell}{4\pi}\,\beta^2\,\text{sen}\,\theta\left[\dfrac{1}{j\beta R} + \dfrac{1}{(j\beta R)^2}\right]e^{-j\beta R}.$

P.6-19 $k = 20\pi/3$ (rad/m).

$$\mathbf{H}(R, \theta; t) = \mathbf{a}_\phi \frac{10^{-3}}{120\pi R}\,\text{sen}\,\theta\cos(2\pi 10^9 t - 20\pi R/3)\ \text{(A/m)}.$$

P.6-21 $\beta = 13.2\pi = 41.6$ (rad/m).

$$\mathbf{E}(x, z; t) = \mathbf{a}_x 496\cos(15\pi x)\,\text{sen}(6\pi 10^9 t - 41.6z) + \mathbf{a}_z 565\,\text{sen}(15\pi x)\cos(6\pi 10^9 t - 41.6z).$$

CAPÍTULO 7

P.7-1 **a)** $\nabla^2\mathbf{E} - \mu\sigma\dfrac{\partial E}{\partial t} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$

b) $\nabla^2\mathbf{E} - j\omega\mu\sigma\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0.$

P.7-3 $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\eta\mathbf{a}_k \times \mathbf{H}(\mathbf{R})$.

P.7-5 **a)** $f = 1.59 \times 10^7$(Hz), $\lambda = 10.88$ (m).

b) $\epsilon_r = 3$.

c) Polarización elíptica de mano izquierda.

d) $\mathbf{H}(z, t) = \dfrac{\sqrt{3}}{120\pi}\,[\mathbf{a}_x\,\text{sen}(10^8 t - z/\sqrt{3}) + \mathbf{a}_y 2\cos(10^8 t - z/\sqrt{3})]$ (A/m).

P.7-7 **a)** 0.279 (m).

b) $\eta_c = 238\underline{/1.43^\circ}$, $\lambda = 0.063$ (m), $u_p = 1.897 \times 10^8$(m/s),

$u_g = 1.898 \times 10^8$ (m/s).

c) $\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{a}_z 0.21 e^{-2.48x}\,\text{sen}(6\pi \times 10^9 t - 31.6\pi x + 0.325\pi)$ (A/m).

P.7-9 **a)** $\sigma = 9.9 \times 10^4$ (S/m). **b)** 0.175 (mm).

P.7-11 Para $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_0\cos(\omega t - kz + \phi) + \mathbf{a}_y E_0\,\text{sen}(\omega t - kz + \phi)$,

$\mathscr{P} = \mathbf{a}_z E_0^2/\eta$, que es independiente de t y z.

P.7-15 **a)** $\delta = 6.3$ (cm), $\eta_c = 3.96 + j3.96\,(\Omega)$.

b) $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x 1.68 e^{-15.85z}\cos(10^8 t - 15.85z + 0.25\pi)$ (V/m),

$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{a}_y 0.3 e^{-15.85z}\cos(10^8 t - 15.85z)$ (A/m).

c) $\mathscr{P}_{av} = \mathbf{a}_z 0.178 e^{-31.9z}$ (W/m^2).

P.7-17 **a)** $\mathbf{E}_r(z) = E_0(-\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)e^{j\beta z}$, una onda polarizada circularmente de mano izquierda en dirección $-z$

b) $\mathbf{J}_s = \dfrac{2E_0}{\eta_0}(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)$.

c) $\mathbf{E}_1(z, t) = 2E_0\,\text{sen}\,\beta z\,(\mathbf{a}_x\,\text{sen}\,\omega t - \mathbf{a}_y\cos\omega t)$.

P.7-19 **a)** $\mathbf{E}_r(z) = \mathbf{a}_x 2.08e^{j(6z+159.7°)}$ (V/m),

$\mathbf{H}_r(z) = -\mathbf{a}_y 0.0055e^{j(6z+159.7°)}$ (A/m),

$\mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_x 8.08e^{-1.35z}e^{-j(9.10z-5.1°)}$ (V/m),

$\mathbf{H}_t(z) = \mathbf{a}_y 0.032e^{-1.35z}e^{-j(9.10z+3.4°)}$ (A/m).

b) $S = 1.53$.

c) $(\mathscr{P}_{av})_1 = \mathbf{a}_z 0.127(\text{W/m}^2)$, $(\mathscr{P}_{av})_2 = \mathbf{a}_z 0.127e^{-2.70z}(\text{W/m}^2)$.

P.7-21 **a)** $\Gamma = -0.241$, $\tau = 0.759$

b) $\mathbf{E}_t(x, z; t) = \mathbf{a}_y 15.2\cos(2\pi 10^8 t - 1.05x - 2.96z)$ (V/m),

$\mathbf{H}_t(x, z; t) = 0.06(-\mathbf{a}_x 0.943 + \mathbf{a}_z 0.333)\cos(2\pi 10^8 t - 1.05x - 2.96z)$ (A/m).

P.7-25 **a)** $\theta_t = 0.03°$. **b)** $\Gamma_{\|} \cong 0.0151(1 + j)$. **c)** 8.69 (m).

P.7-27 **a)** $\mathbf{E}_t(x, z) = \mathbf{a}_y E_{t0}\, e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_{2x} x}$,

$$\mathbf{H}_t(x, z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}\left(\mathbf{a}_x j\alpha_2 + \mathbf{a}_z \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\,\text{sen}\,\theta_i\right) e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_{2x} x},$$

donde $\beta_{2x} = \beta_2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\,\text{sen}\,\theta_i$, $\alpha_2 = \beta_2\sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)\text{sen}^2\theta_i - 1}$,

$$\text{y } E_{t0} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i E_{i0}}{\eta_2 \cos\theta_i - j\eta_1\sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)\text{sen}^2\theta_i - 1}}.$$

P.7-29 **a)** 6.38°. **b)** $e^{j0.66}$. **c)** $1.89e^{j0.33}$. **d)** 159 (dB).

P.7-31 **a)** $\theta_a = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$. **b)** 80.4°.

P.7-33 $\text{sen}\,\theta_c = \tan\,\theta_{B\|}$.

CAPÍTULO 8

P.8-1 **a)** $d' = \sqrt{2}d$. **b)** $w' = w/\sqrt{2}$. **c)** $w' = 2w$

d) $u_p' = u_p/\sqrt{2}$ para el caso **a** y **b**, $u_p' = u_p$ para el caso **c**.

P.8-3 **a)** 2.55 (cm). **b)** 3.91 (mm).

P.8-5 $R = 0.058\,(\Omega/\text{m})$, $L = 0.20(\mu\text{H/m})$, $C = 80(\text{pF/m})$, $G = 23(\mu\text{S/m})$.

P.8-7 **b)** $V(z) = V_i \cosh \gamma z - I_i Z_0 \,\text{senh}\, \gamma z$,

$$I(z) = I_i \cosh \gamma z - \frac{V_i}{Z_0}\,\text{senh}\,\gamma z.$$

P.8-9 **a)** $V(z, t) = 5.27e^{-0.01z}\,\text{sen}(8000\pi t - 5.55z - 0.322)$ (V),

$I(z, t) = 0.105e^{-0.01z}\,\text{sen}(8000\pi t - 5.55z - 0.322)$ (A).

b) $V(50, t) = 3.20\,\text{sen}(8000\pi t - 0.432\pi)$ (V),

$I(50, t) = 0.064\,\text{sen}(8000\pi t - 0.432\pi)$ (A).

c) 0.102 (W).

P.8-11 $Z_i = 26.3 - j9.87\,(\Omega)$.

P.8-13 **a)** $R_0 = 74.5(\Omega)$, $\epsilon_r = 4.05$.

b) $X_{io} = -290\,(\Omega)$, $X_{is} = 19.2\,(\Omega)$.

P.8-15 **a)** $Z_0 = 50\,(\Omega)$. **b)** Mín. $S = 2$

P.8-17 $\dfrac{R_L}{R_0} = \dfrac{1}{2r_i}\left[(1 + r_i^2 + x_i^2) \pm \sqrt{(1 + r_i^2 + x_i^2)^2 - 4r_i^2}\right]$; $r_i = \dfrac{R_i}{R_0}$, $x_i = \dfrac{X_i}{R_0}$,

$l = \dfrac{\lambda}{2\pi}\tan^{-1} t$; $t = \dfrac{1}{2x_i}\left\{-[1 - (r_i^2 + x_i^2)] \pm \sqrt{(1 - r_i^2 - x_i^2)^2 + 4x_i^2}\right\}$.

P.8-19 **a)** $V_i = 0.527\underline{/18.4^\circ}$ (V), $I_i = 1.05\underline{/-18.4^\circ}$ (mA),
$V_L = 0.033\underline{/-45^\circ}$ (V), $I_L = 1.33\underline{/-45^\circ}$ (mA)

b) $S = 2$.

c) 0.022 (mW); 0.025 (mW), si $R_L = 50(\Omega)$.

P.8-21 **a)** $S = 1.77$. **b)** $\Gamma = 0.28e^{j140^\circ} = 0.28e^{j2.55}$

c) $Z_i = 50 + j29.5\,(\Omega)$. **d)** $Y_i = 0.015 - j0.009\,(\text{S})$.

e) No hay mínimo de voltaje en la línea, pero $V_L < V_i$

P.8-23 **a)** $Z_L = 33.75 - j23.75\,(\Omega)$. **b)** $\Gamma = \frac{1}{3}e^{j252.5^\circ} = \frac{1}{3}e^{j4.41}$.

c) A 25 (cm) del cortocircuito.

P.8-25 $d_1 = 0$ y $l_1 = 0.375\lambda$; o $d_2 = 0.324\lambda$ y $l_2 = 0.125\lambda$.

P.8-27 **a)** $Z_L = 104.3 - j73.5\,(\Omega)$.

b) $d = 0.173$ (m), $l = 0.238$ (m).

CAPÍTULO 9

P.9-1 En $f = 1.1f_c$: $Z_{TM} = 157\,(\Omega)$, $Z_{TE} = 904\,(\Omega)$.
En $f = 2.2f_c$: $Z_{TM} = 336\,(\Omega)$, $Z_{TE} = 423\,(\Omega)$.

P.9-3 **a)** $H_z^0(y) = B_n \cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$.

b) $(f_c)_{TE_1} = \dfrac{1}{2b\sqrt{\mu\epsilon}}$.

c) $H_z(y, z; t) = B_1 \cos\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t - \beta_1 z)$,

$$H_y(y, z; t) = -\frac{\beta_1 b}{\pi} B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta_1 z),$$

$$E_x(y, z; t) = -\frac{\omega\mu b}{\pi} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta_1 z),$$

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}.$$

P.9-5 **a)** 8.25 (GHz). **b)** $544 + j390$. **c)** 8.89 (W).

P.9-7 **a)** TE_{10}. **b)** TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, y TM_{11}.

P.9-9 **a)** Diseño genérico: $a = 6.5$ (cm), $b = 3.5$ (cm).

b) $u_p = 4.70 \times 10^8$ (m/s), $\lambda_g = 15.7$ (cm),
$\beta = 40.1$ (rad/m), $(Z_{TE})_{10} = 590\,(\Omega)$.

P.9-11 **a)** $E_x^0(x, y) = -\frac{j\beta_{11}}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$,

$E_y^0(x, y) = -\frac{j\beta_{11}}{h^2}\left(\frac{\pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$,

$H_x^0(x, y) = \frac{j\omega\epsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$,

$H_y^0(x, y) = -\frac{j\omega\epsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$.

$\beta_{11} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$, $h^2 = \omega_c^2\mu\epsilon$,

$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$.

b) $P_{av}(z) = \frac{\omega\epsilon\beta_{11}\epsilon_0^2 ab}{8\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}$.

P.9-13 **a)** Modo TE_{02}.

b) $(f_c)_{02} = 12\,(\text{GHz})$, $f = 18\,(\text{GHz})$, $Z_{TE} = 506\,(\Omega)$, $\lambda_g = 2.24\,(\text{cm})$.

c) $P_{av} = 280\,(\text{W})$.

P.9-15 **a)** 3.3 (GHz); 3.3 (GHz); ninguno.

b) 5.3 (W); 10.7 (W).

P.9-17 **a)** Modo TE_{101}, $f_{101} = 4.802$ (GHz).

b) $Q_{101} = 6{,}869$. $W_e = W_m = 0.0773$ (pJ).

P.9-19 **a)** 2.89 (cm). **b)** 7.34 (GHz). **c)** 12 493.

CAPÍTULO 10

P.10-1 $E_0 = 97.2$ (mV/m), $H_0 = 0.258$ (mA/m).

P.10-3 **a)** $\rho_l = -j(I_0/c)\operatorname{sen} 2\pi z$, $\lambda = 1$ (m).

b) $\rho_l = \begin{cases} -j2I_0/\pi c \text{ para } z > 0, \\ +j2I_0/\pi c \text{ para } z < 0. \end{cases}$

P.10-5 $\zeta_r = 99.2\%$.

P.10-7 **a)** $|E_\theta|_{máx} = 2.82$ (mV/m).

b) $P_r = 1.14$ (kW).

c) $R_r = 0.227\,(\Omega)$.

P.10-9 **a)** 90°. **b)** 78°.

P.10.11 **a)** $E_\theta = \frac{j120Ih}{R}\beta e^{-j\beta(R-d/2\cos\theta)}F(\theta)$,

donde $F(\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos\left(\frac{\beta d}{2}\cos\theta\right)$.

P.10-13 **a)** 1 : 4 : 6 : 4 : 1

b) $|A(\phi)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right|^4$.

c) 30.28° comparado con 20.78°.

P.10-15 $|F(\theta, \phi)| = \frac{1}{N_1 N_2}\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\;\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N_1\psi_x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N_2\psi_y}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\psi_x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\psi_y}{2}\right)}\right|$,

donde $\psi_x = \frac{\beta d_1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi$, y

$\psi_y = \frac{\beta d_2}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi$.

P.10-17 **a)** $|V_{oc}| = 0.942$ (V). **b)** $P_L = 1.52$ (mW).

P.10-19 **a)** $A_e(\theta) = 0.13\lambda^2\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right]^2$.

b) 1.17 (m^2). **c)** 0.29 (m^2).

P.10-21 **b)** Anchura de haz del lóbulo principal $= 4/\sqrt{G_D}$.

Índice de materias

carlos (playa)
04127462225

NOV

LITOGRÁFICA INGRAMEX, S.A.
CENTENO No. 162-1
COL. GRANJAS ESMERALDA
09810 MÉXICO, D.F.

2003

CALIDAD ISO 9000 CERTIFICADA
Certificado No. 02-2003

Esta obra ha sido diseñada como libro de texto para el curso de electromagnetismo que se imparte en las carreras de ingeniería. Presenta los fundamentos en forma concisa y lógica y en el primer capítulo brinda información para motivar al estudiante.

Incluye importantes temas de aplicaciones en ingeniería, como motores eléctricos, líneas de transmisión, guías de onda, antenas, sistemas de antenas y sistemas de radar. Al final de cada **sección** se *incluyen preguntas de repaso*, *recuadros de comentarios*, *ejemplos resueltos*, y *ejercicios simples* con *respuestas* para probar la habilidad de los estudiantes. Al final de cada **capítulo** se encuentra un *resumen* donde se listan los resultados más importantes del tema sin repetir las fórmulas matemáticas, así como un *grupo de problemas*, las *respuestas* a los problemas impares y la *bibliografía* se presentan al final del libro.

OTRAS OBRAS DE INTERÉS PUBLICADAS POR
ADDISON WESLEY LONGMAN:

Alonso y Finn: *Física*
Alonso y Finn: *Física general*
Volumen I: *Mecánica*
Volumen II: *Campos y ondas*
Volumen III: *Fundamentos cuánticos y estadísticos*
Reitz, Milford y Christy: *Fundamentos de la teoría electromagnética. cuarta edición*
Hecht y Zajac: *Óptica*
Albella y Martínez Duart: *Fundamentos de electrónica física y microelectrónica*
Cabrera, López y Agulló-López: *Óptica electromagnética. Fundamentos*
Sears, Zemansky y Young: *Física Universitaria, sexta edición*
Hewitt: *Física conceptual, se[illegible]*

Visítenos en:
www.pearsonedlatino.com

ISBN 968 444 327 7

9 789684 443273

PEARSON

Addison Wesley Longman